This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

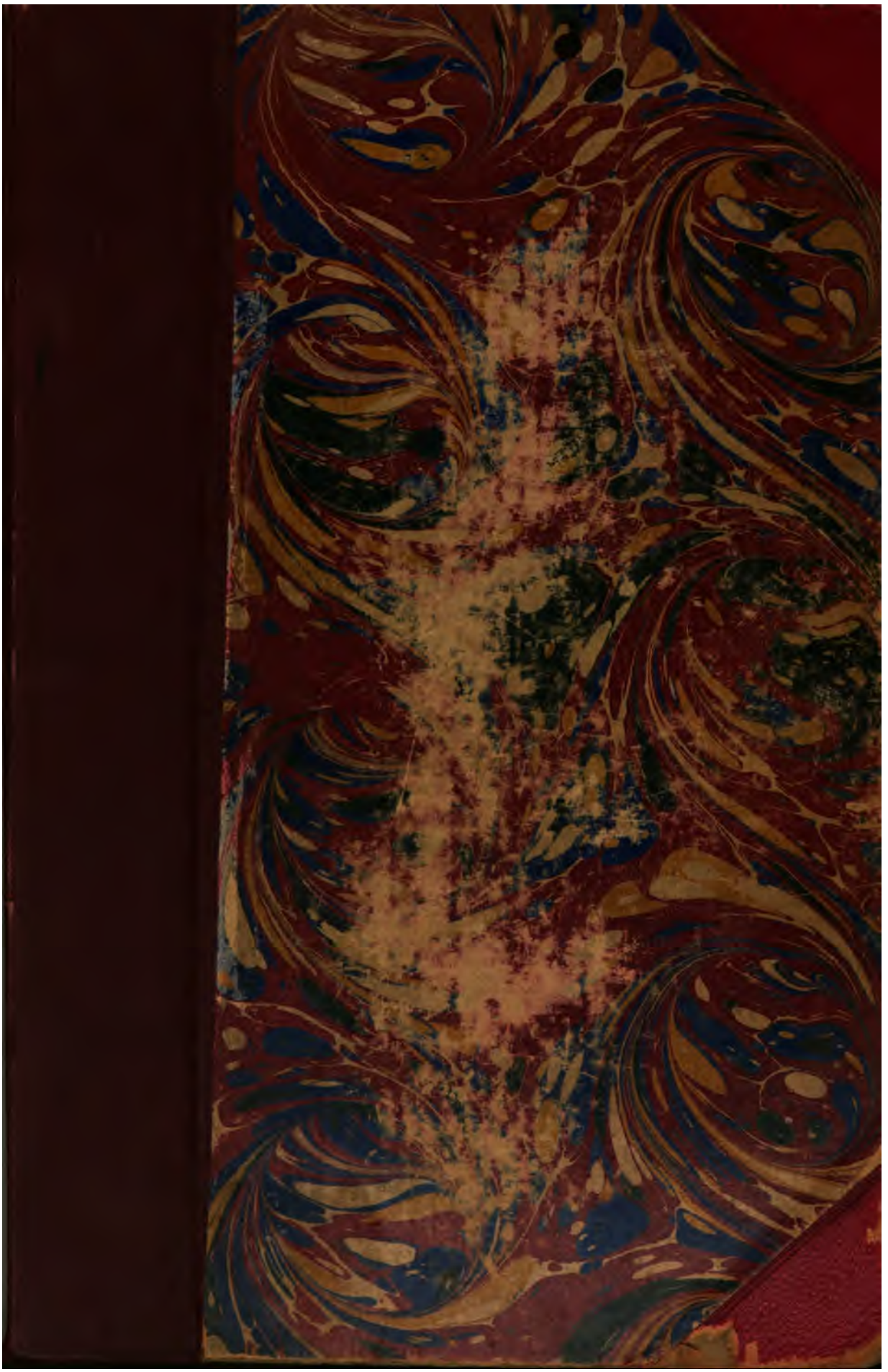
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 4508.90

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
9 July, 1891.

FELIX KLEIN,

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER ELLIPTISCHEN MODULFUNCTIONEN

AUSGEARBEITET UND VERVOLLSTÄNDIGT

VON

Dr. ROBERT FRICKE.

ERSTER BAND.

GRUNDLEGUNG DER THEORIE.

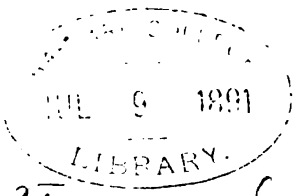
MIT ZAHLREICHEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1890.

~~VI 1249~~
Math 1508.90



Library Fund.

I.

Vorrede.

Das Werk, dessen ersten Band ich dem mathematischen Publicum hiermit vorlege, will eine geordnete Darstellung derjenigen Theorie der elliptischen Modulfunctionen geben, wie sie seit nunmehr 13 Jahren in erster Linie durch die wissenschaftlichen Schöpfungen meines hochverehrten Lehrers, des Herrn Professor Felix Klein, sodann aber auch durch dessen Unterrichtsthätigkeit an der technischen Hochschule in München, sowie an den Universitäten zu Leipzig und Göttingen entstanden ist. Betreffs der Stellung, welche das vorliegende Werk zu früheren Publicationen von Hrn. Klein einnimmt, darf ich mich auf die Vorrede zu dessen „Vorlesungen über das Ikosaeder" beziehen, die vor sechs Jahren im gleichen Verlage erschienen sind. Daselbst ist nächst der Theorie des Ikosaeders als zweites Glied in der Reihe der in Aussicht genommenen grösseren Veröffentlichungen die Lehre von den elliptischen Modulfunctionen gekennzeichnet, und dieser würde sich, wofern der ganze Plan gelingt, künftig eine Darstellung der allgemeinen Untersuchungen über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich anzuschliessen haben, welche die Modulfunctionen, wie auch die Theorie der regulären Körper als besondere Fälle umfassen.

Was die Stellung der Modulfunctionen innerhalb der Gesamtentwicklung der modernen Mathematik angeht, so betrachtete man dieselben lange Zeit nur als ein Nebenerzeugnis der elliptischen Functionen, wo ihre Berücksichtigung insbesondere zum Behufe der Transformationstheorie von Belang war. Heutzutage hat sich demgegenüber die Lehre von den elliptischen Modulfunctionen, wie wir sehen werden, dank der epochemachenden Schöpfungen Riemann's und Galois', abgelöst von den doppeltperiodischen Functionen, zu einer selbständigen Theorie entwickelt, die nun ihrerseits als der natürlichste Eingang in die Transformationstheorie der elliptischen Functionen erscheint. Inzwischen ist es diese Beziehung zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen keineswegs allein, um deren willen die Modulfunctionen gegenwärtig im Vordergrunde des functionentheoretischen

Interesses stehen. Vielmehr ist die hohe Bedeutung, die wir der hier zu gebenden Theorie der elliptischen Modulfunctionen beilegen, wesentlich auch darin begründet, dass uns dieselbe mit den ersten ins einzelne zugänglichen Beispielen von transcendenten eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich versieht, Beispiele, bei denen bereits alle diejenigen Methoden und Gesichtspunkte zur Geltung kommen, die für die allgemeinere Theorie dieser letzteren Functionen von Wichtigkeit scheinen. Die weitere Erforschung dieser Functionen, deren Theorie durch die bezüglichen Arbeiten von Poincaré und Klein nur erst begonnen ist, dürfte eine der wichtigsten Aufgaben für die nächste Entwicklung der mathematischen Wissenschaft sein; dabei wird dann die durchgebildete Theorie der Modulfunctionen als Prototyp zu gelten haben.

Für sich selbst betrachtet, haben wir in der Theorie der Modulfunctionen eine mathematische Disciplin, die sich in hohem Masse durch Reichtum an Beziehungen zu anderen Zweigen der Mathematik auszeichnet, zur Zahlentheorie, zur Algebra, ja selbst zur synthetischen Geometrie; doch muss ich hierbei in Anbetracht alles Näheren auf die nachfolgende Darstellung selbst verweisen. Auch ist jedenfalls ausgeschlossen, dass ich bereits bei Gelegenheit dieser einleitenden Worte aller derjenigen Autoren gedenke, deren Untersuchungen mittelbar oder unmittelbar auf die Entwicklung der Theorie der Modulfunctionen von Einfluss gewesen sind. Ich muss auch in dieser Beziehung auf die spätere Darstellung verweisen, wo ich allenthalben bemüht gewesen bin, die Bezugnahme nicht nur auf die Klein'schen, sondern überhaupt auf die gerade in Betracht kommenden Originalarbeiten möglichst ausführlich zu gestalten. Ich begnüge mich hier vielmehr damit, die Entstehungsgeschichte des hier im ersten Bande vorliegenden Werkes zu kennzeichnen, wobei ich denn nur diejenigen Arbeiten namhaft zu machen habe, welche die historische Entwicklung in unmittelbare Beziehung zu demselben gesetzt hat.

Die Vorlesungen von Hrn. Klein hatten zum ersten Male in den Jahren 1877—79 die elliptischen Modulfunctionen zum Gegenstande während seiner Lehrthätigkeit in München. Die Resultate der damaligen Untersuchungen sind in erster Linie in den unter p. 142 des Textes genannten Abhandlungen Klein's aus dem Jahre 1878 veröffentlicht worden, sodann aber auch namentlich in der p. 186 ausführlich citierten Note *„Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen"* (1879). Im letzteren Aufsatze kommen bereits in gedrängter Kürze alle wichtigen Gesichtspunkte zur Skizzierung, welche das Fundament des vorliegenden ersten Bandes geworden sind.

In der angegebenen Zeit wurde Hr. Klein bei der Durchführung seiner Untersuchungen sehr wesentlich durch seine damaligen Schüler, die Herren Dyck, Gierster und Hurwitz, unterstützt, deren bezügliche Arbeiten ich weiter unten (zum Teil erst im zweiten Bande) anzugeben habe. Unter denselben wandte sich Hr. Dyck in erster Linie den gruppentheoretischen Problemen zu, die er mit den Hülfsmitteln geometrischer Anschauungen und Massnahmen der Untersuchung unterwarf. Hrn. Gierster's erste grössere Arbeiten bezogen sich demgegenüber auf die arithmetische Seite dieser gruppentheoretischen Probleme, während sich derselbe weiterhin den schwierigen, die Classenzahlrelationen betreffenden zahlentheoretischen Untersuchungen zuwandte, auf welche ich im zweiten Bande hoffe zurückkommen zu können. Die Untersuchungen des Hrn. Hurwitz nahmen gleich zu Anfang einen umfassenderen Standpunkt ein, insofern sie gleichmässig die gruppentheoretischen wie functionentheoretischen Gesichtspunkte in Betracht zogen. Im weiteren aber erstreckten sich die Arbeiten von Hrn. Hurwitz auf diejenigen zahlentheoretischen Anwendungen der Modulfunctionen, denen sich bereits Hr. Gierster mit grossem Erfolge gewidmet hatte. Es ist zu betonen, dass gerade in diesem Gebiete für Hrn. Hurwitz die in den Vorlesungen des Hrn. Klein und im persönlichen Verkehr mit ihm gewonnenen Anregungen die Quelle zu einer glänzenden Reihe von Veröffentlichungen durchaus originalen Gepräges geworden sind.

Unter den Leipziger Vorlesungen Klein's nahm diejenige über elliptische Functionen im Wintersemester 1883/84, sowie in dem darauf folgenden Sommersemester in ausgiebiger Weise auf die Theorie der Modulfunctionen Bezug. Es wurden dabei aber nicht so sehr die im vorliegenden Bande zur Darstellung kommenden Grundlagen der Theorie der Modulfunctionen berücksichtigt, als vielmehr die Anwendungen, welche die Modulfunctionen auf die Transformationstheorie der elliptischen Functionen gestattet. Solches gelangt denn auch in der jener Periode entstammenden (p. 568 ausführlich citierten) Arbeit Klein's über die elliptischen Normalcurven zum Ausdruck; und ebenfalls beherrscht diese Tendenz die zahlreichen (im zweiten Bande zu nennenden) Arbeiten der damaligen Schüler Klein's, denen auch der Unterzeichnete angehörte.

Alsbald nach Abschluss dieser Leipziger Periode glaubte Hr. Klein an die Ausführung seines Planes gehen zu können, den „Vorlesungen über das Ikosaeder" die bereits in der Vorrede zu demselben in Aussicht gestellten „Vorlesungen über die Theorie der Modulfunctionen" folgen zu lassen; und in diesem Sinne zog derselbe auch gelegentlich

seiner ersten Göttinger Vorlesungen in den Jahren 1886, 87 wiederholt die Modulfunctionen in Betracht. Aber der in Fülle daliegende Stoff erwies sich einstweilen noch viel zu wenig durchgebildet und gesichtet, die Umwandlung desselben zu einem geordneten Ganzen verlangte viel zu sehr einseitige Concentration, als dass Hr. Klein bei seiner ausgedehnten Lehrthätigkeit und bei seinen rastlos vorwärts strebenden Forschungen hierzu die Zeit hätte erübrigen können.

So wandte sich Hr. Klein im Herbst 1887 an den Unterzeichneten mit der Aufforderung, das Geplante zur Wirklichkeit zu gestalten. Ich hatte mich bereits im Sommer 1887 wiederholt mit der Absicht getragen, bei Hrn. Klein einen hierauf bezüglichen Vorschlag zu machen, und kam jetzt der geschehenen Aufforderung um so unbedenklicher nach, als ich ja der kräftigsten Unterstützung meines hochverehrten Lehrers sicher sein durfte. Wenn ich übrigens auch bei der nun folgenden Entwicklungsphase des vorliegenden Werkes mit Ausführlichkeit verweile, so fühle ich mich dazu um so mehr berechtigt, als es für mich eine nahezu dreijährige ununterbrochene Arbeit gekostet hat, um aus den mir zur Verfügung stehenden Hülfsmitteln diesen ersten Band zu gestalten.

Es galt für mich zuvörderst, eine geordnete Disposition des gesamten Stoffes zu gewinnen; ich muss in diesem Betracht wieder auf die Darstellung selbst verweisen und füge sogleich hinzu, dass ich mich über die Disposition für den zweiten Band, welcher die „Weiterführung und Anwendung der Theorie" bringen soll, in dem vorletzten Paragraphen des gegenwärtigen Bandes ausgesprochen habe. — Etwas gründlicher muss ich mich über die Methode aussprechen, die ich bei der Gedankenentwicklung innerhalb der einzelnen Kapitel befolgte. Ich wiederhole vorab, dass mir alle principiellen Gesichtspunkte und Methoden durch die Vorlesungen und Abhandlungen Klein's gegeben waren; aber zur directen Darstellung schienen dieselben nur in sehr ungleichem Grade geeignet und gaben mir vielfach mehr nur die Directive, nach welcher ich meine Darstellung einzurichten hatte. Um hier deutlich zu werden, sei es gestattet ein Beispiel herauszugreifen. Ich gedenke vielleicht des zweiten Kapitels im ersten Abschnitt, welches von den Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung handelt, ein Gegenstand, der eine ganze Reihe verschiedenartiger Darstellungen auch in der älteren Litteratur gefunden hat. Dass ich hier durchaus mit Riemann'schen Methoden zu operieren hatte, war ja von vornherein gegeben. Aber auch so boten sich mir noch mehrere mögliche Wege: Erstlich konnte ich das ganze Kapitel auf rein anschauliche Betrachtungen der zweiblättrigen Riemann'schen

Fläche mit vier Verzweigungspunkten basieren und die Veränderungen der Invariante J durch Lagenänderungen der Verzweigungspunkte bewirken. Aber eine solche Darstellung des Kapitels, die ich anfangs versuchte, genügte mir späterhin nicht mehr; sie wäre auch, wofern sie das Wesentliche hätte treffen wollen, zu umfänglich geworden. Ich konnte andrerseits an die Differentialgleichung zweiter Ordnung anknüpfen und durch ausschliessliches Operieren mit der Riemann'schen P-Function vorwärts kommen. Aber dieser Weg erschien mir alsbald zu einseitig analytisch und eben darum zu wenig anschaulich; und so glaubte ich schliesslich einen Mittelweg einschlagen zu sollen, wobei mir übrigens das dritte Kapitel im ersten Abschnitt der Vorlesungen über das Ikosaeder durchaus zum Vorbild diente. Ich würde ermüden, wollte ich hier noch weitere derartige Einzelausführungen anfügen. Genug, dass ich allenthalben bestrebt war, mir die Resultate der verschiedenen, jedesmal in Betracht kommenden Abhandlungen zu einem Gesamtbilde zu verschmelzen, um alsdann das letztere in einer Art darzustellen, die mir gerade gut schien; nur auf diesem Wege glaubte ich erreichen zu können, dass meine Arbeit ein einheitliches Ganze vorstellt. — Dass ich übrigens im Verlaufe der Darstellung zahlreiche Lücken durch selbständige Untersuchungen ausfüllen musste, dass ich endlich für die rein redactionelle Thätigkeit die alleinige Verantwortung tragen muss, brauche ich nur nebenher zu bemerken. Im ersteren Betracht habe ich übrigens von mir herrührende Untersuchungen als solche stets durch ausdrückliche Citate gekennzeichnet.

Für die Einzeldarstellung habe ich allenthalben die auch in den Vorlesungen über das Ikosaeder massgeblich gewesene Tendenz aufrecht zu erhalten gesucht, beim Leser keinerlei specifische Vorkenntnisse als bekannt vorauszusetzen. Das hatte ja freilich mancherlei Inconvenienzen im Gefolge: ich musste vielfach weiter ausholen, unter Zurückdrängung des eigentlichen Zieles der Untersuchung; wiederholt musste Verzicht darauf geleistet werden, das einfachste Bild eines Gegenstandes zu geben, wenn ein anderes elementarer schien u. s. w. Auch die grosse Ausführlichkeit der Darstellung und der inductive Gang der Entwicklung vom Speciellen zum Allgemeinen wurde fast überall um der leichteren Verständlichkeit willen innegehalten.

Bei meinen gesamten Arbeiten hat mich Hr. Professor Klein in der thatkräftigsten Weise unterstützt; er hat meine Pläne und Ausarbeitungen durchweg der eingehendsten Durchsicht unterzogen, dieselben mit mir besprochen und mich auf mangelhafte Stellen aufmerksam gemacht; er hat endlich die gesamten Correcturen der Druckbogen im Verein mit mir erledigt. Hätte ich schon ohne eine solche

Unterstützung z. B. die Anfangskapitel des dritten Abschnitts überhaupt nicht abfassen können, so sind mir meine wiederholten Reisen nach Göttingen in rein ideeller Beziehung noch ungleich wertvoller geworden: stets habe ich mir in der That aus der geistvollen Unterhaltung und Vortragsweise meines hochverehrten Lehrers neue Kraft und neue Begeisterung zum Vorwärtsarbeiten heimgebracht. — Habe ich mich solcherweise der vollen Teilnahme des Hrn. Klein zu erfreuen gehabt, so darf ich nun auch auf der anderen Seite in seinem Namen hier anführen, dass er das vorliegende Werk als die gelungene Ausführung des lange gehegten Planes anerkennt.

Dem Herrn Verleger bin ich in besonderer Weise zu Danke verpflichtet sowohl wegen der Bereitwilligkeit, mit der er während der Drucklegung auf alle darauf bezüglichen Wünsche einging, als auch der würdigen Ausstattung halber, die er dem Buche gegeben. — Was endlich den zweiten Band anlangt, so hoffe ich denselben in $1\frac{1}{2}$ bis 2 Jahren nachfolgen lassen zu können.

Braunschweig, den 12ten August 1890.

Robert Fricke.

Inhalts-Verzeichnis.

Erster Abschnitt.

Einführung in das Studium der elliptischen Modulfunctionen.

Erstes Kapitel.

Von den Invarianten der biquadratischen binären Form.

Seite

§ 1. Die Form $f(z_1, z_2)$ und ihre irrationalen Invarianten 3
§ 2. Die irrationalen Invarianten A, B, C 4
§ 3. Verhalten der A, B, C bei Änderung der Factorenfolge von f 6
§ 4. Äquivalenz zweier Formen bei ungeänderter Factorenfolge. Erste kanonische Form von f 7
§ 5. Von der Aquivalenz einer Form f mit sich selbst 9
§ 6. Von der Äquivalenz zweier Formen bei beliebiger Factorenfolge . . . 11
§ 7. Die rationalen Invarianten der Form f 12
§ 8. Die rationalen Invarianten in expliciter Form 13
§ 9. Die Invarianten g_2, g_3 und die absolute Invariante J 15
§ 10. Die zweite kanonische Form von f 16
§ 11. Geometrisches über die zweite kanonische Form 17
§ 12. Die dritte kanonische Form von f 18
§ 13. Weiteres über die dritte kanonische Form. Anschluss an die Theorie der regulären Körper 20
§ 14. Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung 22
§ 15. Benennung der Normalformen. Geschichtliches 24

Zweites Kapitel.

Von den Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung.

§ 1. Paare primitiver Perioden des Integrals erster Gattung 27
§ 2. Die Perioden als Invarianten. Abhängigkeit von den rationalen Invarianten. Normierung der Perioden 30
§ 3. Aufstellung der Differentialgleichung für die normierten Perioden . . 33
§ 4. Fundamentalsätze über die Abhängigkeit der normierten Perioden von J 35
§ 5. Auswahl eines besonderen primitiven Periodenpaares 37
§ 6. Zerschneidung der J-Ebene. Bedeutung der Festsetzungen des vorigen Paragraphen 39

Seite

§ 7. Ansatz für die Umgebung eines singulären Punktes 41
§ 8. Vorläufige Bestimmung der Zahlen k_1, k_2 43
§ 9. Durchführung der Untersuchung für den singulären Punkt $J = 0$ . . 45
§ 10. Durchführung der Untersuchung für den singulären Punkt $J = 1$. . 48
§ 11. Bestimmungen für die Umgebung von $J = \infty$ und zugehörige Berechnung von Ω_2 50
§ 12. Berechnung des Grenzwertes von Ω_1 für $J = \infty$ 51
§ 13. Erledigung des singulären Punktes $J = \infty$. Historische Bemerkungen 55
§ 14. Verzweigung der Perioden ω_1, ω_2 über der J-Ebene 57
§ 15. Der Periodenquotient ω als Function von J 59
§ 16. Differentialgleichung dritter Ordnung für $\omega(J)$. Die s-Functionen. . 62

Drittes Kapitel.

Über gewisse conforme Abbildungen und die aus ihnen entspringenden Dreiecksfunctionen.

§ 1. Ersatz vorkommender Riemann'scher Flächen durch einfachere Figuren 65
§ 2. Figur zur Darstellung des Zusammenhanges zwischen λ und J. . . . 69
§ 3. Übertragung der λ-Ebene auf die Kugeloberfläche 71
§ 4. Rückbeziehung auf das zweite Kapitel 73
§ 5. Figuren zur Erläuterung des Zusammenhanges zwischen μ und J . . 74
§ 6. Von der Beziehung eines Kreisbogendreiecks auf die Halbebene von J . 76
§ 7. Beziehung von λ zu μ durch Figuren erläutert 80
§ 8. Die Kreisverwandtschaft. Sätze über Kreisbogendreiecke 82
§ 9. Von der Symmetrie bezüglich eines Kreises 85
§ 10. Das Symmetriegesetz. Directe und indirecte Kreisverwandtschaft . . 88
§ 11. Bedeutung des Symmetriegesetzes für die Function $\mu(J)$ 90
§ 12. Allgemeine Erörterung der functionentheoretischen Bedeutung des Symmetriegesetzes 92
§ 13. Begriffsbestimmung und Fundamentaleigenschaften der Dreiecks- oder s-Functionen 93
§ 14. Reihenentwicklungen für einen Zweig der s-Function 94
§ 15. Differentialgleichung dritter Ordnung für die s-Function 96
§ 16. Zusammenstellung früher bereits vorgekommener s-Functionen . . . 98
§ 17. Arteinteilung der Dreiecksfunctionen 102
§ 18. Die s-Functionen erster Art 103
§ 19. Die s-Functionen zweiter Art. 106
§ 20. Die s-Functionen dritter Art 108
§ 21. Die zu $\omega(\lambda)$ und $\omega(J)$ gehörigen Dreiecksfiguren 110

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Begriffsbestimmungen und Grundprobleme einer Theorie der elliptischen Modulfunctionen.

§ 1. Die Legendre'sche Relation. 116
§ 2. Die rationalen Invarianten g_2, g_3, Δ als Functionen der Perioden ω_1, ω_2 117
§ 3. Functionaldeterminanten der Formen g_2, g_3, Δ. 118
§ 4. Die Perioden des Integrals zweiter Gattung als Functionen von ω_1, ω_2 121
§ 5. Berechnung der Hesse'schen Determinante $H(\log \Delta)$ 122

Seite

§ 6. Abbildungen, durch $\omega(J)$ und $\xi(J)$ vermittelt. Ikosaeder- und Modulgleichung 124
§ 7. Formentheoretischer Vergleich der Ikosaeder- und der Modulgleichung 125
§ 8. Weiterer Vergleich der Ikosaeder- und Modulformen 127
§ 9. Analogie in der functionentheoretischen Behandlung der beiderseitigen Formenprobleme 130
§ 10. Über algebraische Gleichungen mit einem variabelen Parameter . . . 131
§ 11. Übertragung algebraischer Begriffe auf transcendente Gleichungen . . 133
§ 12. Gruppentheoretischer Vergleich der Ikosaeder- und Modulgleichung . 135
§ 13. Formulierung der allgemeinen Fundamentalaufgabe 137
§ 14. Das gruppentheoretische Grundproblem 139
§ 15. Das functionentheoretische Grundproblem 141
§ 16. Die elliptischen Modulformen 143

Fünftes Kapitel.

Analytische Darstellungen für doppeltperiodische Functionen und Modulformen.

§ 1. Abweichungen in der Bezeichnungsweise 145
§ 2. Die Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$. Doppeltperiodische Functionen . . . 147
§ 3. Analytische Darstellungen für die Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ 149
§ 4. Doppelt unendliche Reihen für g_2 und g_3 151
§ 5. Einfach unendliche Reihen für g_2, g_3 und die Perioden η_1, η_2 152
§ 6. Productdarstellung der Discriminante Δ. Die Modulgleichung in expliciter Form 153
§ 7. Die Function $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$ 155
§ 8. Productdarstellung der σ-Function 156
§ 9. Darstellung doppeltperiodischer Functionen durch $\sigma(u)$ 157
§ 10. Die Functionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2)$ 158
§ 11. Übergang zu den ϑ-Functionen 159

Zweiter Abschnitt.

Behandlung des gruppentheoretischen Grundproblems.

Erstes Kapitel.

Von den linearen Substitutionen einer Variabelen und ihrer geometrischen Deutung.

§ 1. Arteinteilung der linearen Substitutionen einer Veränderlichen . . . 163
§ 2. Geometrische Deutung der Substitutionen mit getrennt liegenden Fixpunkten für besondere Lage der letzteren 165
§ 3. Projection der erhaltenen Figuren auf die Kugeloberfläche 169
§ 4. Bahncurven und Niveaulinien bei allgemeiner Lage der Fixpunkte . 170

Seite

§ 5. Erledigung der parabolischen Substitutionen 172
§ 6. Über die bei den s-Functionen erster und zweiter Art auftretenden Substitutionen 175
§ 7. Die Substitutionen der s-Function $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}; J\right)$ 177
§ 8. Die Arten der Modulsubstitutionen, aus der Modulteilung entnommen 179
§ 9. Eine vorläufige arithmetische Betrachtung der Modulsubstitutionen . 181
§ 10. Die Begriffe der Äquivalenz und des Fundamentalbereichs für eine Gruppe linearer Substitutionen 183
§ 11. Gestalt des Fundamentalbereiches einer cyclischen Gruppe im hyperbolischen und parabolischen Falle. 186
§ 12. Fortsetzung: Fall einer elliptischen Substitution V. Willkür der Gestalt des Fundamentalbereiches einer cyclischen Gruppe 189
§ 13. Besondere Ausführungen für die elliptischen Modulsubstitutionen . . 192
§ 14. Festsetzungen für die parabolischen und hyperbolischen Modulsubstitutionen. 194
§ 15. Von den Substitutionen einer Veränderlichen z, welche indirecte Kreisverwandtschaften bedeuten 196
§ 16. Erweiterung einer cyclischen Gruppe nicht-loxodromischer Substitutionen erster Art durch zugehörige Spiegelungen 200
§ 17. Fundamentalbereiche für die zuletzt betrachteten erweiterten Gruppen 203

Zweites Kapitel.

Von der Modulgruppe und der ihr entsprechenden Teilung der ω-Halbebene.

§ 1. Vorläufige Angaben über den Fundamentalbereich der Modulgruppe . 208
§ 2. Näheres über den Fundamentalbereich. Negativer Teil des Nachweises. 211
§ 3. Fortsetzung: Positiver Teil des Nachweises 212
§ 4. Einfach und mehrfach äquivalente Punkte. 216
§ 5. Die Substitutionen S und T als Erzeugende der Modulgruppe. . . . 218
§ 6. Überdeckung der ω-Halbebene mit äquivalenten Kreisbogendreiecken der Winkel $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$ 220
§ 7. Erweiterung der Modulgruppe durch Spiegelungen 223
§ 8. Der Fundamentalbereich der erweiterten Modulgruppe 227
§ 9. Vergleich der Fundamentalbereiche der ursprünglichen und erweiterten Modulgruppe 230
§ 10. Die erzeugenden Operationen der erweiterten Modulgruppe 232
§ 11. Transformation der Modulteilung in sich. Die rationalen reellen Punkte 234
§ 12. Projection der Modulteilung in eine geradlinige Dreiecksfigur 239

Seite

Drittes Kapitel.

Von den ganzzahligen binären quadratischen Formen und der Gleichberechtigung der Modulsubstitutionen.

§ 1. Benennung der quadratischen Formen 243
§ 2. Von der Äquivalenz der quadratischen Formen 244
§ 3. Repräsentation und Reduction der Formen negativer Determinante . . 246
§ 4. Zahl der Substitutionen, welche die Äquivalenz zweier Formen negativer Determinante vermitteln 247
§ 5. Kennzeichen reducierter Formen. Endlichkeit der Classenanzahl . . . 248
§ 6. Repräsentation der Formen positiver Determinante 250
§ 7. Ansatz zur Transformation einer Form positiver Determinante in sich 252
§ 8. Bericht über die Pell'sche Gleichung 253
§ 9. Herstellung aller Substitutionen, die eine Form positiver Determinante in sich transformieren 255
§ 10. Lage des eine Form positiver Determinante repräsentierenden Halbkreises in der ω-Halbebene 256
§ 11. Von den reducierten Formen und ihren Perioden. Erledigung des Äquivalenzproblems 258
§ 12. Kennzeichen reducierter Formen. Endlichkeit der Classenanzahl . . . 259
§ 13. Existenzbeweis für die kleinste positive Lösung der Pell'schen Gleichung 260
§ 14. Transformation der Modulsubstitutionen 261
§ 15. Gleichberechtigung im elliptischen und parabolischen Falle 263
§ 16. Gleichberechtigung hyperbolischer Substitutionen 265
§ 17. Gleichberechtigung der cyclischen Untergruppen der Modulgruppe . . 268

Viertes Kapitel.

Besprechung einer besonderen in der Modulgruppe enthaltenen Untergruppe.

§ 1. Definition der Untergruppen Γ' und $\overline{\Gamma}'$ 270
§ 2. Der Fundamentalbereich für $\overline{\Gamma}'$ 272
§ 3. Die Erzeugenden von $\overline{\Gamma}'$ und Γ' 275
§ 4. Der einfachste Fundamentalbereich für Γ' 276
§ 5. Ansatz zur Rückbeziehung der Untergruppe Γ' auf die Gesamtgruppe Γ 278
§ 6. Repräsentantensystem und Index für die Untergruppe Γ'. Bezeichnung Γ_6 statt Γ' 282
§ 7. Die Γ_6 als ausgezeichnete Untergruppe 284
§ 8. Endliche Gruppe G_6, der Γ_6 entsprechend. Die Γ_2 und die drei gleichberechtigten Γ_3 285
§ 9. Die Fundamentalbereiche F_3 der gleichberechtigten Γ_3 289
§ 10. Erneute Betrachtung des Fundamentalbereichs F_6 der Untergruppe Γ_6 292
§ 11. Zusammenlegung des Fundamentalbereichs F_6 zur diedrisch geteilten Kugel. Beziehung der Diederteilung auf die Modulteilung 294
§ 12. Deutung der Gruppe G_6 an der diedrisch geteilten Kugel. Regularität des Fundamentalbereichs F_6 297

Seite

§ 13. Zusammenbiegung der Fundamentalbereiche F_3 zu einfach bedeckten Ebenen. Irregularität der F_3 299
§ 14. Die Symmetrie der Bereiche F_3. Der regulär-symmetrische Bereich F_6 303
§ 15. Vorläufige Bemerkungen über die functionentheoretische Bedeutung der Untergruppe Γ_6 305

Fünftes Kapitel.

Allgemeiner Ansatz für die Behandlung der Untergruppen der Modulgruppe.

§ 1. Index und Repräsentantensystem einer gegebenen Untergruppe Γ_μ . . 308
§ 2. Fundamentalbereich F_μ für die vorliegende Untergruppe Γ_μ. 310
§ 3. Überdeckung der ω-Halbebene mit Polygonen, die der Untergruppe Γ_μ entsprechen. Erzeugung der Γ_μ. 314
§ 4. Transformation von Untergruppen. Gleichberechtigte und ausgezeichnete Untergruppen. 315
§ 5. Von den Fundamentalpolygonen gleichberechtigter und ausgezeichneter Untergruppen 318
§ 6. Von den endlichen Gruppen G_μ und $G_{2\mu}$, welche einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ entsprechen 320
§ 7. Allgemeine Gesichtspunkte für die Zerlegung der Gruppen G_μ in ihre Untergruppen 322
§ 8. Bedeutung des vorigen Paragraphen für das gruppentheoretische Grundproblem. Planmässige Erledigung des letzteren 325
§ 9. Zusammenbiegung des Fundamentalbereichs einer Untergruppe Γ_μ zur geschlossenen Fläche. Geschlecht p einer Untergruppe Γ_μ 328
§ 10. Besondere Ausführungen für die ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ. Regularität und Symmetrie der zugehörigen Flächen F_μ. 333
§ 11. Teilweise Regularität oder Symmetrie der Flächen F_μ bei relativ ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ 337
§ 12. Berechnung des Geschlechts p einer Untergruppe. Diophantische Gleichung für ausgezeichnete Untergruppen 339

Sechstes Kapitel.

Definition sämtlicher Untergruppen der Modulgruppe durch die Flächen F_μ.

§ 1. Methode, durch Flächen F_μ Untergruppen zu definieren: Der Verzweigungssatz 344
§ 2. Beziehung der geteilten Fläche F_μ auf die ω-Halbebene 346
§ 3. Ausbreitung der Fläche F_μ in die ω-Halbebene. Beweis des Verzweigungssatzes 349
§ 4. Die Kugelnetze der regulären Körper und die ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ vom Geschlechte $p = 0$ 353

Seite

§ 5. Die den Functionen $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J\right)$ entsprechenden Untergruppen $\Gamma_{\{n\}}$ 356
§ 6. Bedeutung der $\Gamma_{\{n\}}$. Classeneinteilung der Untergruppen 360
§ 7. Besprechung einer ausgezeichneten Γ_{72} der sechsten Classe 364
§ 8. Definition einer ausgezeichneten Γ_{168} der siebenten Classe. 369
§ 9. Die endliche Gruppe G_{168}. Untergruppen G_7 und G_{21} der G_{168}. . . 374
§ 10. Die 28 Symmetrielinien der F_{168}. Untergruppen G_3 und G_6 der G_{168} 376
§ 11. Die 21 kürzesten Linien der F_{168}. Untergruppen G_8, G_4, G_2 der G_{168} 379
§ 12. Die Vierergruppen G_4 und die Oktaedergruppen G_{24} in der G_{168} . . 382

Siebentes Kapitel.

Von den in der Modulgruppe enthaltenen Congruenzgruppen der n^{ten} Stufe.

§ 1. Die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe 387
§ 2. Die Modulsubstitutionen mod. n betrachtet. Die zur $\Gamma_{\mu(n)}$ gehörende Gruppe $G_{\mu(n)}$ 389
§ 3. Die homogenen Substitutionen und ihre Gruppen. 392
§ 4. Berechnung des Index $\mu(n)$ der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe . . 395
§ 5. Die Hauptcongruenzgruppen des vorigen Kapitels 397
§ 6. Allgemeines über Congruenzgruppen n^{ter} Stufe 399
§ 7. Über ein wichtiges Princip der Gruppentheorie. 402
§ 8. Erläuterung dieses Princips durch die G_{72} der 6ten Stufe 406
§ 9. Reduction des Problems der Zerlegung der Gruppen $G_{\mu(n)}$. Historisches 409
§ 10. Das Verzweigungsschema ausgezeichneter Congruenzgruppen 412
§ 11. Congruenzcharakter der Untergruppen n^{ter} Classe. Tragweite der Congruenzgruppen 416

Achtes Kapitel.

Die cyclischen Untergruppen in den zur Primzahlstufe q gehörenden Gruppen $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, $G_{q(q^2-1)}$ und $\overline{G}_{q(q^2-1)}$.

§ 1. Die Galois'schen imaginären Zahlen 420
§ 2. Imaginäre Gestalt der Gruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ 424
§ 3. Die cyclischen Untergruppen G_q der Ordnung q 427
§ 4. Die cyclischen Untergruppen $G_{\frac{q-1}{2}}$ der Ordnung $\frac{q-1}{2}$ 428
§ 5. Die cyclischen Untergruppen $G_{\frac{q+1}{2}}$ der Ordnung $\frac{q+1}{2}$ 432
§ 6. Gesamtheit der cyclischen Untergruppen. Bezugnahme auf die Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ 434
§ 7. Die cyclischen Untergruppen der homogenen $G_{q(q^2-1)}$ 438
§ 8. Cyclische Untergruppen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ für den Fall $q = 4h + 1$ . . . 440

Seite

§ 9. Cyclische Untergruppen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ für den Fall $q = 4h - 1$ . . . 445

§ 10. Die symmetrischen Umformungen der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in sich . . . 446

Neuntes Kapitel.

Aufzählung aller nicht-cyclischen Untergruppen der zur Primzahlstufe q gehörenden Gruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

§ 1. Von den erzeugenden Substitutionen der zu einer beliebigen Zahl n gehörenden Gruppe $G_{\{n\}}$ 452

§ 2. Der Dyck'sche Satz über die Erzeugung der mit $G_{\{n\}}$ holoedrisch isomorphen Gruppen 455

§ 3. Untergruppen, an denen sich eine cyclische G_q beteiligt 457

§ 4. Die halbmetacyclischen Untergruppen bei beliebiger Stufenzahl n . . 460

§ 5. Zerlegung der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in $\frac{q-1}{2}$ Polygonkränze 462

§ 6. Die Untergruppen vom Diedertypus 465

§ 7. Zusammensetzung der Polygonkränze zur Fläche 468

§ 8. Die Untergruppen vom Vierertypus 471

§ 9. Die Untergruppen vom Tetraeder- und Oktaedertypus 476

§ 10. Aufstellung und Abzählung der Untergruppen vom Ikosaedertypus . 479

§ 11. Bedingungsgleichungen für die Ordnung einer Untergruppe von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ 483

§ 12. Beweis für die Vollständigkeit der gegebenen Zerlegung von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ 485

§ 13. Einfachheit der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$. Der Galois'sche Satz. Schlussbemerkungen. 488

Dritter Abschnitt.

Behandlung des functionentheoretischen Grundproblems.

Erstes Kapitel.

Grundlegung von Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.

§ 1. Die mehrblättrige Riemann'sche Fläche F_n über einer Ebene 493

§ 2. Die algebraischen Functionen der betrachteten Fläche F_n 496

§ 3. Die Integrale der Fläche F_n 500

§ 4. Die Potentiale der Fläche F_n 504

§ 5. Formulierung des Existenztheorems bei beliebig gegebener Fläche F_n. Plan des Beweises 508

§ 6. Lösung der Randwertaufgabe für kreisförmige Bereiche 512

§ 7. Beschreibung der Combinationsmethode in einem speciellen Falle . . 514

§ 8. Herstellung der Potentiale dritter und erster Gattung 518

Seite

§ 9. Hülfssätze über Potentiale und Integrale erster Gattung 523
§ 10. Die $2p$ Potentiale und die p Integrale erster Gattung der F_n 525
§ 11. Die p Normalintegrale erster Gattung der F_n 528
§ 12. Die Integrale, insbesondere Normalintegrale 2ter Gattung der F_n . . 530

Zweites Kapitel.

Weiterführung von Riemann's Theorie der algebraischen Functionen.

§ 1. Die algebraischen Functionen auf einer F_n des Geschlechtes $p = 0$. 533
§ 2. Die algebraischen Functionen auf einer F_n des Geschlechtes $p = 1$. 536
§ 3. Die algebraischen Functionen auf einer F_n beliebigen Geschlechtes . 540
§ 4. Die Functionen φ auf einer F_n von höherem Geschlechte 543
§ 5. Der Riemann-Roch'sche Satz 546
§ 6. Ausdehnung des Riemann-Roch'schen Satzes auf $p = 0$ und $p = 1$. Eine besondere Anwendung desselben bei $p > 1$ 549
§ 7. Der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz. Die Specialfunctionen . . . 551
§ 8. Einführung der Sprechweise der analytischen Geometrie 556
§ 9. Die Curven des Raumes R_ν von ν Dimensionen 558
§ 10. Die äquivalenten Punktsysteme. Homogene Coordinaten. Die projective Auffassung 561
§ 11. Von den Normalcurven C_m 564
§ 12. Die rationalen und die elliptischen Normalcurven insbesondere . . . 566
§ 13. Die Fälle $p > 1$: Die Normalcurve der φ 569
§ 14. Die Fälle $p > 1$: Der hyperelliptische Fall 571

Drittes Kapitel.

Allgemeine Auflösung des functionentheoretischen Grundproblems.

§ 1. Umwandlung der Polygone bez. der geschlossenen Flächen F_μ in Riemann'sche Flächen 574
§ 2. Die Functionen $\omega(J)$ und $s(J)$ auf der Riemann'schen Fläche F_μ . . 577
§ 3. Die Functionen der $F_\mu^{(J)}$ in Abhängigkeit von ω betrachtet 582
§ 4. Charakter der $s(\omega)$, $j(\omega)$ als der für die Γ_μ gesuchten Modulfunctionen 585
§ 5. Die vollen Modulsysteme der Γ_μ und die zugehörigen Resolventen der Modulgleichung 589
§ 6. Allgemeine Erörterung über die symmetrischen Untergruppen 593
§ 7. Hauptmoduln und Modulsysteme symmetrischer Untergruppen 595
§ 8. Die Moduln gleichberechtigter und ausgezeichneter Untergruppen . . 599
§ 9. Besondere Ausführungen über die ausgezeichneten Untergruppen. . . 602
§ 10. Die Galois'schen Probleme und ihre Resolventen 607

Viertes Kapitel.

Die zu den ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechtes $p = 0$ gehörenden Modulfunctionen.

§ 1. Erledigung der Stufen 1—5. Fixierung der Galois'schen Hauptmoduln 612
§ 2. Einführung der zu den Galois'schen Hauptmoduln gehörenden Modulformen 615

Seite

§ 3. Endgültige Fixierung der Modulformen λ_1, λ_2 u. s. w. 618
§ 4. Beziehungen von g_2, g_3 zu den λ_1, λ_2 etc. Die Formenprobleme . . 620
§ 5. Die eindeutigen Modulformen $\sqrt[3]{\Delta}$, $\sqrt[4]{\Delta}$ und $\sqrt[12]{\Delta}$ 623
§ 6. Die zu den λ_1, λ_2 etc. gehörenden homogenen Gruppen 628
§ 7. Die sechs Gruppen Γ_6 der fünften Stufe und die zugehörige F_6 . . . 634
§ 8. Aufstellung der Resolvente sechsten Grades 636
§ 9. Näheres über die Resolvente sechsten Grades. 641
§ 10. Das Modulsystem der A_γ. Affect der Resolvente sechsten Grades . . 643
§ 11. Die fünf Gruppen Γ_5 der fünften Stufe und die zugehörige F_5 . . . 646
§ 12. Aufstellung der Resolvente fünften Grades. 648

Fünftes Kapitel.

Über Modulfunctionen, die sich aus den Galois'schen Hauptmoduln herstellen lassen.

§ 1. Die hyperelliptischen Fälle Γ_{48} und Γ_{120} 651
§ 2. Die eindeutigen Modulfunctionen $\sqrt[n]{\lambda}$, $\sqrt[n]{1-\lambda}$ etc. 656
§ 3. Die unter den Grössen $\sqrt[n]{\lambda}$ etc. enthaltenen Congruenzmoduln 659
§ 4. Besondere Untersuchung der Congruenzmoduln $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$. 663
§ 5. Verhalten von φ, ψ, χ gegenüber beliebigen Modulsubstitutionen . . 667
§ 6. Zusammenstellung weiterer Congruenzmoduln 670
§ 7. Galois'sche Systeme der Stufen 6, 8, 9, 16 676
§ 8. Aufstellung einiger Congruenzgruppen sechster Stufe 679
§ 9. Die Congruenzmoduln sechster Stufe $x(\omega)$ und $y(\omega)$ 682
§ 10. Die 72 Transformationen der C_6 in sich. Geometrische Sätze. . . . 686
§ 11. Die Moduln $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$, $\sqrt{\xi^3-1}$. Die ausgezeichnete Γ_6. 688

Sechstes Kapitel.

Die Modulsysteme z_α und A_γ der siebenten Stufe.

§ 1. Einführung der Modulformen z_α und der Curve C_4 692
§ 2. Geometrische Bedeutung der Punkte a, b, c auf der C_4 695
§ 3. Die acht Wendedreiecke und die acht G_{21}. Auswahl besonderer z_α. 697
§ 4. Aufstellung der Gleichung der C_4. Der reelle Curvenzug 701
§ 5. Die 168 ternären Substitutionen. Zusätzliche Bemerkungen 703
§ 6. Die Collineationen der Perioden 2 und 3 in der G_{168}. 706
§ 7. Die Collineationsgruppen G_6, G_4 und G_{24} in der G_{168} 710
§ 8. Die drei Arten von Kegelschnitten durch acht Punkte b 713
§ 9. Die Berührungs-C_3 der C_4 und deren ausgezeichnetes System 716
§ 10. Einführung des Modulsystems der A_γ 719
§ 11. Beziehungen zwischen $\sqrt{\delta_\gamma}$ und A_γ. Das Substitutionssystem der A_γ 722
§ 12. Die Raumcurve sechster Ordnung der A_γ 726
§ 13. Die C_6 der A_γ als Kegelspitzencurve eines Bündels von Flächen zweiter Ordnung 728

Siebentes Kapitel.

Das Galois'sche Problem 168ten Grades und seine Resolventen 8ten und 7ten Grades. — Schlussbemerkungen.

Seite

§ 1. Die drei Covarianten der ternären biquadratischen Form $f(z_\alpha)$ . . . 732
§ 2. Die Φ, Ψ, X als Modulformen erster Stufe. Das Problem 168ten Grades 735
§ 3. Das Problem der A_γ. Erwähnung der erweiterten Probleme 737
§ 4. Functionentheoretische Aufstellung der Resolventen achten Grades. . 741
§ 5. Die formentheoretischen Resolventen achten Grades 746
§ 6. Die beiden functionentheoretischen Resolventen siebenten Grades . . 749
§ 7. Darstellung der zu den Γ_7 gehörenden Moduln τ durch die z_α. . . . 754
§ 8. Die formentheoretischen Resolventen siebenten Grades 756
§ 9. Vergleich der Stufen 5 und 7. Plan der ferneren Entwicklung . . . 759
§ 10. Bedeutung der Modulfunctionen für die Theorie der allgemeinen linear-automorphen Functionen 762

Erster Abschnitt.

Einführung in das Studium der elliptischen Modulfunctionen.

Die nachfolgende Darstellung der Eigenschaften der elliptischen Modulfunctionen ist eine erweiterte Fortsetzung der Theorie des Ikosaeders. Unter dieser Bezeichnung mögen hier im engeren Sinne diejenigen Entwicklungen zusammengefasst sein, welche den ersten Abschnitt der „Vorlesungen über das Ikosaeder" bilden*). Für den Zweck dieser einleitenden Worte brauchen wir nicht schon näher auf die Art dieser Fortsetzung Bezug zu nehmen; nur dass sie eine *erweiterte* Fortsetzung ist, wollen wir hier ausdrücklich betonen. Bereits der Name der „elliptischen" Modulfunctionen wird andeuten, dass unsere künftigen Entwicklungen zu den elliptischen Functionen überhaupt in engster Beziehung stehen. Mit Rücksicht hierauf ist es sehr wünschenswert, beim Leser die Kenntnis dieser Functionen in ihren Grundeigenschaften voraussetzen zu dürfen**). Gleichwohl erfordern es verschiedene Rücksichtnahmen, dass wir hier dennoch im ersten, zweiten und fünften nachfolgenden Kapitel auf einzelne Teile der Theorie der elliptischen Functionen ausführlicher eingehen. Teils schien dies zur bequemen Rückbeziehung in den späteren Abschnitten dieses Buches erforderlich; teils aber auch bieten uns die vorliegenden Lehrbücher über elliptische Functionen die Darstellung einiger wichtigen Entwicklungen nicht in der Gestalt, wie wir sie hier wünschen müssen. Dies gilt vornehmlich von den invariantentheoretischen Gesichtspunkten, welche

*) F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (Leipzig 1884). Wir citieren dieses Buch kurz als „Ikos.".

**) Da es sich hier wesentlich um die Gestalt handelt, welche Weierstrass für die Theorie der elliptischen Functionen geschaffen hat, so können wir als Hilfsmittel für das Studium derselben nur nennen: Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* (Göttingen, seit 1885); Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* Bd. I, II (Paris, 1886, 1888).

das Kapitel 1 zur Darstellung bringt*). Viel eher schon hätten wir uns für das zweite Kapitel, das von den Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung handelt, auf die bezügliche Darstellung in Halphen's Werke berufen können. Indessen erschien die Aufnahme dieses Kapitels schon um des gleichmässigen Zusammenhanges unserer Entwicklung willen notwendig. Sollen wir diesen kurzen Überblick über den ersten Abschnitt noch weiter fortsetzen, so bringt Kapitel 3 durch Aufnahme einer gewissen Gattung conformer Abbildungen eine zusammenfassende und zugleich vorläufig abschliessende Auffassung der bis dahin überhaupt durchlaufenen Entwicklung zu Wege. Auf dieser Grundlage können wir in Kapitel 4 die beiden Hauptprobleme entwickeln, um welche es sich für uns bei den elliptischen Modulfunctionen überhaupt handeln soll. Kap. 5 ist im wesentlichen eine Zusammenstellung von Formeln über doppeltperiodische Functionen.

*) Die Invariantentheorie hat in neuerer Zeit namentlich auch noch durch Hereinnahme der *Covarianten* im Gebiete der elliptischen Functionen bedeutend an Raum gewonnen; man vgl. Klein: *Über hyperelliptische Sigmafunctionen* (Math. Ann. Bd. 27, 1886) sowie Pick: *Zur Theorie der elliptischen Functionen* (Bd. 28 der Annalen, 1886), auf welche Arbeiten dann auch Halphen im zweiten Bande seines gen. Werkes Bezug nimmt. Diese die Covarianten betreffenden Entwicklungen bleiben im Texte ausser Betracht.

Erstes Kapitel.

Von den Invarianten der biquadratischen binären Form.

§ 1. Die Form $f(x_1, x_2)$ und ihre irrationalen Invarianten.

Für die biquadratische binäre Form wird im folgenden die übliche Bezeichnungsweise:

$$(1) \qquad f(x_1, x_2) = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

gebraucht, die wir, wo es wünschenswert ist, durch die Substitution $x_1 = x$, $x_2 = 1$ in nichthomogene Gestalt umsetzen. Als Invarianten dieser Form definiert man gemeinhin nur diejenigen Ausdrücke, welche *rational* aus den Coefficienten zusammengesetzt sind und die Invarianteneigenschaft haben. Aber wir werden sehr bald Beispiele dafür kennen lernen, dass auch *algebraische* Functionen der Coefficienten den Charakter von Invarianten besitzen können. Diese werden wir als *irrationale Invarianten* bezeichnen und den rationalen gegenüber stellen. Es ist im folgenden Paragraphen geradezu unsere Absicht, von den einfachsten irrationalen Grössen dieser Art den Ausgang zu nehmen, um dann von hieraus späterhin z. B. auch zum Studium der rationalen Invarianten fortzuschreiten.

Der folgende Gedankengang führt zu einigen und insonderheit zu den einfachsten irrationalen Invarianten. Rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung $f = 0$ sind nur dann auch rational in den Coefficienten $a, b \ldots$, wenn sie die Wurzeln symmetrisch enthalten. Können wir demnach *rationale, aber unsymmetrische Verbindungen der Wurzeln* herstellen, welche Invarianteneigenschaft besitzen, so werden dieselben sicher Grössen der gekennzeichneten Art darstellen.

Wir spalten, um dieses näher zu untersuchen, $f(x_1, x_2)$ unter Gebrauch einer homogenen Schreibweise in seine Linearfactoren:

$$(2) \qquad f(x_1, x_2)$$
$$= (x_2^{(1)}x_1 - x_1^{(1)}x_2)(x_2^{(2)}x_1 - x_1^{(2)}x_2)(x_2^{(3)}x_1 - x_1^{(3)}x_2)(x_2^{(4)}x_1 - x_1^{(4)}x_2).$$

Aus den acht Grössen $x_k^{(i)}$ setzen sich die fünf Coefficienten $a, b \ldots$ in leicht erkennbarer Weise zusammen. Die $x_k^{(i)}$ bleiben übrigens

insoweit willkürlich, als man $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ noch mit dem gemeinsamen Factor ν_i behaften darf, wo dann die vier ν_i nur der einen Bedingung zu genügen haben, ein der Einheit gleiches Product zu ergeben.

Ohne schon sogleich nach den Invarianten zu fragen, untersuchen wir vielmehr vorab, wann überhaupt eine rationale Function der $x_k^{(i)}$, welche in den Grössen $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ der einzelnen Reihe homogen ist, *nur* von den fünf Coefficienten $a, b \ldots$ der Form f abhängt. Bei der Willkürlichkeit der Factoren ν_i, von denen wir soeben handelten, muss unsere Function der $x_k^{(i)}$ in jedem der folgenden Grössensysteme $x_1^{(i)}$, ... die gleiche Ordnung aufweisen als im ersten $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, weil sonst mit anderer Wahl der ν_i eine Wertänderung der Function eintreten würde. Ist die Ordnung in der einzelnen Grössenreihe $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ die m^{te}, so lehrt die Beziehung der $x_k^{(i)}$ zu den Coefficienten, dafs die in Rede stehende Function der $x_k^{(i)}$ *als Function der Coefficienten allein gedeutet werden kann und in ihnen homogen von der m^{ten} Dimension ist.*

Als Specialfälle nennen wir erstlich solche rationale Functionen, in denen die vier Reihen $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ symmetrisch enthalten sind. Diese liefern uns die rationalen Functionen der Coefficienten. Daneben sind besonders wichtig die *ganzen* rationalen Functionen der $x_k^{(i)}$. Sie ergeben solche algebraische Functionen der Coefficienten, die für endliche Werte derselben stets auch endlich sind und die demnach als *ganze algebraische Functionen der fünf Coefficienten a, b, c, d, e zu bezeichnen sind.*

§ 2. Die irrationalen Invarianten A, B, C der Form f.

Wir suchen nun zu Invarianten der Form f dadurch zu gelangen, dass wir simultane Invarianten ihrer Linearfactoren aufstellen. Als solche kennen wir von vornherein die Determinanten:

$$(1) \qquad (i, k) = x_1^{(i)} x_2^{(k)} - x_2^{(i)} x_1^{(k)}.$$

Sie ändern sich bei linearer Substitution von x_1, x_2 um die Substitutionsdeterminante r als Factor. Ist also die für die transformierte Form entsprechend gebildete Determinante $(i, k)'$, so hat man

$$(i, k)' = r \,.\, (i, k)$$

d. h. (i, k) ist vom Gewichte 1. Determinanten der bezeichneten Art können wir im ganzen sechs angeben, wofern wir den Zeichenwechsel einer einzelnen Determinante als keine wesentliche Änderung ansehen.

Wir wählen die sechs Ausdrücke:

$$(1, 2), \quad (1, 3), \quad (1, 4), \quad (3, 4), \quad (4, 2), \quad (2, 3),$$

und haben dann zwischen ihnen die Identität zu nennen:

$$(2) \qquad (1, 2)(3, 4) + (1, 3)(4, 2) + (1, 4)(2, 3) = 0.$$

Nach den Sätzen des vorigen Paragraphen ist die einzelne dieser Determinanten noch keine irrationale Invariante von f, denn sie weist nur zwei von den vier Reihen $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}$ auf. Aber es ist sofort deutlich, dass es nur der Multiplication von zwei Determinanten bedarf, die keinen ihrer oberen Indices gemein haben, um auf gewünschte Functionen der a, b, c, d, e zu kommen. So erhalten wir im ganzen als Invarianten von f die drei Producte, welche gerade als Glieder der obigen Identität (2) auftreten. Wir bezeichnen dieselben abkürzend durch A, B und C:

$$(3) \qquad A = (1,2)(3,4), \quad B = (1,3)(4,2), \quad C = (1,4)(2,3).$$

Diese drei Invarianten sind dann durch die Relation verknüpft:

$$(4) \qquad A + B + C = 0$$

und geben übrigens bei Ausübung linearer Substitution auf z_1, z_2 zu den Gleichungen Anlass:

$$(5) \qquad A' = r^2 A, \quad B' = r^2 B, \quad C' = r^2 C,$$

unter r wieder die Substitutionsdeterminante verstanden.

Die Quotienten der A, B, C sind die einfachsten *absoluten Invarianten* von f. Versehen wir sie mit dem negativen Zeichen, so erhalten wir diejenigen Grössen, welche man in der Geometrie als *Doppelverhältnisse* der vier durch $f = 0$ dargestellten Punkte einer Geraden zu bezeichnen pflegt. Schreibt man etwa

$$-\frac{A}{B} = \lambda,$$

so finden sich aus (4) für die sechs möglichen Quotienten der A, B, C die Ausdrücke:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &-\frac{A}{B} = \lambda, \quad -\frac{B}{A} = \frac{1}{\lambda}, \quad -\frac{C}{A} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \\ &-\frac{A}{C} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad -\frac{B}{C} = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad -\frac{C}{B} = 1 - \lambda, \end{aligned}$$

worin wir in bekannter Weise die sechs zusammengehörigen Werte des Doppelverhältnisses von vier Punkten vor uns haben*).

Beachten wir noch den Fall, dass irgend zwei der vier Linearfactoren von f einander gleich werden. Die Folge ist offenbar, dass eine der Invarianten A, B, C verschwindet, während die beiden anderen entgegengesetzt gleich werden. Von den sechs Werten des Doppelverhältnisses werden zwei gleich 0, zwei gleich 1 und zwei gleich ∞.

*) Man vgl. die Lehrbücher der neueren Geometrie oder auch der Invariantentheorie wie z. B. Clebsch, *Theorie der binären Formen* pag. 169 f.

§ 3. Verhalten der A, B, C bei Änderung der Factorenfolge von f.

Es soll hier vor allen Dingen untersucht werden, in welcher Weise sich die A, B, C modificieren, falls man eine Änderung in der Reihenfolge der Linearfactoren von f eintreten lässt. Diese vier Factoren, die wir im Anschluss an die Bezeichnungsweise der Determinanten durch 1, 2, 3, 4 benennen, gestatten 24 verschiedene Permutationen, welche eine *Gruppe* bilden*). Es ist dieselbe in bekannter Weise holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Oktaederdrehungen und besitzt wie diese eine ausgezeichnete Untergruppe vierter Ordnung, die Vierergruppe. Es sind einfach die folgenden vier geraden Permutationen

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 1, & 4, & 3 \\ 3, & 4, & 1, & 2 \\ 4, & 3, & 2, & 1, \end{array}$$

die identische Permutation als solche mitgerechnet, welche diese Vierergruppe bilden. *Bei den vier Permutationen dieser Vierergruppe bleiben unsere drei Invarianten A, B, C völlig ungeändert*, wie man aus ihrer Definition (3) § 2 sofort entnimmt.

Die Substitutionen der Vierergruppe vermögen einen einzelnen Linearfactor z. B. 1 durch jeden andern zu ersetzen, und zwar ist es eine bestimmte Substitution aus der Zahl der vier, welche den Ersatz von 1 durch einen bestimmt vorgeschriebenen anderen Factor leistet. Es folgt, dass wir alle Änderungen der A, B, C kennen lernen werden, wenn wir den Index 1 an seiner Stelle lassen und auf die drei übrigen die sechs dann noch möglichen Vertauschungen ausüben. Wir stellen das Resultat hier sofort in Form einer Tabelle zusammen, deren Einrichtung wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf:

(1)

I	1, 2, 3, 4	A, B, C
II	1, 3, 4, 2	B, C, A
III	1, 4, 2, 3	C, A, B
IV	1, 2, 4, 3	$-A$, $-C$, $-B$
V	1, 4, 3, 2	$-C$, $-B$, $-A$
VI	1, 3, 2, 4	$-B$, $-A$, $-C$

*) Hier kommen nun sogleich die Entwicklungen aus „Ikos.“ I Kap. 1 zur Geltung, insbesondere §§ 5, 7.

Die A, B, C erfahren somit bei den sechs Permutationen der letzten drei Linearfactoren ihrerseits selbst Umstellungen, welche sogar jenen völlig analog gebaut sein würden, falls nicht in den drei letzten Reihen das negative Zeichen aufträte. Aber es ist gar nicht schwierig, auch diese kleine Unannehmlichkeit dadurch zu überwinden, dass wir als drei neue Invarianten A, B, Γ die *Differenzen* der A, B, C in folgender Weise einführen:

$$\mathsf{A} = B - C, \quad \mathsf{B} = C - A, \quad \Gamma = A - B. \tag{2}$$

Dieselben sind dann durch die selbstverständliche Relation:

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma = 0 \tag{3}$$

verknüpft und drücken die A, B, C in der Form aus:

$$3A = -\mathsf{B} + \Gamma, \quad 3B = -\Gamma + \mathsf{A}, \quad 3C = -\mathsf{A} + \mathsf{B}.$$

In der That setzt sich nun unsere obige Tabelle in diese um:

(4)

I	1, 2, 3, 4	A, B, Γ
II	1, 3, 4, 2	B, Γ, A
III	1, 4, 2, 3	Γ, A, B
IV	1, 2, 4, 3	A, Γ, B
V	1, 4, 3, 2	Γ, B, A
VI	1, 3, 2, 4	B, A, Γ

Die Invarianten A, B, Γ *erfahren also bei den Vertauschungen der Linearfactoren, welche* 1 *(oder auch irgend einen andern Factor) fest lassen, gerade sämtliche überhaupt mögliche Vertauschungen.*

§ 4. Äquivalenz zweier Formen bei ungeänderter Factorenfolge. Erste kanonische Form von f.

Die Bedeutung der Invarianten A, B, C können wir hier zweckmässig durch Besprechung eines Problems erläutern, das einen der Hauptzielpunkte aller Invariantentheorie abgiebt. Nennen wir zwei Formen dann äquivalent, wenn sie aus einander durch lineare Transformation der Variabelen hervorgehen, so ist das gemeinte Problem zu entscheiden, ob zwei vorliegende Formen f und f' äquivalent sind, und, wofern dieses zutrifft, alle linearen Substitutionen anzugeben, die f in f' überführen. Die letztere Aufgabe kommt dann auf die andere zurück, die linearen Substitutionen der Variabelen zu bestimmen, die f in sich überführen.

Sei nun wieder f unsere biquadratische binäre Form und sei dieselbe nach (2) § 1 in Linearfactoren zerfällt. Die soeben aufgeworfenen

Fragen werden alsdann gerade durch die Invarianten A, B, C beantwortet, *falls wir die Reihenfolge der Linearfactoren als unveränderlich gegeben erachten.* Es hat dies, wie wir sogleich sehen werden, seinen Grund darin, dass wir im Stande sind, f vermöge einer linearen Substitution der Determinante 1 in eine kanonische Form umzusetzen, in welcher die Invarianten A, B, C oder auch zwei unter ihnen, was zufolge (4) § 2 auf dasselbe hinauskommt, in einfachster Weise die Coefficienten bilden.

Wir schicken hier die selbstverständliche Bemerkung voraus, dass jede biquadratische binäre Form bei ungeänderter Factorenfolge in sich übergeht bei Anwendung von einer der vier Substitutionen

$$z_1' = i^\alpha z_1, \quad z_2' = i^\alpha z_2 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Die Determinante dieser Substitution ist $(-1)^\alpha$, also $+1$ oder -1, je nachdem α gerade oder ungerade ist. Haben wir nun irgend eine Substitution der Determinante r, welche f in eine kanonische Form überführt, so können wir aus dieser einen Substitution, indem wir die rechten Seiten ihrer Formeln um i^α als Factor modificieren, im ganzen vier verschiedene Substitutionen ableiten, die f in die fragliche kanonische Form überführen. Dabei haben offenbar zwei dieser Substitutionen die Determinante $+r$, die beiden anderen $-r$. Wir wollen vier solche Substitutionen in der Folge immer zusammenfassend als *„vier Substitutionen der Determinante $\pm r$"* bezeichnen.

Nun betrachten wir die vier speciellen Substitutionen der Determinante ± 1

$$(1) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{i^\alpha \sqrt{(4,\,2)}}{\sqrt{(1,\,4)}\,\sqrt{(1,\,2)}}\,(z_2^{(1)} z_1 - z_1^{(1)} z_2), \\ y_2 &= \frac{i^\alpha \sqrt{(1,\,2)}}{\sqrt{(1,\,4)}\,\sqrt{(4,\,2)}}\,(z_2^{(4)} z_1 - z_1^{(4)} z_2). \end{aligned}$$

Es soll darin (i, k) wieder die zweigliedrige Determinante des § 2 sein, während wir das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{(i, k)}$ für jede der drei in (1) eingehenden Determinanten nach Willkür wählen können. Eine kurze Rechnung ergiebt dann für die in ihre Factoren zerlegte Form f die transformierte Gestalt:

$$(2) \qquad f = y_1 (y_2 - y_1)(A y_1 + B y_2) y_2.$$

Hiermit sind wir zu derjenigen Gestalt gekommen, die wir künftighin als *erste kanonische Form von f* bezeichnen wollen.

An (2) knüpfen wir nun folgende Lösung des Äquivalenzproblems von f mit einer zweiten Form f' bei Aufrechterhaltung der Factorenfolge. Wir denken uns f' durch eine (1) völlig analoge Substitution auf die Form gebracht:

$$f' = y_1'(y_2' - y_1')(A'y_1' + B'y_2')y_2'$$

und unterwerfen f und f' in dieser ersten kanonischen Form der Discussion. Soll es eine lineare Substitution der y_1, y_2 von der Determinante r geben, welche f derart in f' transformiert, dass dabei der erste Factor von f in den ersten von f' u. s. w. übergeht, so müssen zuvörderst infolge der Invariantennatur der A, B, C die Bedingungen bestehen:

$$A' = r^2A, \quad B' = r^2B, \quad C' = r^2C,$$

von denen übrigens jede die Folge der beiden anderen ist. *Treffen diese Bedingungen zu, so ist auch jedesmal f mit f' unter Aufrechterhaltung der Factorenfolge äquivalent,* indem nämlich die eine Form in die andere übergeht durch die vier Substitutionen der Determinante $\pm r$:

$$y_1' = i^\alpha \sqrt{r}\, y_1, \quad y_2' = i^\alpha \sqrt{r}\, y_2.$$

Für den vorliegenden Zweck sind die Invarianten A, B, Γ ebenso brauchbar wie A, B, C. Wir können demnach unser Resultat auch dahin aussprechen, *dass zwei gegebene Formen factorenweise mit einander äquivalent sind, wenn ihre bezüglichen Invarianten* A', B', Γ' *resp.* A, B, Γ *mit einander proportional sind:*

$$\mathsf{A}' = r^2\mathsf{A}, \quad \mathsf{B}' = r^2\mathsf{B}, \quad \Gamma' = r^2\Gamma. \tag{3}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es vier Substitutionen der Determinante $\pm r$, welche f in f' in verlangter Weise überführen.

§ 5. Von der Äquivalenz einer Form f mit sich selbst.

Ausgerüstet mit den Resultaten des vorigen Paragraphen können wir nun weiter die Frage nach der Äquivalenz einer Form mit sich selbst leicht zur Entscheidung bringen. Die Anzahl der Substitutionen, welche eine Form bei unveränderter Factorenfolge in sich überführen, war vier; sie wächst aber bedeutend, falls wir nicht mehr auf die Reihenfolge der Linearfactoren achtgeben. Indem wir diese Factoren einer beliebigen der 24 Permutationen unterziehen, kommen wir zu einer neuen Gestalt der Form f, die wir zum Unterschiede von der ursprünglichen mit f' bezeichnen. Es gilt dann, die Äquivalenz von f und f' im Sinne des vorigen Paragraphen zu entscheiden.

Aber die Invarianten von f', die wir durch A', B', Γ' bezeichnen, stellen doch nach (4) § 3 nichts anderes als eine Permutation der A, B, Γ selbst dar. Gehörte nun jene Vertauschung der Linearfactoren der oben genannten Vierergruppe an, so ist direct:

$$\mathsf{A}' = \mathsf{A}, \quad \mathsf{B}' = \mathsf{B}, \quad \Gamma' = \Gamma.$$

Indem hierdurch die Forderung (3) § 4 erfüllt ist, können wir für

jede binäre biquadratische Form, ohne auf die Reihenfolge der Linearfactoren noch weiter Gewicht zu legen, *sechzehn Substitutionen der Determinante* ± 1 *angeben, welche alle die Transformation der Form in sich leisten.*

Deuten wir f geometrisch durch die vier $f = 0$ entsprechenden Punkte einer Geraden, so lassen die vier Substitutionen

$$z_1' = i^\alpha z_1, \quad z_2' = i^\alpha z_2$$

dieses Punktquadrupel völlig unverändert. Es werden demnach die sechzehn Transformationen der Form in sich auf nur *vier* geometrisch verschiedene zurückkommen. Das stimmt denn mit dem bekannten Satze der Geometrie überein, *dass vier Punkte einer Geraden sich selbst immer auf vier Weisen projectiv sind.*

Im allgemeinen giebt es keine weiteren als jene sechzehn Substitutionen, die f in sich überführen. Sollte nämlich auch eine der Vierergruppe nicht angehörige Permutation der Linearfactoren von f auf ein f' führen, das mit f die specielle Aquivalenz des vorigen Paragraphen zeigt, so müssten nach (4) § 3 die A, B, Γ auch mit einer von der Identität verschiedenen Permutation ihrerselbst proportional sein. Wir setzen hierbei voraus, dass keine zwei der vier Linearfactoren von f mit einander identisch werden. Die Invarianten A, B, C sind dann alle drei von Null verschieden oder, was dasselbe besagt, keine zwei der Invarianten A, B, Γ werden mit einander identisch.

Unter dieser Voraussetzung versuchen wir die Invarianten A, B, Γ in der Anordnung II in (4) § 3 der ursprünglichen Anordnung proportional zu setzen:

$$\mathsf{B} : \Gamma : \mathsf{A} = \mathsf{A} : \mathsf{B} : \Gamma.$$

Man sieht ohne weiteres, dass dann auch der Anordnung III entsprechend

$$\Gamma : \mathsf{A} : \mathsf{B} = \mathsf{A} : \mathsf{B} : \Gamma$$

erfüllt ist. Die Invarianten haben alsdann solche besonderen Werte, dass

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} : \Gamma = 1 : \varrho : \varrho^2$$

wird, unter ϱ eine complexe dritte Einheitswurzel verstanden. Der Fall dieser speciellen Werte der Invarianten heisst der *äquianharmonische. Neben die* 16 *Substitutionen der Determinante* ± 1, *welche auch im allgemeinen Falle die Form f in sich selbst transformieren, treten hier den Anordnungen II und III entsprechend noch weitere* $2 \cdot 16$ *Substitutionen der Determinante* $\pm \varrho$ *bez.* $\pm \varrho^2$, *welche gleichfalls f in sich überführen.*

Fallen die A, B, Γ in ursprünglicher Anordnung endlich mit einer der Anordnungen IV, V, VI proportional aus, so ergiebt sich, dass eine der Invarianten verschwindet, während die beiden anderen ent-

gegengesetzt gleich werden. Man spricht alsdann vom *harmonischen Falle* und hat z. B. für die Anordnung IV

$$A = -A, \quad B = -\Gamma, \quad \Gamma = -B.$$

Es folgt leicht: *Im harmonischen Falle hat man ausser den* 16 *Substitutionen der Determinante* $+1$ *des allgemeinen Falles noch weitere* 16 *Substitutionen der Determinante* $+i$, *welche die Form f in sich transformieren.*

§ 6. Von der Äquivalenz zweier Formen bei beliebiger Factorenfolge.

Indem wir nun das am Eingang des vierten Paragraphen aufgeworfene Problem in allgemeiner Fassung besprechen wollen, werden wir sogleich sehen, dass uns diese Absicht über den gegenwärtigen Stand unserer invariantentheoretischen Betrachtung hinausführt. Soll nämlich eine Form f mit den Invarianten A, B, Γ einer zweiten Form f' mit den Invarianten A', B', Γ' äquivalent sein, ohne dass dabei insbesondere der erste Factor von f dem ersten von f' u. s. w. entspricht, so werden wir zuvor eine Abänderung der Factorenfolge von f derart treffen können, dass eben diese besondere Äquivalenz beider Formen wieder zutrifft. Unsere Invarianten A, B, Γ werden bei dieser Umsetzung von f in irgend einer der sechs möglichen Arten permutiert. Durch Heranziehen oben gewonnener Resultate kommen wir somit zu dem Satze: Die Formen f und f' sind stets dann mit einander äquivalent, wenn sich ein Proportionalitätsfactor r^2 finden lässt, welcher die drei Grössen A', B', Γ' mit den drei anderen A, B, Γ, letztere in irgend einer Reihenfolge genommen, proportional erscheinen lässt. Die eine Form geht alsdann durch 16 Substitutionen der Determinante $+r$ in die andere über.

Wollten wir diesem Resultate durch Formeln Ausdruck verleihen, so müssten wir offenbar zunächst sechs neben einander stehende Proportionen zwischen den A', B' u. s. w. hinschreiben, von denen im Einzelfall dann jedesmal eine zutreffen würde. Diese Unbequemlichkeit legt uns nahe, zu ihrer Vermeidung die symmetrischen Verbindungen der A, B, Γ in die Betrachtung einzuführen. Wir werden solcher Weise zu den *rationalen Invarianten* der biquadratischen binären Form f geführt und können dann mit ihrer Hilfe dem hier in Rede stehenden allgemeinen Äquivalenzproblem die einfachste Auflösung verleihen.

§ 7. Die rationalen Invarianten der Form f.

Wenn wir die A, B, Γ als Wurzeln einer cubischen Gleichung ansehen, so erscheinen dieselben durch ihre symmetrischen Verbindungen:

$$\begin{aligned} G_1 &= \mathsf{A} + \mathsf{B} + \Gamma, \\ G_2 &= \mathsf{B}\Gamma + \Gamma\mathsf{A} + \mathsf{A}\mathsf{B}, \\ G_3 &= \mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

völlig bestimmt. Von diesen verschwindet die erste nach (3) § 3 identisch, während wir für G_2 und G_3 bei Einwirkung linearer Substitutionen auf f die Gleichungen:

$$G_2' = r^4 G_2, \quad G_3' = r^6 G_3 \tag{2}$$

berechnen.

Erinnern wir uns hierüber hinaus an die Darstellung der irrationalen Invarianten durch die Grössen $z_1^{(i)}$, $z_2^{(i)}$ in (3) § 2, so folgt, dass G_2 die einzelne Reihe $z_1^{(i)}$, $z_2^{(i)}$ homogen in zweiter, G_3 aber in dritter Dimension enthält. Da wir es zugleich beide Male mit ganzen rationalen Verbindungen der $z_k^{(i)}$ zu thun haben, so folgt nach den Erörterungen des Paragraph 1: *G_2 und G_3 sind ganze rationale Functionen der Coefficienten von f und zwar enthalten sie dieselben homogen im zweiten bez. dritten Grade.* Indem wir ihre explicite Darstellung in den Coefficienten bis auf den nächsten Paragraphen verschieben, fassen wir das erhaltene Resultat vorerst noch in den Satz zusammen: *Jede binäre biquadratische Form hat zwei rationale Invarianten G_2, G_3 vom Gewichte vier resp. sechs und homogen und ganz vom zweiten bez. dritten Grade in den Coefficienten.*

Da G_2 und G_3 die drei Invarianten A, B, Γ bis auf die Reihenfolge völlig bestimmen, so ergänzen wir die Lücke des letzten Paragraphen durch den Satz: Zwei Formen f und f' sind stets und nur dann einander äquivalent, wenn ihre bezüglichen Invarianten G_2, G_3 und G_2', G_3' eine Grösse r zu finden gestatten, die den Bedingungen genügt:

$$G_2' = r^4 G_2, \quad G_3' = r^6 G_3.$$

Es kommt dies ersichtlich darauf hinaus, *dass für äquivalente Formen die absolute Invariante*

$$\frac{G_2^3}{G_3^2}$$

übereinstimmen muss.

Wir kommen hier noch einmal auf die Specialfälle des § 5 zurück, weil sich dieselben mit Hilfe der rationalen Invarianten in einfachster

Weise kennzeichnen lassen. Auf Grund von (1) berechnet man sofort: *Die Bedingung des äquianharmonischen Falles ist*

$$G_2 = 0,$$

die des harmonischen

$$G_3 = 0.$$

Hat $f = 0$ eine Doppelwurzel, so verschwindet das Product $A \cdot B \cdot C$, welches von einem numerischen Factor abgesehen sich in das andere umsetzt:

$$(\mathsf{B} - \Gamma)(\Gamma - \mathsf{A})(\mathsf{A} - \mathsf{B}).$$

Aber das Quadrat dieser Grösse ist eine ganze symmetrische Function von A, B, Γ und daher mit Rücksicht auf $G_1 = 0$ eine ganze rationale Function von G_2 und G_3. Wir setzen dieselbe gleich $4 \cdot 36^3 \cdot \Delta$ und bezeichnen Δ als *Discriminante der binären biquadratischen Form f*. Eine leichte Rechnung ergiebt:

$$-4 \cdot 36^3 \cdot \Delta = 4G_2^3 + 27G_3^2. \tag{3}$$

§ 8. Die rationalen Invarianten in expliciter Form.

Mit den Grössen G_2, G_3 haben wir zwei weiterhin sehr wichtige Invarianten gefunden, deren Darstellung in den Coefficienten der Form f nunmehr angegeben werden soll. Hier würde es eine sehr umfängliche Rechnung werden, wollten wir etwa dem Gange der bisherigen Entwickelung getreu die G_2, G_3 zunächst als symmetrische Functionen der $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ wirklich hinschreiben und von da aus ihre Ausdrücke in den Coefficienten der binären Form ableiten. Vielmehr wollen wir ein indirectes Verfahren einschlagen, indem wir ausser der Invariantennatur von G_2, G_3 das schon bekannte Resultat verwerten, dass diese Grössen homogen und ganz vom zweiten resp. dritten Grade in den Coefficienten von f sind. Diese Methode ist deshalb gerechtfertigt, weil die Existenz der Invarianten G_2, G_3 nicht erst noch bewiesen werden muss. Wir zerlegen unsere Entwicklung in drei Schritte.

Es war ausführlich geschrieben

$$f(x_1, x_2) = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4.$$

Man bilde nun erstlich die lineare Substitution der Determinante 1:

$$x_1 = \sigma y_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sigma} \cdot y_2$$

unter σ eine beliebige Constante verstanden. Die Coefficienten der transformierten Form werden ersichtlich

$$\sigma^4 a, \quad \sigma^2 b, \quad c, \quad \frac{1}{\sigma^2} d, \quad \frac{1}{\sigma^4} e,$$

während G_2 und G_3 durchaus unverändert bleiben müssen. Nun sind

diese letztere homogene ganze Combinationen der Coefficienten vom zweiten bez. dritten Grade. Daher folgt, *dass* G_2 *eine lineare Verbindung der folgenden Ausdrücke sein muss:*

$$ae, \quad bd, \quad c^2,$$

G_3 *aber eine gleiche Verbindung der Grössen:*

$$ace, \quad bcd, \quad ad^2, \quad b^2e, \quad c^3.$$

Wir denken uns zweitens G_2 und G_3 in den eben genannten Grössen linear und homogen mit unbestimmten Coefficienten aufgeschrieben und suchen die letzteren durch eine zweite lineare Transformation von der Determinante 1, bei der G_2, G_3 wieder unverändert bleiben müssen, zu bestimmen. Hierzu empfiehlt sich folgende Substitution

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_1 + y_2.$$

Die Coefficienten der neuen Form sind der Reihe nach:

$$a + 4b + 6c + 4d + e, \quad b + 3c + 3d + e, \quad c + 2d + e, \quad d + e, \quad e.$$

Indem wir die neuen Coefficienten in die für G_2 und G_3 angeschriebenen Ausdrücke eintragen und mit den ursprünglichen Werten von G_2, G_3 die solchergestalt entspringenden neuen Werte bez. identificieren, finden wir, *dass diese Grössen als Functionen der Coefficienten folgendermassen definiert sein müssen:*

$$(1) \qquad \begin{aligned} G_2 &= k(ae - 4bd + 3c^2), \\ G_3 &= k'(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3). \end{aligned}$$

Dabei bedeuten k und k' numerische Factoren, die wir nun drittens noch zu bestimmen haben. Wir gehen zu dem Ende auf die kanonische Form zurück:

$$f = y_1(y_2 - y_1)(Ay_1 + By_2)y_2$$

und berechnen für sie die in den beiden Gleichungen (1) rechter Hand stehenden Ausdrücke. Man findet:

$$(2) \qquad \begin{aligned} G_2 &= \quad k \cdot \frac{A^2 + AB + B^2}{12}, \\ G_3 &= -k' \cdot \frac{(A - B)(2A^2 + 2B^2 + 5AB)}{432}. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der ursprünglichen Definition von G_2 und G_3 (1) § 7 und die Beziehung der A, B, C zu den A, B, Γ liefern dann leicht *die nachfolgenden Zahlwerte für* k, k':

$$(3) \qquad k = -36, \quad k' = 432.$$

Damit ist die explicite Darstellung von G_2, G_3 geleistet.

§ 9. Die Invarianten g_2, g_3 und die absolute Invariante J.

Das Wesentliche an den Invarianten G_2, G_3 sind ersichtlich nicht die Factoren k, k', sondern die mit ihnen multiplicierten ganzen Functionen der Coefficienten $a, b \ldots$. Darum wollen wir statt G_2, G_3 fortan *diese ganzen Functionen selbst, die wir dann g_2, g_3 nennen, als Invarianten von f einführen**). Wir setzen also:

$$(1) \qquad \begin{aligned} g_2 &= ae - 4bd + 3c^2, \\ g_3 &= ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3. \end{aligned}$$

Die *Discriminante* Δ, welche durch (3) § 7 definiert ist, nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$(2) \qquad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Vorübergehend haben wir auch bereits vorhin eine *absolute Invariante* aus G_2 und G_3 zusammengesetzt. Als solche wollen wir fortan *den Quotienten $g_2^3 : \Delta$ wählen und bezeichnen ihn durch J.* Wir haben dann:

$$(3) \qquad J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \quad J - 1 = \frac{27g_3^2}{\Delta},$$

zwei Gleichungen, die wir gemeinsam schreiben in der einen fortlaufenden Proportion:

$$(4) \qquad J : J - 1 : 1 = g_2^3 : 27g_3^2 : \Delta.$$

Die Beziehung dieser rationalen absoluten Invariante J zu der früher bereits erhaltenen irrationalen absoluten Invariante $\lambda = -\frac{A}{B}$ lesen wir ohne Mühe aus den Formeln (2) des vorigen Paragraphen ab. Wir schreiben die entspringende Gleichung wieder als Proportion:

$$(5) \qquad J : J - 1 : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1-\lambda)^2.$$

Es ist dies eine in der Theorie der regulären Körper sehr bekannte Gleichung. Man sehe „Ikos." pag. 44, wo die sechs Formen des Doppelverhältnisses

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

---

*) Die weiterhin oft zu brauchenden Invarianten g_2, g_3 finden sich historisch unter den ersten Beispielen für den von Cayley concipierten allgemeinen Begriff der Invarianten. Man sehe Cayley's erste Arbeit im „Cambridge Mathem. Journal" Bd. 4 p. 193 (1845), wo thatsächlich diejenige Invariante auftritt, die wir hier g_2 nennen. Unmittelbaren Anteil an diesen ersten Untersuchungen hatte übrigens auch Boole; ihm dankt man die Entdeckung der Invariante g_3, sowie den Ausdruck der Discriminante in g_2, g_3. Man sehe pag. 209 des eben citierten Bandes. Cayley's hier in Betracht kommende Arbeit ist wieder abgedruckt in dessen *Collected Mathematical Papers* Bd. I p. 80—94 (Cambridge 1888).

zugleich auch in ihrer Eigenschaft als die *sechs Substitutionen einer Diedergruppe* auftreten. In der That geht denn auch Gleichung (5) durch die Substitutionen:

$$Z = \frac{1}{J}, \quad z_1 : z_2 = \frac{2\lambda - 1 - i\sqrt{3}}{2\lambda - 1 + i\sqrt{3}}$$

in die Gestalt über:

$$Z : Z - 1 : 1 = \left(\frac{z_1^3 - z_2^3}{2}\right)^2 : \left(\frac{z_1^3 + z_2^3}{2}\right)^2 : -(z_1 z_2)^3,$$

in der man nun die gewohntere Form der *Diedergleichung* für $n = 3$ erkennt („Ikos." p. 60).

§ 10. Die zweite kanonische Form von f.

Wir können die Bedeutung der Invarianten g_2 und g_3 für die Frage nach der Äquivalenz zweier Formen geradezu zur Anschauung bringen, indem wir hier eine zweite kanonische Gestalt für biquadratische binäre Formen besprechen, deren Coefficienten durch g_2 und g_3 in einfachster Weise ausgedrückt sind. Bei der Formulierung des folgenden Satzes wollen wir der Kürze halber die Specialfälle, dass eine dieser Invarianten verschwindet, ausschliessen. Wir können dann beweisen: *Eine biquadratische binäre Form f mit den Invarianten g_2 und g_3 lässt sich auf* 16 *Weisen mittels linearer Substitutionen der Determinante* 1 *in die kanonische Gestalt bringen, die wir hier als zweite bezeichnen:*

$$f = y_2(4y_1^3 - g_2 y_1 y_2^2 - g_3 y_2^3). \tag{1}$$

In derselben ist y_2 einfacher Linearfactor; es werden sich also nur solche Formen f in die Gestalt (1) setzen lassen, die wenigstens *einen einfachen* Linearfactor besitzen.

Es ist auch hier nicht unsere Absicht, durch ausführliche Rechnungen die wirkliche Form der Substitution anzugeben, welche eine allgemeine Form in diese specielle Gestalt überzuführen vermögen. Vielmehr wollen wir uns durch eine kurze indirecte Schlussweise von der Richtigkeit des gerade ausgesprochenen Satzes überzeugen.

Wir setzen den Fall, dass eine allgemeine Form f mit den Invarianten g_2 und g_3 mit einer speciellen f' äquivalent sei, von deren fünf Coefficienten die ersten drei diesen Forderungen entsprechen sollen: $a' = 0$, $b' = 1$, $c' = 0$. Zudem möge die Äquivalenz durch 16 Substitutionen der Determinante ± 1 vermittelt sein.

Nach den gewonnenen Sätzen ist die einzige Bedingung, damit solches zutreffend ist, die, dass g_2 und g_3 auch die Invarianten von f' sind; denn Formen mit denselben Invarianten g_2, g_3 gehen in einander

über durch 16 lineare Substitutionen der Determinante ± 1. Setzen wir aber in die dergestalt zu fordernden Gleichungen:

$$g_2 = a'e' - 4b'd' + 3c'^2,$$
$$g_3 = a'c'e' + 2b'c'd' - a'd'^2 - b'^2e' - c'^3$$

die speciellen Werte der ersten drei Coefficienten ein, so folgt:

$$g_2 = -4d', \quad g_3 = -e',$$

und somit sind wir für die zu f äquivalente Form f' genau auf die rechte Seite von (1) geführt*).

Wir zerlegen noch, der Bezeichnung von Weierstrass folgend, den cubischen Factor von f in (1) in seine Linearfactoren**):

(2) $y_2(4y_1^3 - g_2y_1y_2^2 - g_3y_2^3) = 4y_2(y_1 - e_1y_2)(y_1 - e_2y_2)(y_1 - e_3y_2).$

Berechnen wir hier nach den Angaben von § 2 die Invarianten A, B, C, so kommt:

(3) $A = -4(e_2 - e_3), \quad B = -4(e_3 - e_1), \quad C = -4(e_1 - e_2),$

sowie durch Übergang zu den A, B, Γ:

(4) $$\mathsf{A} = 12e_1, \quad \mathsf{B} = 12e_2, \quad \Gamma = 12e_3.$$

Die Einführung der e_1, e_2, e_3 deckt sich also im wesentlichen mit derjenigen der A, B, Γ, was für später festzuhalten ist.

§ 11. Geometrisches über die zweite kanonische Form.

Wir verweilen noch einen Augenblick bei der geometrischen Bedeutung unserer neuen kanonischen Form. Von den vier Wurzeln von $f = 0$ hat eine im neuen Coordinatensystem der $y_1 : y_2$ eine ganz specielle Lage, indem sie nach dem Unendlichkeitspunkte desselben ($y_2 = 0$) geworfen ist. Gleichzeitig sind die drei anderen Wurzeln gegeben durch:

(1) $$4y_1^3 - g_2y_1y_2^2 - g_3y_2^3 = 0$$

d. i. durch eine cubische Gleichung für $y_1 : y_2$, in welcher das zweite Glied fehlt***). Letzterem Umstande zufolge verschwindet der nach y_2 genommene Differentialquotient der linken Seite von (1) für $y_2 = 0$,

*) Der harmonische, sowie der äquianharmonische Fall verhält sich wie der allgemeine, nur dass die Überführung in die kanonische Form (1) dann durch $2 \cdot 16$, bez. $3 \cdot 16$ Substitutionen vermittelt wird.

**) Man vgl. Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* pag. 12.

***) Indem hier der Coefficient von y_1^3 numerisch ist, bleibt ausgeschlossen (was bei Anwendung der kanonischen Form in Betracht kommt), dass einer der drei (1) befriedigenden Werte von $y_1 : y_2$ unendlich wird.

so dass die lineare Polare des Punktes $y_2 = 0$ *in Bezug auf das Tripel der durch* (1) *gegebenen Punkte mit* $y_1 = 0$ *zusammenfällt.* Damit ist auch für den Nullpunkt unseres Coordinatensystems die geometrische Deutung gewonnen.

Indem wir in bezeichneter Weise eine Wurzel von $f = 0$ vor den drei übrigen bei der Legung des Coordinatensystems der y auszeichnen, können wir dasselbe in vier verschiedenen Arten wählen. Es ist also wesentlich irrational. Dabei mag es befremden, dass sich die Irrationalität nicht schon in den Coefficienten unserer Normalform ausspricht, die doch rationale Functionen der a, b, c, d, e sind. Indessen beachte man doch, dass jegliche Form durch 16 Substitutionen der Determinante ± 1 in sich übergeführt wird, von denen aber nur vier geometrisch einen verschiedenen Effect nach sich ziehen, während sich die übrigen, die sich analytisch von jenen nur durch die Factoren i^α der Substitutionscoefficienten unterscheiden, geometrisch mit der Wirkung jener decken. Bei unseren 16 Substitutionen, welche die kanonische Form (1) unverändert wieder erzeugen, nimmt nun das Coordinatensystem gerade die vierfach verschiedene Lage an, von der wir oben sprachen.

Ähnliche Bemerkungen hätten wir bereits bei Gelegenheit der ersten kanonischen Form zur Sprache bringen können. In der That wurde bei der zu derselben führenden Substitution jedem der vier Linearfactoren von f eine besondere Rolle zugewiesen, was mit der in dem Factor i^α liegenden Vieldeutigkeit zusammen im ganzen 96 Transformationen einer gegebenen Form f in die betreffende Normalform ergiebt. Trotzdem hängen die Coefficienten der ersten kanonischen Form von denen der ursprünglichen nur sechswertig ab. Der gleiche Erklärungsgrund wie oben führt uns überhaupt zu dem allgemeinen Satze, welche Normalform von f wir auch zu Grunde legen wollen: *Die Anzahl der Transformationen, welche* f *in eine Normalform überführen, ist immer* 16*-mal grösser als die Vieldeutigkeit der dabei entspringenden Coefficienten.*

§ 12. Dritte kanonische Form von f.

Es soll noch eine dritte kanonische Form von f besprochen werden, die wir hier unter Benutzung einiger geometrischer Sätze sowie der Eigenschaften der Vierergruppe einführen. Wir knüpfen an den bekannten Satz, dass zwei auf einer Geraden gegebene Punktepaare eindeutig zwei andere Punkte bestimmen, welche die Eigenschaft haben, die Punkte jedes der gegebenen Paare harmonisch zu trennen. Aber das $f(z_1, z_2) = 0$ entsprechende Punktquadrupel kann man auf *drei*

Weisen in zwei Punktepaare spalten, und jeder dieser Spaltungen wird in eben bezeichneter Weise ein neues Punktepaar der Geraden zugeordnet sein.

Bei den vier geometrisch verschiedenen Transformationen des Punktquadrupels $f = 0$ in sich erleiden die vier Punkte desselben die oben genannten Permutationen der Vierergruppe, und es ist sofort ersichtlich, dass eine einmal gewählte unter den drei Spaltungen des Quadrupels in zwei Punktepaare bei diesen vier Transformationen durchaus stets wieder in sich übergehen muss (cf. § 3). Damit aber bleibt auch das jeder Spaltung entsprechende harmonisch trennende Punktepaar, vielleicht abgesehen von einer Vertauschung der beiden Punkte des einzelnen Paares, bei den vier in Rede stehenden Transformationen fest. *Solcher festbleibender Punktepaare finden wir also auf der Geraden insgesamt drei.*

Nun bilden andrerseits jene vier linearen Substitutionen des Quotienten $z_1 : z_2$ eine Vierergruppe linearer Substitutionen einer Veränderlichen, auf deren bekannte Eigenschaften wir jetzt zurückgehen. Dabei wollen wir, da doch auch die complexen Werte des Quotienten $z_1 : z_2$ hier zuzulassen sind, nicht mehr von einer Geraden mit dem binären Coordinatensystem der z_1, z_2, sondern für den Augenblick unter engem Anschluss der Bezeichnungsweise an die vorliegenden Verhältnisse von der complexen Ebene $z_1 : z_2$ sprechen. Dann ist es von „Ikos." p. 12, 13 her bekannt, dass es in der complexen Ebene von $z_1 : z_2$ gerade nur *ein* Tripel von Punktepaaren giebt, das gegenüber den vier Substitutionen der Vierergruppe in solcher Weise fest bleibt, wie wir das soeben an jenen drei Paaren harmonisch trennender Punkte erkannten.

Damit ist die gegenseitige Lage unserer drei Punktepaare erkannt, und nun ist es das Einfachste, wenn wir das Coordinatensystem der z_1, z_2 derart wählen, dass nach üblicher Projection der Ebene $z_1 : z_2$ auf die Kugelfläche gerade die Figur zu Tage kommt, welche den Erörterungen in „Ikos." p. 12, 13 zu Grunde liegt. *Unsere drei Punktepaare werden dann die Endpunkte der drei Axen eines der Kugel concentrischen regulären Oktaeders und bekommen somit unter günstigster Lagerung der Werte von $z = z_1 : z_2$ die Argumente*

$$z = 0, \ \infty; \ \ 1, \ -1; \ \ i, \ -i.$$

Auf das solchergestalt gewonnene Coordinatensystem z_1, z_2 gründen wir nun unsere neue Normalform für f. Stellen wir vorab die 16 Substitutionen auf, welche dieselbe in sich überführen werden, so berechnen sich diese von „Ikos." p. 37 Formel (21) aus ohne Mühe als

$$(1)\qquad \begin{aligned} z_1' &= \pm i^\alpha z_1, \quad z_2' = i^\alpha z_2, \\ z_1' &= \pm i^\alpha z_2, \quad z_2' = i^\alpha z_1. \end{aligned}$$

Dementsprechend werden in unserer dritten kanonischen Form von f alle ungeraden Potenzen der Variabelen ausfallen, und überdies müssen die Coefficienten von z_1^4 und z_2^4 einander gleich werden. *Man hat also:*

$$(2)\qquad f = M(z_1^4 + z_2^4) + 6Nz_1^2z_2^2,$$

eine Form, die man offenbar folgendermassen in zwei Factoren spalten kann:

$$(3)\qquad f = (\mu_2^2 z_1^2 - \mu_1^2 z_2^2)(\mu_1^2 z_1^2 - \mu_2^2 z_2^2).$$

Dieses ist die kanonische Gestalt von f, um die es uns zu thun war.

§ 13. Weiteres über die dritte kanonische Form. Anschluss an die Theorie der regulären Körper.

Die in der dritten kanonischen Form auftretenden Coefficienten M, N oder auch μ_1, μ_2 können wir leicht mit den rationalen Invarianten g_2, g_3 in Verbindung setzen. Anwendung der Formeln (1) § 9 ergiebt:

$$(1)\qquad g_2 = M^2 + 3N^2, \quad g_3 = (M^2 - N^2)N,$$

und hieraus folgt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 12g_2 &= \mu_1^8 + 14\mu_1^4\mu_2^4 + \mu_2^8, \\ 216g_3 &= \mu_1^{12} - 33\mu_1^8\mu_2^4 - 33\mu_1^4\mu_2^8 + \mu_2^{12}. \end{aligned}$$

Für die Discriminante findet man weiter:

$$(3)\qquad 16\Delta = \mu_1^4\mu_2^4(\mu_1^4 - \mu_2^4)^4.$$

Als eine *neue absolute irrationale Invariante* reihen wir dem λ den Quotienten von μ_1 und μ_2 an:

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Dieses μ erweist sich dann auf Grund von (2) und (3), sowie (4) § 9 mit J durch die Gleichung verknüpft:

$$(4)\quad J : J - 1 : 1 = (\mu^8 + 14\mu^4 + 1)^3 : (\mu^{12} - 33\mu^8 - 33\mu^4 + 1)^2 : 108\mu^4(\mu^4 - 1)^4.$$

Das ist aber die *Oktaedergleichung**), und somit ist μ als algebraische Function 24sten Grades von J die Oktaederirrationalität.

Den Zusammenhang zwischen μ und λ gewinnt man durch Zerspaltung von (3) § 12 in seine Linearfactoren:

$$(5)\qquad f = (\mu_1 z_1 - \mu_2 z_2)(\mu_2 z_1 - \mu_1 z_2)(\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)(\mu_2 z_1 + \mu_1 z_2).$$

---

*) Cf. „Ikos." p. 60 Formel (62^a).

Unter Einhaltung dieser Factorenfolge kommt für die Invarianten A, B, C:

$$A = -(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2, \quad B = -4\mu_1^2\mu_2^2, \quad C = (\mu_1^2 + \mu_2^2)^2$$

und demnach als Beziehung zwischen λ und μ:

$$\lambda : \lambda - 1 : 1 = \left(\frac{\mu^2 - 1}{2}\right)^2 : \left(\frac{\mu^2 + 1}{2}\right)^2 : -\mu^2. \tag{6}$$

*Damit ist aufs neue eine Diedergleichung**) *gefunden und zwar diesmal die für* $n = 2$. Überhaupt subsumieren sich demgemäss die zwischen den drei absoluten Invarianten J, λ, μ aufgefundenen Beziehungen *ohne Ausnahme unter die Gleichungen der regulären Körper.*

Handeln wir endlich noch von der Vieldeutigkeit des der dritten kanonischen Form zu Grunde liegenden Coordinatensystems. Jeder der drei Oktaederdiagonalen wurde bei Legung desselben eine besondere Rolle zugewiesen, *so dass wir das der Form* (2) § 12 *zu Grunde liegende Coordinatensystem* z_1, z_2 *auf sechs Weisen wählen können,* den sechs Permutationen von drei Dingen entsprechend. Das entspricht dem Umstande, dass mit gegebener Form und also gegebenen g_2, g_3 die Gleichungen (1) nach M, N aufgelöst sechs Lösungssysteme geben. Infolge des Schlusssatzes in § 11 folgt somit, *dass sich jede Form* f *durch* 96 *lineare Substitutionen der Determinante* ± 1 *in die dritte kanonische Form setzen lässt.*

Solches können wir noch weiter verfolgen an der vollends in Linearfactoren gespaltenen Form (5). Es muss 96 lineare Substitutionen der Determinante ± 1 für z_1, z_2 geben, welche (5) wieder in eine Form derselben Gestalt überführen. Wir können die 96 Transformationen der Formen (5) in einander dadurch zum Ausdruck bringen, dass wir bei unveränderten z_1, z_2 die 96 parallel gehenden linearen Substitutionen der Determinante ± 1 für μ_1, μ_2 aufschreiben. Man bestätigt leicht, dass sie von der folgenden Gestalt sind:

$$\mu_1' = e^{\frac{\pi i \alpha}{4}} \mu_k, \quad \mu_2' = \pm e^{-\frac{\pi i \alpha}{4}} \mu_l,$$

$$\sqrt{2}\mu_1' = e^{\frac{\pi i \alpha}{4}} (\mu_1 + i^\beta \mu_2), \quad \sqrt{2}\mu_2' = \pm e^{-\frac{\pi i \alpha}{4}} (i^{-\beta}\mu_1 - \mu_2), \tag{7}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3, \cdots, 8; \ \beta = 1, 2, 3, 4; \ k, l = 1, 2).$$

Immer vier dieser Substitutionen unterscheiden sich nur durch die Potenz von i, die den Substitutionscoefficienten gemeinsam ist. Beim Fortgang zum Quotienten μ ziehen sich daher die 96 Substitutionen auf nur 24 verschiedene zusammen. *Dabei kommen denn die* 24 *Oktaedersubstitutionen***) *zu Tage:*

$$\mu' = i^\alpha \mu, \ \frac{i^\alpha}{\mu}, \ i^\alpha \cdot \frac{\mu + 1}{\mu - 1}, \ i^\alpha \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \ i^\alpha \cdot \frac{\mu + i}{\mu - i}, \ i^\alpha \cdot \frac{\mu - i}{\mu + i}. \tag{8}$$

*) „Ikos." p. 60 Formel (60).

**) „Ikos." p. 43 Formel (31[a]).

Es würde natürlich möglich sein, auf dem begonnenen Wege weiter zu gehen und noch neue irrationale Invarianten von f herbeizuschaffen. Inzwischen begnügen wir uns mit den nun gegebenen Entwicklungen und gehen zu deren Anwendung auf das elliptische Integral erster Gattung.

§ 14. Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung.

Statt mit dem elliptischen Integral erster Gattung operieren wir hier zweckmässiger mit dessen Differential, welches wir in der Form anschreiben:

$$du = \frac{dz}{\sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e}}.$$

Der Übergang zum Integral erfordert nicht mehr als die Festlegung des Integrationsweges auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche, welche man der Quadratwurzel im Nenner des Differentials entsprechend zu construieren hat. Da es sich indessen vorab nur um das Bildungsgesetz des Differentials handelt, so lassen wir den Integrationsweg, der zum Integral u führen würde, ganz ausser Acht und bleiben also kurzweg bei du.

Anschliessend an die voraufgehenden Erörterungen werden wir übrigens auch hier die homogene Schreibweise z_1, z_2 statt $z = \frac{z_1}{z_2}$ beibehalten, so dass wir zu setzen haben:

$$dz = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{z_2^2},$$

während der Radicand im Nenner des Differentials direct in unsere binäre biquadratische Form $f(z_1, z_2)$ übergeht:

$$du = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}. \tag{1}$$

Diese Schreibweise giebt uns zuvörderst das Mittel, das Verhalten von du gegenüber linearen Transformationen von z in Erfahrung zu bringen. Komme die Substitution der Determinante r:

$$z_1 = az_1' + bz_2', \quad z_2 = cz_1' + dz_2'$$

zur Ausübung, so ist erstlich:

$$z_2 dz_1 - z_1 dz_2 = r(z_2' dz_1' - z_1' dz_2'),$$

während f übergehen möge in:

$$f'(z_1', z_2') = f(z_1, z_2).$$

Demgemäss findet sich für das Differential:

$$\frac{z_2' dz_1' - z_1' dz_2'}{\sqrt{f'(z_1', z_2')}} = r^{-1} \cdot \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}. \tag{2}$$

Das elliptische Differential erster Gattung verhält sich demnach gegenüber linearer Transformation wie eine Covariante der Grundform f und zwar wie eine solche vom Gewichte — 1 (vgl. Math. Ann. Bd. XIV (1878) p. 112).

Jede kanonische Form von f liefert uns jetzt eine Normalform für das Differential du, und da wir die kanonischen Gestalten jederzeit durch Substitutionen der Determinante 1 aus der allgemeinsten Form f herstellten, so geht du, ohne noch einen Factor anzunehmen, direct in die bezügliche Normalform über. Stellen wir nun die Normalformen zusammen, wie sie der ersten, zweiten und dritten kanonischen Form von f entsprechen werden:

$$\text{I.}\quad du = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{z_1(z_2 - z_1)(Az_1 + Bz_2)z_2}},$$

$$\text{II.}\quad du = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{z_2(4z_1^3 - g_2 z_1 z_2^2 - g_3 z_2^3)}},$$

$$\text{III.}\quad du = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{(\mu_2^2 z_1^2 - \mu_1^2 z_2^2)(\mu_1^2 z_1^2 - \mu_2^2 z_2^2)}}.$$

Hier ist aber sehr zu betonen, dass die Variabeln z_1, z_2 jeder einzelnen dieser Formeln besondere Bedeutung haben, indem sie immer durch eine besondere Substitution der Determinante 1 aus den Variabeln z_1, z_2 von (1) hervorgehen.

Sollen wir uns jetzt der sonst üblichen Schreibweise anschliessen, so ist zuvörderst wiederum zurückzukehren zur nichthomogenen Schreibweise z. Solches genügt aber für die Formen I und III noch nicht. I und III nämlich führen zu denjenigen Normalintegralen, welche auch bereits die ältere Theorie kennt. Dabei fällt es denn ins Gewicht, dass man früher nur solche Grössen bei den Normalformen benutzte, welche mit unseren *absoluten* Invarianten übereinkommen. Wir werden demgemäss die rechten Seiten von I und III noch so umzugestalten haben, dass in denselben nur noch das Doppelverhältnis λ bez. die Oktaederirrationalität μ auftritt. So gewinnen wir die Formen:

$$\text{I}^a.\quad \sqrt{B}\cdot du = \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

$$\text{II}^a.\quad du = \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$$\text{III}^a.\quad \mu_2^2 \cdot du = \frac{dz}{\sqrt{(\mu^2 - z^2)(1-\mu^2 z^2)}}.$$

In der letzten Formel führen wir überdies noch die Substitution

$$z = \mu y$$

aus, wodurch letzten Endes erhalten wird:

$$\text{III}^b.\quad \mu_2^2 du = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\mu^4 y^2)}}.$$

§ 15. Benennung der Normalformen. Geschichtliches.

Wie die Theorie der elliptischen Functionen jetzt vorliegt, sind die Formen I^a, II^a und III^b des Differentials erster Gattung die wichtigsten. Die ihnen entsprechenden Integrale führen besondere Benennungen, von denen wir hier noch handeln wollen. Aus II^a entspringt durch Integration eine Normalform des Integrals erster Gattung, die wir, dem allgemeinen Gebrauche folgend, als die Weierstrass'sche benennen. In der That ist Hr. Weierstrass der Erste gewesen, der von dieser Integralform beginnend die Theorie der elliptischen Functionen consequent entwickelt hat*).

Es schliesst das nicht aus, dass die nämliche Integralform von anderen schon vorher bemerkt wurde. So finden sich in einer grossen Abhandlung von Eisenstein**) Formeln, welche sich auf die hier in Rede stehende Normalform des Integrals beziehen, nur dass die Invariantennatur der hier mit g_2 und g_3 bezeichneten Grössen Eisenstein selbstverständlich unbekannt war. Eisenstein's Abhandlung ist vielmehr auf der doppelten Periodicität basiert, ein Princip, das dann hernach auch für Herrn Weierstrass bei der Gewinnung der fundamentalen Function $\sigma(u)$ wesentlich zu Grunde lag. Auf diese interessanten Beziehungen zwischen Eisenstein's Abhandlung und Weierstrass' Theorie kommen wir später nochmals zurück.

Andrerseits ist Hr. Hermite seit lange von der Invariantentheorie aus zur Normalform II^a gelangt, nachdem ja bereits 1845 durch Cayley und Boole die Entdeckung der Invarianten g_2 und g_3 geschehen war. Hermite teilte Hrn. Cayley seine auf die Transformation des Integrals bezüglichen Entwicklungen mit, welcher letztere sie dann bei Gelegenheit zweier Abhandlungen***) weiteren Kreisen zugänglich machte. Die Transformation auf die Normalform geschieht dortselbst übrigens nicht vermittelst linearer Substitutionen, sondern vielmehr durch Anwendung einer merkwürdigen Transformation vierten Grades, über welche man das Nähere in der zweiten der eben genannten Cayley'schen Arbeiten findet.

Die Form I^a des Differentials du führt auf das Riemann'sche *Normalintegral*:

*) In seinen Berliner Vorlesungen.

**) *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind*, Crelle's Journal Bd. 35 (1847) oder Eisenstein's Mathem. Abhandl. (Berlin, 1847) p. 213.

***) Man sehe Cr. J. Bd. 50 (1855) p. 287, sodann namentlich „*sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques*", Cr. J. Bd. 55 (1858) p. 23 u. f.

(1) $$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}},$$

eine Benennung, die darin ihren Grund hat, weil man die bei Jacobi und anderen vorkommenden Entwicklungen immer auf I^a als Normalform beziehen muss, wenn man den allgemeinen von Riemann in der Theorie der Abel'schen Functionen gegebenen Definitionen gerecht werden will. Übrigens ist diese Integralform (1) auch Jacobi keineswegs fremd. Nur hat derselbe den Sachverhalt dadurch unkenntlich gemacht, dass er wiederholt, wenn er zu einem Integrale (1) kommt, um Anschluss an die ältere Bezeichnung von Legendre zu erreichen, die sogleich unter (3) genannte quadratische Transformation in Anwendung bringt. Übrigens ist (1) diejenige Normalform des Integrals, welche der Auffassungsweise der neueren synthetischen Geometrie am nächsten steht, insofern ja λ das Doppelverhältnis der vier Verschwindungspunkte von f vorstellt.

Die Form III^b endlich ergiebt das Legendre'sche *Normalintegral*:

(2) $$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^4 z^2)}}.$$

Dass man dasselbe durch *lineare* Transformation von z erreichen kann, und dass dabei die verschiedenen Werte der Constanten, die wir hier μ nennen, sehr einfach linear mit einander zusammenhängen, hat Abel*) wiederholt hervorgehoben. Aber es ist dann wieder Hr. Cayley gewesen, der von der Invariantentheorie aus dieser Normalform (2) gerecht wurde, indem er die Beziehung derselben zu den rationalen Invarianten aufwies**).

Die Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Schreibweise würde übrigens erst dadurch erzielt werden, dass wir in (1) und (2) k^2 statt λ bez. μ^4 schreiben. Die Bedeutung der Grösse k, so wie sie in der Litteratur auftritt, erscheint hiernach als eine doppelte. Das eine Mal ist k die Quadratwurzel aus dem Doppelverhältnis λ, das andere Mal das Quadrat der Oktaederirrationalität μ. Dass man für beide Grössen dieselbe Bezeichnung wählen konnte, hat seinen Grund in dem Umstande, dass das Integral, welches wir hier das Riemann'sche nennen, durch die einfache Substitution:

(3) $$z = y^2$$

in ein mit 2 multipliciertes Legendre'sches Integral übergeht:

(4) $$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\lambda z)}} = 2\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda y^2)}}.$$

*) Man vgl. z. B. die neue Ausgabe der Abel'schen Werke von Sylow und Lie, p. 459 Formel (9).

**) Abschnitt III der schon gen. Arbeit in Cr. J. Bd. 55 p. 21 u. f., woselbst sich die Elemente finden, aus denen man die Oktaedergleichung aufbauen könnte.

Da wir indessen durchgängig nur *lineare Substitutionen* für die Transformation des Integrals zugelassen haben, so können wir der so gewonnenen Legendre'schen Normalform, in deren Nenner das Doppelverhältnis λ auftritt, wenigstens an dieser Stelle nicht Rechnung tragen. Wir werden also, um Missverständnissen zu entgehen, überhaupt die Bezeichnung k, wo es angeht, meiden und weiterhin zwischen dem Doppelverhältnis λ und der Oktaederirrationalität μ unterscheiden. Die Bezeichnung „*Modul*" aber, die man gewöhnlich dem k ausschliesslich beilegt, *übertragen wir gleichförmig auf die absoluten Invarianten* J, λ, μ, sowie auf eine grosse Reihe weiterer Grössen, die wir späterhin kennen lernen werden.

Zweites Kapitel.

Von den Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung.

Im vorigen Kapitel sind mehrere Invarianten der biquadratischen binären Form eingeführt und in ihren gegenseitigen Beziehungen untersucht worden. Wie wir schon oben sagten, würde es nicht schwer halten, die Zahl dieser Invarianten auf algebraischem Wege durch neu hinzukommende noch weiter zu mehren; doch würden wir dadurch nur unseren späteren Arbeitsstoff teilweise anticipieren. Es soll demnach die weitere Untersuchung algebraischer Invarianten hier unterbrochen werden, wir untersuchen vielmehr sie überspringend gewisse andere Grössen, die den Namen *transcendenter Invarianten der biquadratischen binären Form* verdienen. Es sind dies keine anderen, als die Perioden desjenigen elliptischen Integrals erster Gattung, in dessen Integrand die eben gemeinte Form unter dem Quadratwurzelzeichen eingeht.

§ 1. Paare primitiver Perioden des Integrals erster Gattung.

Zum Zwecke der nächsten Überlegungen schreiben wir das elliptische Integral erster Gattung in der nichthomogenen Form:

$$(1) \qquad u = \int \frac{dz}{y}, \quad y = \sqrt{az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e}.$$

Zur rechts stehenden Irrationalität y gehört eine Riemann'sche Fläche, welche die z-Ebene doppelt überdeckt. Die vier Verzweigungspunkte, in denen die beiden Blätter dieser Fläche zusammenhängen, sind die vier Punkte z, in denen y^2 verschwindet. Wir denken diese vier Punkte in beliebiger Ordnung durch Nummern 1, 2, 3, 4 unterschieden und nehmen etwa an, dass sich beide Blätter zwischen 1 und 2 und dann auch zwischen 3 und 4 in Verzweigungsschnitten durchsetzen. (Vgl. die sogleich folgende Figur.)

Jeder geschlossene Weg auf der Riemann'schen Fläche liefert alsdann für das Integral u, wofern wir es von einem Punkte dieses Weges beginnend über dessen ganze Ausdehnung hinführen, einen Wert, den wir

als eine Periode des Integrals u bezeichnen. Lässt sich der in Rede stehende geschlossene Weg ohne Zerreissen auf einen Punkt zusammenziehen, so wird freilich der zugehörige Integralwert verschwinden. Solche Wege schliessen wir daher von der Benennung der Periodenwege aus.

Insbesondere ziehen wir uns jetzt auf der Fläche einen solchen Periodenweg, der nur der einen Bedingung genügen soll, *sich selbst*

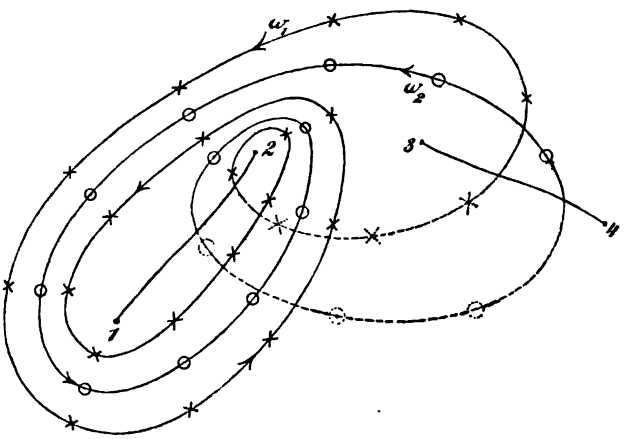


Fig. 1.

nicht zu überkreuzen. Ein Beispiel ist der in Fig. 1 mit Kreuzen versehene, längs seines Verlaufs im unteren Blatte punktierte Weg, über welchen das Integral u in der Pfeilrichtung geführt die Periode ω_1 geben möge.

Man sehe jetzt den beschriebenen Periodenweg als einen *Querschnitt* der Fläche an. Immer ist es dann noch möglich, vom einen Ufer des gezogenen Querschnitts auf geschlossener Bahn zum gegenüberliegenden Ufer zu gelangen, ohne jenen Querschnitt zu überspringen*). Diese neue geschlossene Bahn können wir dann ersichtlich auch derart annehmen, dass sie sich selbst nirgends überkreuzt. So z. B. leistet in obiger Figur der zweite, zur Unterscheidung vom ersten mit Kreisen versehene Weg das Verlangte. Möge das Integral, in der Pfeilrichtung über ihn geführt, die Periode ω_2 liefern.

Führen wir den neuen auf ω_2 führenden Weg gleichfalls als Querschnitt der Riemann'schen Fläche ein, so ist dieselbe nun derart

*) Zur näheren Erläuterung ziehe man neben Riemann's Originalschriften namentlich heran C. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale* (zweite Auflage, 1884). Doch sind die sogleich zu nennenden primitiven Periodenpaare dort nicht in Riemann's ursprünglicher Allgemeinheit eingeführt, an der wir doch im Texte festgehalten haben.

zerschnitten, dass jeder dritte noch hinzukommende irgendwie gezogene Querschnitt sie in getrennte Stücke zerfällt. Durch jene beiden Querschnitte ist unsere Fläche somit in eine *einfach zusammenhängende* zerlegt.

In dieser einfach zusammenhängenden Fläche ist aber das Integral u eine *eindeutige* Function seiner oberen Grenze. Es finden dabei in sehr bekannter Weise für diese eindeutige Function in gegenüberliegenden Uferpunkten jedes der beiden Querschnitte Wertdifferenzen statt, die längs des ganzen Querschnitts constant sind. Für den Fall der Figur 1 wird diese Differenz längs des ersten Querschnitts ω_2, längs des anderen ω_1 sein.

Führen wir jetzt das Integral von festgewählter unterer Grenze zu einer vorgeschriebenen oberen, so sei der zwischen beiden Grenzen verlaufende Integrationsweg einmal ein völlig beliebiger auf der unzerschnittenen Fläche, das andere Mal auf die zerschnittene Fläche eingeschränkt. Während wir dort u' als Integralwert erhalten, möge im zweiten Falle u kommen. Dann ist es eine bekannte Folgerung aus den beschriebenen Verhältnissen, *dass*

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \tag{2}$$

ist, mit ganzen Zahlen m_1, m_2. Zudem ist die Vieldeutigkeit des zu der unzerschnittenen Fläche gehörigen u' eine derartige, *dass in* (2) *jede gewünschte Combination positiver oder negativer ganzer Zahlen* m_1, m_2 *durch geeignete Integrationswege und zwar noch in der mannigfaltigsten Weise erreicht werden kann.*

Nach dem eben gewonnenen Satze lässt sich jede Periode des Integrals u aus ω_1, ω_2 in der Form $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ darstellen, und wir haben, wofern m_1, m_2 alle Combinationen ganzer Zahlen durchlaufen, geradezu die Gesamtheit der Perioden von u erhalten. In diesem Sinne heissen ω_1, ω_2 *ein Paar primitiver Perioden.* Unsere beiden obbeschriebenen Periodenwege, wie sie z. B. in Fig. 1 auf die besonderen Perioden ω_1, ω_2 führten, können nun, wie man leicht erkennt, noch in der mannigfaltigsten Art gewählt werden, so dass man denn auch primitive Periodenpaare in mannigfaltigster Weise erhalten kann. Wir wollen eine Beziehung zwischen diesen primitiven Paaren aufstellen. Sei ω_1', ω_2' ein neues Paar primitiver Perioden, so wird sich die Gesamtheit der Perioden von u nunmehr durch $(m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2')$ darstellen, wo m_1', m_2' alle Combinationen ganzer Zahlen durchlaufen. Der Wertcomplex $(m_1'\omega_1' + m_2'\omega_2')$ wird daher in seiner Gesamtheit mit dem anderen $(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ geradezu coincidieren. Insbesondere muss sowohl ω_1', wie ω_2' eine ganzzahlige Combination von ω_1, ω_2 sein:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2. \tag{3}$$

Aber auch umgekehrt müssen ω_1, ω_2 ganzzahlig in ω_1', ω_2' darstellbar sein. Die Gleichungen (3) sind demnach ganzzahlig umkehrbar, und wir haben den Satz: *Bilden neben* ω_1, ω_2 *auch* ω_1', ω_2' *ein Paar primitiver Perioden, so sind in den zwischen ihnen bestehenden Gleichungen* (3) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *ganze Zahlen der Determinante* ± 1:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1. \tag{4}$$

§ 2. Die Perioden als Invarianten. Abhängigkeit von den rationalen Invarianten. Normierung der Perioden.

Wir haben bereits in § 14 des voraufgehenden Kapitels ausführlich erörtert, in welchem Sinne das Differential des Integrals u eine *Covariante der Grundform* $f(z_1, z_2)$ heissen sollte. Es war das eine Deutung der Gleichung:

$$\frac{z_2' dz_1' - z_1' dz_2'}{\sqrt{f'(z_1', z_2')}} = r^{-1} \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}. \tag{1}$$

Wir integrieren jetzt diese Gleichung über einen beliebigen Periodenweg, den wir einerseits auf der über der z-Ebene construierten Riemann'schen Fläche, sodann entsprechend auf der Fläche für $\sqrt{f(z_1', z_2')}$ ziehen. Möge dabei

$$\omega = \int \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}$$

und entsprechend für die transformierte Fläche ω' erhalten werden. Dann ist nach Gleichung (1)

$$\omega' = r^{-1}\omega. \tag{2}$$

Jede Periode des Integrals erster Gattung geht somit bei Ausführung der hier in Betracht gezogenen linearen Transformation in sich selbst multipliciert mit der $(-1)^{\text{ten}}$ *Potenz der Substitutionsdeterminante über.* Wir können sie demnach eine *transcendente Invariante der Grundform* f vom Gewichte (-1) nennen. Dabei ist sie vermöge ihrer Definition homogen von der $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{ten}}$ Dimension in den Coefficienten der Grundform.

Als Invariante ist ω von den fünf Coefficienten von f nur insoweit abhängig, dass sie auch als Function von g_2 und g_3 allein betrachtet werden kann. In der That konnten wir ja durch lineare Transformation der Determinante 1, bei welcher jede Periode ω, wie wir sahen, völlig ungeändert bleibt, die Weierstrass'sche Normalform für das Integral erhalten. Alsdann ist aber

$$\omega = \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}; \tag{3}$$

es hängt also ω in der That nur von g_2 und g_3 ab. Jetzt ist das

Problem, mit dem wir uns in der Folge beschäftigen, *die Abhängigkeit der Perioden von den rationalen Invarianten g_2, g_3 des näheren zu untersuchen.*

Eine erste Erleichterung bei diesem Unternehmen schaffen wir uns durch die Substitution:

$$y = \frac{g_3}{g_2} z,$$

wodurch Gleichung (3) die neue Form erhält:

$$\omega \sqrt{\frac{g_3}{g_2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{27J}{J-1}(z+1)}}. \tag{4}$$

Wenn wir hiernach die Perioden als Functionen der beiden unabhängigen Variabelen:

$$X = \frac{g_2}{g_3}, \quad J \tag{5}$$

auffassen, statt sie auf g_2, g_3 zu beziehen, so ist der Erfolg der, dass die Abhängigkeit von X so überaus einfach ist, dass wir kein Wort mehr darüber zu verlieren brauchen und somit nur noch die Abhängigkeit von J der Betrachtung unterwerfen müssen.

Es kommt dies ersichtlich darauf hinaus, dass wir jede Periode ω durch den Zusatzfactor $\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$ „normieren", wodurch sie zur *absoluten Invariante:*

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{g_3}{g_2}} \tag{6}$$

wird. Als solche ist die normierte Periode Ω nur noch von der *einen* unabhängigen Variabelen J allein abhängig, und est ist die Art dieser Abhängigkeit, die wir nun zu untersuchen haben. Wir könnten uns dabei direct der Integralformen der Perioden und der ihnen zu Grunde liegenden geschlossenen Wege bedienen; inzwischen würden wir zur strengen Durchbildung dieser Methode noch gewisse andere Hilfsmittel der Untersuchung nötig haben, deren Entwicklung erst dem folgenden Kapitel vorbehalten bleibt.

Wir ziehen hier vielmehr mit Vorteil die Thatsache heran, *dass die Perioden als Functionen von J einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.* Hierauf weist schon der Umstand hin, dass sich jede Periode Ω linear und ganzzahlig in zwei primitiven Ω_1, Ω_2 darstellt:

$$\Omega = m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2.$$

Man findet hieraus nämlich durch Differentiation:

$$\frac{d\Omega}{dJ} = m_1 \frac{d\Omega_1}{dJ} + m_2 \frac{d\Omega_2}{dJ},$$
$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} = m_1 \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2} + m_2 \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2},$$

und sodann durch Elimination von m_1, m_2:

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{d\Omega}{dJ} \cdot \left\{ \begin{matrix} \Omega_1 \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2} - \Omega_2 \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2} \\ \hline \Omega_2 \frac{d\Omega_1}{dJ} - \Omega_1 \frac{d\Omega_2}{dJ} \end{matrix} \right\}$$
$$+ \Omega \cdot \left\{ \begin{matrix} \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2} \cdot \frac{d\Omega_2}{dJ} - \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2} \cdot \frac{d\Omega_1}{dJ} \\ \hline \Omega_2 \frac{d\Omega_1}{dJ} - \Omega_1 \frac{d\Omega_2}{dJ} \end{matrix} \right\} = 0.$$

Nun sieht man: die beiden hier auftretenden Coefficienten hängen zufolge der Determinantenform ihrer Nenner und Zähler nicht mehr von der besonderen Auswahl der Perioden Ω_1, Ω_2 ab, sondern bleiben die nämlichen, wenn wir irgend ein anderes Paar Ω_1', Ω_2' zur Darstellung der übrigen zu Grunde legen. Sie müssen also von J *eindeutig* abhängen. In der That werden wir sogleich nachweisen, dass die in Rede stehenden Coefficienten *rationale* Functionen von J sind.

Indem sich so zeigt, dass jede beliebige Periode Ω der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{d\Omega}{dJ} \cdot r_1(J) + \Omega \cdot r_2(J) = 0$$

genügt, haben wir den Anschluss gewonnen an die ausgebildete Theorie dieser Gleichungen, die wir demnach für die Lösung unserer Frage heranziehen werden. Somit ist unsere nächste Aufgabe, die wirkliche Form dieser beiden rationalen Coefficienten r_1, r_2 festzustellen*).

*) Statt die Perioden ω, wie es im Texte geschah, durch den Zusatzfactor $\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$ zu absoluten Invarianten zu machen, kann man auch andere ähnlich gebildete Factoren in Anwendung bringen, die die Coefficienten der Grundform f in der Dimension $\frac{1}{2}$ enthalten. In einer weiterhin noch zu nennenden Arbeit von Bruns, *Über die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung* (Dorpat 1875, abgedruckt Math. Ann. XXVII), ist zu solchem Zwecke z. B. der Factor $\frac{\sqrt[6]{g_3^5}}{g_2}$ angewandt. Von der Dimension $\frac{1}{2}$ in den Coefficienten von f ist auch $\sqrt[12]{\Delta}$, so dass man auch $\sqrt[12]{\Delta} \cdot \omega$ als normierte Perioden ansetzen könnte. Solches thut Klein in seiner Arbeit: *Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen* 5ten *Grades*, Math. Ann. Bd. XIV p. 111 (1878).

§ 3. Aufstellung der Differentialgleichung für die normierten Perioden.

Wir müssen hier vorübergehend auch das Integral zweiter Gattung brauchen, das wir gleichfalls in Weierstrass' Normalform hinschreiben:

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}.$$

Hier führen wir dann gleichfalls die Substitution $y = \frac{g_3}{g_2} s$ aus, und es mögen nun die beiden Integrale der ersten und zweiten Gattung über den nämlichen übrigens beliebigen Periodenweg geführt die Werte liefern:

$$(1) \qquad \Omega = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + g(z+1)}}, \qquad -\mathsf{H} = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3 + g(z+1)}}.$$

Zur Abkürzung ist dabei

$$(2) \qquad \frac{27J}{1-J} = g$$

gesetzt.

Die Quadratwurzel im Nenner der beiden Integranden nennen wir kurz R und gewinnen dann durch Differentiation nach g:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dg} &= -\int \frac{dz}{2R^3} - \int \frac{z\,dz}{2R^3}, \\ \frac{d\mathsf{H}}{dg} &= \int \frac{z\,dz}{2R^3} + \int \frac{z^2 dz}{2R^3}. \end{aligned}$$

Zur Auswertung der drei hierbei auftretenden Integrale:

$$\int \frac{dz}{2R^3}, \quad \int \frac{z\,dz}{2R^3}, \quad \int \frac{z^2 dz}{2R^3}$$

beachten wir, dass der Quotient $\frac{z^\alpha}{R}$ für alle drei Werte $\alpha = 0, 1, 2$ auf der Riemann'schen Fläche eindeutig ist, so dass das Integral

$$\int d\left(\frac{z^\alpha}{R}\right) = 0$$

sein wird, wenn wir es wieder über die der Integration hier überhaupt zu Grunde liegende Periodenbahn hinführen. Entwickelt man inzwischen erst das unter dem letzten Integralzeichen stehende Differential und integriert hernach, so gewinnt man der Reihe nach für $\alpha = 0, 1, 2$ die Relationen:

Die Normierung des Textes liegt übrigens auch der Dissertation von Nimsch zu Grunde: *Über die Perioden der elliptischen Integrale* 1ster *und* 2ter *Gattung*, Leipzig (1886). Endlich finden wir noch in Kap. X des Halphen'schen Buches die normierten Perioden $\sqrt[12]{\Delta} \cdot \omega$, wie auch die anderen $\sqrt[6]{g_3} \cdot \omega$ und $\sqrt[4]{g_2} \cdot \omega$.

$$12\int\frac{z^2dz}{2R^3}+g\int\frac{dz}{2R^3}=0,$$
$$2g\int\frac{zdz}{2R^3}+3g\int\frac{dz}{2R^3}=\frac{1}{2}\Omega,$$
$$2g\int\frac{z^2dz}{2R^3}+3g\int\frac{zdz}{2R^3}=\frac{1}{2}\mathsf{H}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den drei fraglichen Integralen ergiebt für dieselben:

$$\int\frac{z^2dz}{2R^3}=\frac{2\mathsf{H}-3\Omega}{8(g+27)},\qquad\int\frac{zdz}{2R^3}=\frac{g\Omega+18\mathsf{H}}{4g(g+27)},$$
$$\int\frac{dz}{2R^3}=\frac{9\Omega-6\mathsf{H}}{2g(g+27)}.$$

Vermöge dieser Darstellungen gehen die Gleichungen (3) in die beiden folgenden über:

$$4g(g+27)\frac{d\Omega}{dg}+(18+g)\Omega+6\mathsf{H}=0,$$
$$4g(g+27)\frac{d\mathsf{H}}{dg}+\frac{1}{2}g\Omega-(g+18)\mathsf{H}=0.$$

Hier führen wir jetzt wieder auf Grund der Formeln:

$$g=\frac{27J}{1-J},\qquad\frac{dg}{dJ}=\frac{27}{(1-J)^2}$$

J selbst als unabhängige Variabele ein, wobei sich die beiden zuletzt erhaltenen Gleichungen ohne Mühe in die Gestalt umrechnen:

$$\begin{aligned}36\cdot J(J-1)\frac{d\Omega}{dJ}&=3(J+2)\Omega-2(J-1)\mathsf{H},\\ 24\cdot J(J-1)\frac{d\mathsf{H}}{dJ}&=3J\Omega-2(J+2)\mathsf{H}.\end{aligned}\tag{4}$$

Nochmalige Differentiation der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt:

$$36J(J-1)\frac{d^2\Omega}{dJ^2}+(69J-42)\frac{d\Omega}{dJ}+2(J-1)\frac{d\mathsf{H}}{dJ}-3\Omega+2\mathsf{H}=0,$$

eine Gleichung, die wir mit den beiden voraufgehenden zur Elimination von H und $\frac{d\mathsf{H}}{dJ}$ verbinden. *Dadurch erhalten wir endlich die in Aussicht genommene Differentialgleichung*) in der Form:*

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2}+\frac{1}{J}\cdot\frac{d\Omega}{dJ}+\frac{\frac{31}{144}J-\frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}\cdot\Omega=0.\tag{5}$$

*) Wählt man eine andere Normierung für die Perioden, so fallen übrigens die Coefficienten der Differentialgleichung entsprechend anders aus. So z. B. kommen in den soeben genannten Abhandlungen von Bruns und Klein an ent-

§ 4. Fundamentalsätze über die Abhängigkeit der normierten Perioden von J.

Zur zweckmässigen Verwertung der Differentialgleichung (5) ziehen wir jetzt Herrn Fuchs' Abhandlung*) „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen" heran, deren Grundzüge wir als dem Leser bekannt voraussetzen. Das kurze Referat über einige zunächst zu gebrauchende Sätze beziehen wir sogleich auf die Differentialgleichung *zweiter* Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + r_1(x)\frac{dy}{dx} + r_2(x)y = 0. \tag{1}$$

Es liegt alsdann die Aufgabe vor, die Integrale y in ihrem Verlauf in der complexen x-Ebene zu verfolgen. Dabei gelten als *singuläre Punkte* dieser Ebene diejenigen, in denen eine der rationalen Functionen r unstetig wird, und es ist ihnen unter Umständen auch noch der Punkt $x = \infty$ als singulär zuzuordnen, was man nach der Substitution $x' = \frac{1}{x}$ durch Untersuchung für die Umgebung von $x' = 0$ zu entscheiden hat. Das Verhalten der Integrale y von (1) in einem dieser singulären Punkte verlangt besondere Betrachtung, die wir hinausschieben.

Sei daher vorab x_0 ein gewöhnlicher Punkt der x-Ebene, so gilt vor allen der Hauptsatz: In der Umgebung von x_0 lässt sich das allgemeine Integral y in eine nach positiven ganzen Potenzen von $(x - x_0)$ fortschreitende Reihe**) entwickeln, welche convergent ist in einem den Punkt x_0 umgebenden Kreise, der bis zum nächsten singulären Punkte gerade heranreicht. Die Allgemeinheit des so entwickelten Integrals ist dann dadurch gewahrt, dass sein eigener Wert und der seiner ersten Ableitung nach x im Punkte x_0 völlig willkürlich wählbar ist. Elementare Überlegungen führen diese Willkürlichkeit auf die andere Form über,

---

sprechender Stelle hypergeometrische Differentialgleichungen zu Tage. Diese Gleichungen subsumieren sich übrigens alle als Specialfälle unter die Differentialgleichung *der Riemann'schen P-Function*. Inzwischen wird dieser Umstand, um die Entwicklung nicht zu abstract zu gestalten, weiterhin nicht benutzt. Wir verweisen vielmehr in diesem Betracht auf „Ikos." p. 80 u. f., wo es sich in der That um Fragestellungen handelt, zu denen die hier vorliegenden in engster Beziehung stehen, wie später noch deutlich werden wird. — Die Kenntnis einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Perioden als Functionen vom Modul k^2 besass bereits Legendre. Die Aufstellung der Differentialgleichung unter Zugrundelegung der rationalen Invarianten geht auf Hrn. Bruns zurück.

*) Crelle's Journ. Bd. 66 p. 121 (1866).

**) Wir geben hier ein für allemal die Erklärung, dass bei Gelegenheit solcher Reihenentwicklungen, im Falle $x_0 = \infty$ ist, $(x - x_0)$ nichts anderes als $\left(\frac{1}{x}\right)$ bedeuten soll.

dass das allgemeine Integral y von (1) mit Hilfe zweier willkürlichen Constanten c_1, c_2 aus zwei particulären Integralen y_1, y_2 in der Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

darstellbar ist. Wenigstens eines dieser beiden Integrale besitzt eine Reihenentwicklung, in der das constante Glied nicht fehlt; fehlt dasselbe in der Reihenentwicklung des anderen, so tritt in derselben sicher das Glied erster Dimension auf. In solchen zwei particulären Integralen haben wir dann den wichtigen Begriff des *Fundamentalsystems* gewonnen.

Wir schicken uns an, aus diesem kurzen Berichte besondere Sätze über die Abhängigkeit der Perioden Ω von J zu entnehmen.

In dieser Hinsicht haben wir erstlich zu constatieren: *Als singuläre Punkte der J-Ebene sind* $J = 0$ *und* $J = 1$ *zu nennen, und wir müssen ihnen als dritten auch noch* $J = \infty$ *hinzugesellen,* wie man denn leicht nach der Substitution $J' = \frac{1}{J}$ die singuläre Natur des Punktes $J' = 0$ einsieht. Irgend eine beliebig herausgegriffene normierte Periode $\Omega(J)$ ist daher, als Integral der Differentialgleichung (5) § 3, eine *analytische Function* ihres Argumentes J und zwar ist sie *in der Umgebung jedes Punktes J eindeutig und stetig, ausgenommen die singulären Stellen* $J = 0, 1, \infty$.

Wir grenzen uns ferner, der bestimmten Ausdrucksweise wegen, in der complexen J-Ebene einen einfach zusammenhängenden Bereich ab, der keinen der singulären Punkte enthält, und denken J auf diesen Bereich beschränkt. Wir werden hier dann sogleich wieder die primitiven Periodenpaare aus § 2 hereinziehen und ein besonderes Paar Ω_1, Ω_2 auswählen. In diesen beiden Grössen werden wir dann gerade ein Fundamentalsystem für den eingegrenzten Bereich gewonnen haben. Das allgemeinste Integral unserer Differentialgleichung ist alsdann für diesen Bereich dargestellt durch

$$c_1 \Omega_1 + c_2 \Omega_2$$

mit willkürlichen Constanten c_1, c_2. Als ein Ausschnitt aus der Gesamtheit dieser Integrale erscheinen die „Perioden" Ω selbst

$$\Omega = m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2, \tag{2}$$

wo jetzt m_1, m_2 *ganze positive oder negative Zahlen* sind.

Was uns nach Aufstellung dieser Sätze übrig bleibt, ist, dass wir nachsehen, *wie sich eine Periode* $\Omega(J)$ *ändert, wenn wir das Argument J einen geschlossenen Weg um einen der singulären Punkte zurücklegen lassen.* Es soll sich also um die Frage handeln, ob $\Omega(J)$ eine vieldeutige

Function ist, und wenn dies der Fall ist, von welcher Art die Vieldeutigkeit ist. Wir werden hierbei im Grunde jede Periode erledigt haben, wenn wir die gerade angezeigte Untersuchung für das primitive Paar Ω_1, Ω_2 im besonderen durchgeführt haben; denn jedes Ω stellt sich in Ω_1, Ω_2 in der Form (2) dar. Diese beiden besonderen Perioden Ω_1, Ω_2 müssen wir dann aber immer neben einander stehend betrachten.

§ 5. Auswahl eines besonderen primitiven Periodenpaares.

Die sogleich zu unternehmende Erörterung über die Vieldeutigkeit der Perioden setzt voraus, dass wir das primitive Paar Ω_1, Ω_2 unter den unendlich vielen möglichen Fällen in durchaus bestimmter Weise auswählen. Zu dem Ende gehen wir auf die folgende Integralform der Perioden zurück:

$$\omega = \int \frac{dy}{2\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}.$$

Drei Verzweigungspunkte der doppelt überdeckten y-Ebene liegen dann im Endlichen bei e_1, e_2, e_3 und umgeben nach Massgabe der vom vorigen Kapitel her bekannten Relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

den Nullpunkt $y = 0$. Der vierte Verzweigungspunkt ist nach $y = \infty$ geworfen, und wir denken uns entgegen der Auffassung der Fig. 1 diesen vierten Verzweigungspunkt mit den drei eben genannten durch je einen Verzweigungsschnitt verbunden. Die entstehende Figur sehe man weiter unten, wo dann bereits die Periodenwege eingetragen sind.

Wir setzen nun zuvörderst das von e_1, e_2, e_3 gebildete Dreieck als ungleichseitig voraus. Dann verteilen wir die drei Benennungen e_1, e_2, e_3 auf die Verzweigungspunkte derart, *dass e_3 der grössten, e_2 der kleinsten Seite dieses Dreiecks gegenüber liegt.*

Demnächst unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem die Folge e_1, e_2, e_3 den Punkt $y = 0$ im positiven oder negativen Drehsinn*) umgiebt. Die letztere Lage wollen wir kurz als Fall I bezeichnen und uns für denselben der durch Figur 2 (folg. Seite) angezeigten Festlegung der Perioden bedienen. Im anderen Falle, den wir als II citieren, empfiehlt sich die in Fig. 3 angegebene Auswahl der Periodenwege.

Es würde nunmehr abgesehen von einigen gleich zu erörternden Grenzlagen des Dreiecks der e alles bestimmt sein, hätten wir zugleich noch festgesetzt, welches Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$

*) Die positive Umlaufung von $y = 0$ ist dabei in üblicher Weise als diejenige gedacht, bei der man den Punkt $y = 0$ zur Linken hat.

etwa in einem Punkte des oberen Blattes zutreffen soll. Man sieht, dass ein Wechsel der Festsetzung in dieser Beziehung einen simultanen Zeichenwechsel für ω_1, ω_2 nach sich zieht. Wir behalten uns vor, hierüber gelegentlich zweckmässig zu verfügen.

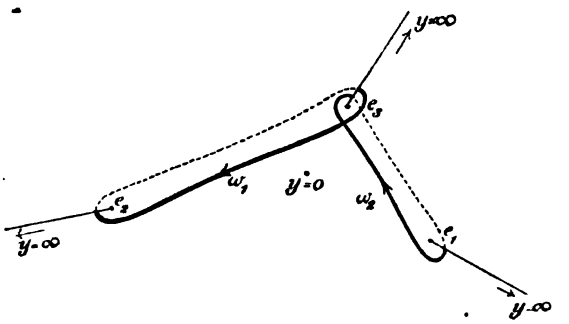


Fig. 2.

Eine besondere Lage für die drei Punkte e haben wir nun erstlich, im Falle dieselben *einer* Geraden angehören. Dabei wird e_3 zwischen e_1 und e_2 gelegen sein und zwar entweder in der Mitte zwischen beiden Punkten oder näher an e_1. Man sieht, *dass unter diesen Umständen die Fälle I und II einen Unterschied nicht mehr darbieten.*

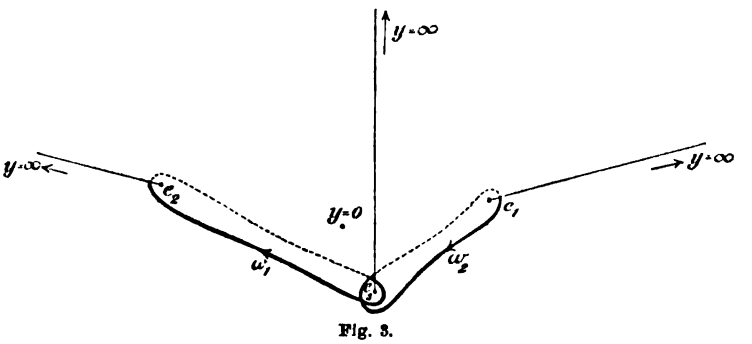


Fig. 3.

Überdies kann es eintreten, dass das Dreieck der Punkte e entweder gleichschenklig oder gar gleichseitig wird. Dann kann man durch zweckmässige Verteilung der Bezeichnungen e_i immer sowohl die Anordnung I wie auch die des Falles II erzielen. Aber man überzeugt sich leicht, *dass die im Falle I gewonnenen Perioden andere sind, wie diejenigen des zweiten Falles.* Um also doch stets ein ganz bestimmtes Periodenpaar ω_1, ω_2 zu fixieren, entschliessen wir uns, *im Falle eines gleichschenkligen (bez. gleichseitigen) Dreiecks stets der Anordnung I den Vorzug zu geben.*

§ 6. Zerschneidung der J-Ebene. Bedeutung der Festsetzungen des vorigen Paragraphen.

Stellt ein einzelnes Periodenpaar, das wir nun gleich wieder in normierter Form $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ annehmen, in der That ein Paar vieldeutiger Functionen von J dar, so wird man zum Studium dieses Functionenpaars eine mehrblättrige Fläche über der J-Ebene construieren, in welcher unsere beiden Functionen eindeutig sind. Mögen sich die Verhältnisse nun im weiteren gestalten, wie sie wollen, jedenfalls haben wir im Periodenpaar $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$, das durch Normierung aus den eindeutig bestimmten Perioden ω_1, ω_2 des vorigen Paragraphen hervorgeht, ein erstes Zweigpaar für solche zwei einander zugesellte analytische Functionen von J, wie wir sie hier betrachten.

Will man nun überhaupt einen einzelnen Zweig einer mehrdeutigen Function betrachten, so geht dem anschaulich parallel, dass man aus der bezüglichen Riemann'schen Fläche ein einzelnes Blatt herauslöst, das man gerade zum Träger jenes Zweiges gemacht hatte. Nun aber folgt aus § 4, *dass für den Fall unserer Functionen $\Omega(J)$ Verzweigungspunkte der zugehörigen Fläche über J jedenfalls nur an den singulären Stellen $J = 0,\ 1,\ \infty$ eintreten können.* Wir müssen demnach aus der gemeinten Fläche ein einzelnes Blatt herauslösen können, wenn wir dasselbe etwa *längs des von $J = -\infty$ über $J = 0$ bis $J = 1$ verlaufenden Teiles der reellen J-Axe* vom Zusammenhang mit den anderen Blättern abschneiden. So haben wir Fig. 4 erlangt, in welcher zugleich die ganze J-Ebene durch die reelle Axe in zwei *Halbebenen*

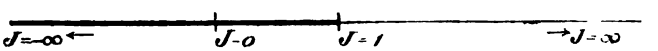


Fig. 4.

zerlegt erscheint. Man unterscheidet diese Halbebenen als positive und negative je nach dem in ihnen stattfindenden Zeichen des imaginären Bestandteils von J.

Mit der solchergestalt erzielten Zerschneidung der J-Ebene haben wir uns nun den Bestimmungen des vorigen Paragraphen völlig angepasst, so dass es möglich erscheint, *das herausgelöste Blatt zum Träger der dort definierten beiden Zweige $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ zu machen.* Wir wollen dies noch ein wenig näher erläutern und benutzen dabei auch noch das Doppelverhältnis der Verzweigungspunkte

$$\lambda = \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1} \tag{1}$$

als Mittelglied der Rechnung.

Es ist geometrisch evident, dass der Wert von λ und also auch der von J *allein* von der gegenseitigen Lage der drei Verzweigungspunkte e_i abhängt, und dass somit für jedes ähnliche Dreieck dreier Punkte e_1', e_2', e_3' der entsprechend gebildete Ausdruck (1) wieder denselben Wert λ giebt, ohne dass dabei etwa an der Bedingung $e_1' + e_2' + e_3' = 0$ festgehalten zu werden brauchte. Davon Gebrauch machend setzen wir an Stelle irgend eines vorgegebenen Dreiecks mit den Ecken e_i ein solches ähnliches Dreieck mit den Ecken e_i', dass insbesondere $e_2' = 0$ und $e_1' = 1$ ist. Damit liegt dann auch die dritte Ecke dieses neuen Dreiecks völlig fest, sagen wir etwa bei $y = e$, und nun interpretiert man sofort die Festsetzungen des vorigen Paragraphen dahin, *dass e auf den in Fig. 5 dargestellten Kreisabschnitt eingeschränkt erscheint.* Dieser Kreisabschnitt wird durch die reelle y-Axe in zwei symmetrische Hälften zerlegt, welche, wie in der Figur angezeigt, dem Falle I bez. II entsprechen. Zudem ist es die Folge der Festsetzungen am Schlusse des letzten Paragraphen, dass von den Randpunkten jenes Kreisabschnittes nur diejenigen als Ecken eines Dreiecks fungieren werden, welche dem stärker ausgezogenen Teile des Randes angehören.

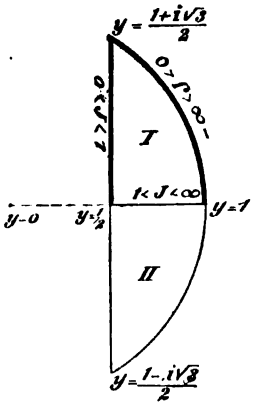


Fig. 5.

Jetzt behaupten wir: *Dem Falle I gehört ein J der positiven Halbebene, dem Falle II ein solches der negativen Halbebene zu,* so dass in der That die Zerschneidung in Fig. 4 der Sonderung unserer beiden Fälle I und II entsprechen würde. In der That, es ist jetzt $\lambda = \frac{e}{e-1}$ und eben deswegen nach Formel (5) pag. 15

$$J = \frac{4(e^2 - e + 1)^3}{27\, e^2 (1-e)^2}. \tag{2}$$

Hier kann man denn durch elementare Rechnung zeigen, dass ein e im *Innern* des Raumes I Fig. 5 jederzeit auch ein J im *Innern* der positiven Halbebene nach sich zieht, und dass in entsprechender Weise Raum II und negative Halbebene zugeordnet sind*). Für den Grenzfall eines gleichschenkligen Dreiecks liegt e auf dem stark gezeichneten Rande von Fig. 5. Hier wird aber in der That vermöge (2) J reell und zwar kleiner als 1. Auf der Grenze zwischen I und II Fig. 5 wird J reell und grösser als 1 genau entsprechend der That-

*) Dieser Beweis wird in § 2 des folgenden Kapitels ausführlich entwickelt werden.

sache, dass in Fig. 4 die beiden Halbebenen längs des zwischen $J = +1$ und $J = +\infty$ verlaufenden Teiles der reellen J-Axe zusammenhängen.

Die ganze Bedeutung der Figur 5 werden wir erst im folgenden Kapitel erläutern. Hier hatte sie nur vorläufig den Zweck, eine richtige Würdigung der Vorschriften des § 5 herbeizuführen. Indem wir für ein einzelnes J der positiven Halbebene, etwa J_0, eines der zugehörigen Dreiecke der e_1, e_2, e_3 auswählen, gewinnen wir zugleich eindeutig ein zugehöriges Wertepaar $\Omega_1(J_0)$, $\Omega_2(J_0)$, wenn wir die Vorschriften von § 5 in Anwendung bringen. Lassen wir nun die Eckpunkte e_1, e_2, e_3 stetig ihre Lage wechseln so jedoch, dass *stets* die Lagenverhältnisse des Falles I oder II zutreffen, so gewinnen wir entsprechend von $\Omega_1(J_0)$ und $\Omega_2(J_0)$ aus ein Paar von Wertcomplexen $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$. Dann ist es aber die Bedeutung dieser Wertcomplexe, *dass wir in ihnen gerade ein Zweigpaar der beiden analytischen Functionen* $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ *erlangen, wenn wir sie von* $\Omega_1(J_0)$ *und* $\Omega_2(J_0)$ *aus unter Zugrundelegung der durch Fig.* 4 *angezeigten Zerschneidung analytisch fortsetzen.* Dieses zu zeigen war der Zwek des gegenwärtigen Paragraphen.

§ 7. Ansatz für die Umgebung eines singulären Punktes*).

Die beiden durch die vorangehenden Überlegungen sicher begründeten Zweige $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ nennen wir hinfort Ausgangszweige und wollen jetzt nachsehen, in welcher Weise sich dieselben fortsetzen, wenn wir J Umgänge um die singulären Punkte ausführen lassen. Möge einer derselben J_0 sein und mögen $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ nach einmaligem positiven Umgang um J_0 in $\Omega_1'(J)$, $\Omega_2'(J)$ sich fortsetzen, so haben wir jedenfalls die Darstellungen:

$$(1) \qquad \Omega_1' = \alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2, \quad \Omega_2' = \gamma\Omega_1 + \delta\Omega_2,$$

weil nämlich Ω_1', Ω_2' als Integrale der Differentialgleichung (5) § 3 mit Hilfe constanter Coefficienten α, β, γ, δ in der Form (1) durch das Fundamentalsystem Ω_1, Ω_2 darstellbar sind. Es handelt sich darum zu entscheiden, wie für die einzelnen singulären Punkte $J = 0$, 1, ∞ diese Coefficienten α, β, γ, δ ausfallen.

Zu dem Ende stellen wir folgende Überlegung an, welche eine Darstellung der Ausgangszweige für die Umgebung des singulären Punktes J_0 anbahnt. Wir suchen uns durch geeignete Constanten a, b ein solches Integral der Differentialgleichung

$$\Omega = a\Omega_1 + b\Omega_2$$

*) Man vgl. Artikel 3 der in § 4 genannten Fuchs'schen Arbeit.

zu construieren*), das nach Umgehung von J_0 in sich selbst multipliciert mit einer Constanten $\varkappa$ übergeht:

$$\Omega' = \varkappa\Omega. \tag{2}$$

Damit diese Gleichung stattfindet, müssen zufolge (1) a und b Wurzeln der Gleichungen:

$$a\alpha + b\gamma = \varkappa a,$$
$$a\beta + b\delta = \varkappa b$$

sein, und demgemäss ist $\varkappa$ an die Bedingung geknüpft:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varkappa, & \gamma \\ \beta, & \delta - \varkappa \end{vmatrix} = \varkappa^2 - (\alpha + \delta)\varkappa + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0. \tag{3}$$

Legen wir statt Ω_1, Ω_2 ein anderes Fundamentalsystem zu Grunde, so gelangen wir doch von ihm aus zu der nämlichen Gleichung für $\varkappa$, wie die Darstellung der Ausgangszweige in diesem neuen Fundamentalsystem leicht bestätigt. Gleichung (3) erscheint demnach unabhängig vom gewählten Fundamentalsystem dem singulären Punkte J_0 zugeordnet.

Es ist eine wichtige Fallunterscheidung, wenn wir sondern, ob Gleichung (3) zusammenfallende oder verschiedene Wurzeln hat. Wir verfolgen zuvörderst nur den letzteren Fall, nennen die beiden Wurzeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und definieren zwei neue Zahlen k_1 und k_2 durch

$$\varkappa_1 = e^{2k_1\pi i}, \qquad \varkappa_2 = e^{2k_2\pi i}. \tag{4}$$

Diese beiden Grössen k_1, k_2 sind alsdann zunächst nur bis auf ganze Zahlen bestimmt, über die wir sogleich zweckmässig verfügen.

Nun entspreche $\varkappa_1$ vermöge des zugehörigen Systems a, b das particuläre Integral $\Omega^{(1)}$, das der Bedingung (2) genügt. Alsdann wechselt $(J - J_0)^{-k_1}\Omega^{(1)}(J)$ bei Umgehung von J_0 seinen Wert überhaupt nicht mehr, ist vielmehr in der Umgebung von J_0 eindeutig und sonach in eine Reihe nach ansteigenden ganzen Potenzen von $(J - J_0)$ entwickelbar, die wir $\mathfrak{P}_1(J - J_0)$ nennen. Für $\Omega^{(1)}$ findet sich so die Darstellung:

$$\Omega^{(1)}(J) = (J - J_0)^{k_1}\,\mathfrak{P}_1(J - J_0). \tag{5}$$

Wird $(J - J_0)^{-k_1}\cdot\Omega^{(1)}$ für $J = J_0$ unendlich oder Null, so beginnt unsere Potenzentwicklung mit einem Exponenten $\lesseqgtr 0$. Diesen können wir dann aber mit in k_1 hineinnehmen und sonach durch endgültige Bestimmung von k_1 erreichen**), dass in (5) die Potenzentwicklung für $J = J_0$ endlich und von Null verschieden ist.

---

*) Wir behalten hier kurzweg Ω zur Bezeichnung des fraglichen Integrals bei, wodurch aber gar nicht behauptet sein soll, Ω sei eine „Periode" des Integrals u.

**) Dem Einwurf, ob nicht vielleicht die so bestimmte Zahl k_1 oder die gleich

In völlig analoger Weise möge $\varkappa_2$ zum particulären Integral $\Omega^{(2)}$ führen, für welches entsprechend die Darstellung gilt:

$$\Omega^{(2)} = (J - J_0)^{k_2} \mathfrak{P}_2 (J - J_0).$$

Weil $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ verschieden sind oder, was auf dasselbe hinauskommt, $(k_1 - k_2)$ keine ganze Zahl ist, so wird auch $\Omega^{(2)}$ nicht bis auf einen constanten Factor mit $\Omega^{(1)}$ übereinstimmen können, *und es bilden demnach* $\Omega^{(1)}$ *und* $\Omega^{(2)}$ *für die Umgebung von* J_0 *ein Fundamentalsystem. In demselben müssen wir für die Ausgangszweige Darstellungen*) besitzen:*

$$(6) \qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= a (J - J_0)^{k_1} \mathfrak{P}_1 (J - J_0) + b (J - J_0)^{k_2} \mathfrak{P}_2 (J - J_0), \\ \Omega_2 &= c (J - J_0)^{k_1} \mathfrak{P}_1 (J - J_0) + d (J - J_0)^{k_2} \mathfrak{P}_2 (J - J_0), \end{aligned}$$

die es nun zu präcisieren gilt.

§ 8. Vorläufige Bestimmung der Zahlen k_1, k_2.

Man kann nun aus der Differentialgleichnng (5) § 3 durch einen einfachen Kunstgriff die Werte der Zahlen k_1, k_2 berechnen. Gehen wir zunächst zum singulären Punkt $J = 0$ und reducieren die Coefficienten der Differentialgleichung unter Voraussetzung sehr kleiner Werte für J. Dieselbe nimmt dann die Gestalt an:

$$(1) \qquad \frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ} - \frac{\Omega}{36 J^2} = 0,$$

deren Integrale in grosser Nähe von $J = 0$ mit denen von (5) § 3 übereinstimmen. Indem wir somit k wieder zusammenfassend für k_1 und k_2 schreiben, versuchen wir (1) durch ein Integral

$$\Omega = J^k + \cdots$$

zu befriedigen. Es soll dabei J^k die niedrigste in der Reihenentwicklung von Ω auftretende Potenz von J sein, gegen welche bei sehr kleinem J die übrigen verschwinden.

Entwickeln wir nun die linke Seite von (1) nach steigenden Potenzen von J, so müsste, wofern Ω wirklich Integral von (1) ist, diese Potenzentwicklung identisch d. h. gliedweise verschwinden. Insbesondere wird aber das Glied höchster Ordnung:

$$\left(k(k-1) + k - \frac{1}{36}\right) J^{k-2} + \cdots$$

Indem wir den hier eintretenden Coefficienten mit Null identisch setzen, *kommt* $k^2 - \frac{1}{36} = 0$, *und wir finden also für* k *die beiden Werte*

---

zu nennende Zahl k_2 unendlich werden, begegnen wir in § 9 u. f., wo diese Zahlen auf directem Wege bestimmt werden.

*) Die Möglichkeit solcher Darstellungen in der Umgebung eines singulären Punktes ist von Riemann sogleich mit in die Definition seiner P-Function aufgenommen; vgl. Riemann's Werke pag. 63 u. 64.

$$k_1 = \frac{1}{6}, \quad k_2 = -\frac{1}{6}, \tag{2}$$

wie man denn sofort $aJ^{\frac{1}{6}} + bJ^{-\frac{1}{6}}$ als allgemeinstes Integral von (1) erkennt.

Für $J = 1$ bez. die nächste Umgebung dieses Punktes kürzt man (5) § 3 auf

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{d\Omega}{dJ} + \frac{3\Omega}{16(J-1)^2} = 0,$$

die wir nun wieder durch ein Integral

$$\Omega = (J-1)^k + \cdots$$

zu befriedigen suchen. Indem wir die linke Seite der gekürzten Differentialgleichung nach ansteigenden Potenzen von $(J-1)$ entwickeln und den Coefficienten des höchsten Gliedes mit Null identisch setzen, folgt

$$k(k-1) + \frac{3}{16} = 0,$$

und also kommen als Werte von k:

$$k_1 = \frac{3}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{4}, \tag{3}$$

welche wir in der That direct bestätigen werden. Für die beiden singulären Punkte $J = 0, 1$ werden wir dann also Darstellungen von Ω_1, Ω_2 in der Form (6) § 7 wirklich herstellen können.

Nicht so gestalten sich die Umstände für den dritten singulären Punkt $J = \infty$. Kürzen wir auch hier für die nächste Umgebung dieses Punktes, so kommt als Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ} + \frac{31\,\Omega}{144\,J^3} = 0.$$

Versucht man jetzt durch

$$\Omega = J^k + \cdots$$

zu integrieren, wo nun Ω nach absteigenden Potenzen von J geordnet ist, so folgt durch Nullsetzen des Coefficienten des höchsten Gliedes $k^2 = 0$ und also übereinstimmende Wurzeln $k_1 = k_2 = 0$. *Die Überlegungen des vorigen Paragraphen liefern für $J = \infty$ nur ein Integral und sind für diesen singulären Punkt sonach noch nicht erschöpfend.* Ohne indes zur Ausfüllung dieser Lücke noch weiter auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen einzugehen, wozu freilich die ausgebildete Theorie in der Litteratur vorläge*), wollen wir vielmehr nach

*) Es handelt sich um das Auftreten von Integralen von (5) § 3 unter logarithmischer Form. Näheres hierüber findet man ausser in der genannten Arbeit von Fuchs und einer weiteren Untersuchung des gleichen Verfassers in Cr. J. Bd. 68 p. 354 (1868) auch in einer älteren Arbeit Borchardt's in Cr. J. Bd. 57 p. 81 (1860), man sehe auch die Arbeit von Hamburger in Cr. J. Bd. 76 p. 113 (1873).

Erledigung von $J=0$ und $J=1$ den dritten singulären Punkt $J=\infty$ einer directen Betrachtung unterziehen, welche uns dann auch für dessen Umgebung Darstellungen der Ausgangszweige kennen lehrt.

§ 9. Durchführung der Untersuchung für den singulären Punkt $J=0$.

Um jetzt die Darstellungen (6) § 7 insoweit zu regeln, als wir sie brauchen, bringen wir ein besonderes Dreieck der e_1, e_2, e_3 in Anwendung, welches einen nahezu verschwindenden Wert von J zur Folge hat. Wie in Kap. 1 verstehen wir unter ϱ die dritte Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ und setzen

$$e_1 = 1 + \frac{1}{3}\delta, \quad e_2 = \varrho^2 + \frac{\varrho}{3}\delta, \quad e_3 = \varrho + \frac{\varrho^2}{3}\delta,$$

wobei δ eine sehr kleine Zahl sein soll. Auf Grund der von Kap. 1 her bekannten Formeln

$$e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 = -\frac{1}{4}g_2$$

u. s. w. berechnen wir für die rationalen Invarianten

$$g_2 = 4\delta, \quad g_3 = 4 + \frac{4}{27}\delta^3, \quad \Delta = -432 + 32\delta^3,$$
$$J = -\frac{4}{27}\delta^3, \quad \frac{g_2}{g_3} = \delta. \tag{1}$$

Ist der absolute Betrag von δ durch ε bezeichnet und $\delta = \varepsilon e^{\vartheta i}$, so erzielen wir den Fall I oder ein der positiven Halbebene (Fig. 4) angehöriges J, falls $\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{2\pi}{3}$ gewählt wird, und müssen dementsprechend Fig. 2 für die Legung der Perioden heranziehen. Wir wollen dabei insbesondere die Grenzwerte für die Ausgangszweige bestimmen, indem wir δ zu Null werden lassen d. h. *von der positiven Halbebene aus uns dem Punkte $J=0$ annähern*. Fig. 2 geht für obige Werte der e_i mit $\delta = 0$ in nebenstehende Fig. 6 über. Dabei geht die zweite Periode ω_2 in den endlichen, von Null verschiedenen Betrag des Integrals

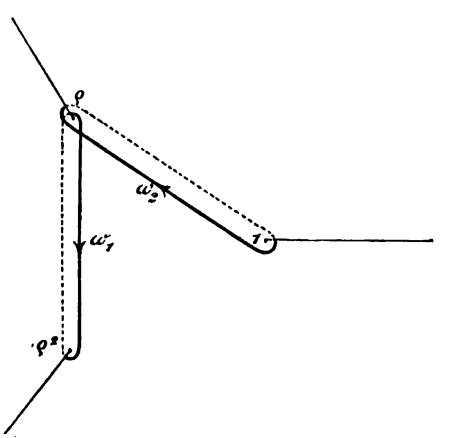


Fig. 6.

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y^3-1}}$$

über, ausgedehnt über den in der Figur für ω_2 gezeichneten Periodenweg.

Bei der Form des eben geschriebenen Integrals und der gegenseitigen Lage der Periodenwege in Fig. 6 ist weiter sofort ersichtlich, dass die erste Periode ω_1 das Product der zweiten mit ϱ ist:

$$\omega_1 = \varrho \cdot \omega_2 . \tag{2}$$

Gehen wir von hier aus zu den normierten Perioden, so geschieht dies, indem wir die ω_i mit dem gemeinsamen Factor

$$\sqrt{\frac{g_3}{g_2}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} = J^{-\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[6]{\frac{-4}{27}}$$

behaften. Indem man somit unter $\mathfrak{P}_2(0)$ eine gewisse endliche, nicht verschwindende Constante versteht, ist

$$\Omega_1 = \varrho J^{-\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_2(0), \quad \Omega_2 = J^{-\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_2(0). \tag{3}$$

Man sieht, wie sich diese Formeln unter (6) § 7 subsumieren und zugleich eine Bestätigung für (2) § 8 ergeben.

Um jetzt auch den anderen Gliedern in den Darstellungen (6) § 7 gerecht zu werden, berechnen wir uns die Näherungswerte für $\frac{d(\Omega_i J^{\frac{1}{6}})}{dJ}$ bei verschwindendem J. Hier haben wir nämlich zuvörderst aus den oft genannten Ansätzen

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_1 J^{\frac{1}{6}})}{dJ} &= a\left(k_1 + \frac{1}{6}\right) J^{k_1 - \frac{5}{6}} \cdot \mathfrak{P}_1(0), \\ \frac{d(\Omega_2 J^{\frac{1}{6}})}{dJ} &= c\left(k_1 + \frac{1}{6}\right) J^{k_1 - \frac{5}{6}} \cdot \mathfrak{P}_1(0). \end{aligned} \tag{4}$$

Andrerseits ist

$$\frac{d(\Omega_i J^{\frac{1}{6}})}{dJ} = \sqrt[6]{\frac{-4}{27}} \cdot \frac{d\omega_i}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dJ}$$

und infolge der näherungsweisen Darstellung

$$\omega_i = \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 4\delta y - 4}}$$

für verschwindendes δ:

$$\left(\frac{d\omega_i}{d\delta}\right)_{\delta=0} = \frac{1}{4} \int \frac{y\,dy}{(\sqrt{y^3-1})^3}.$$

Bei der Gestalt dieses Integrales und der Lage der Periodenwege folgt: Es ist $\left(\frac{d\omega_2}{d\delta}\right)_{\delta=0}$ eine endliche, nicht verschwindende Zahl, während zugleich

$$\left(\frac{d\omega_1}{d\delta}\right)_{\delta=0} = \varrho^2 \left(\frac{d\omega_2}{d\delta}\right)_{\delta=0}$$

zutrifft. Überdies wird $\frac{d\delta}{dJ}$ mit $J^{-\frac{2}{3}}$ proportional, so dass wir k_1 unter Bestätigung von (2) § 8 mit $\frac{1}{6}$ identisch finden. Indem wir endlich die Constante c mit in die Potenzentwicklung $\mathfrak{P}_1(J)$ hineinnehmen, *entspringt als endgültige Darstellung der Ausgangszweige für die Umgebung des in Rede stehenden Punktes* $J = 0$:

$$\Omega_1(J) = \varrho^2 J^{\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_1(J) + \varrho J^{-\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_2(J),$$

(5)

$$\Omega_2(J) = \quad J^{\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_1(J) + \quad J^{-\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_2(J).$$

Auf Grund dieser Darstellungen ist es nun leicht, die Formeln (1) § 7 für den vorliegenden Fall explicit herzustellen, d. h. die Zweige Ω_1', Ω_2' zu bestimmen, zu denen man bei einmaligem positiven Umgang um $J = 0$ von der positiven Halbebene und den Ausgangszweigen aus gelangt. Nach Zurücklegung dieses einmaligen Umgangs haben nämlich $J^{\frac{1}{6}}$ und $J^{-\frac{1}{6}}$ bez. die Factoren $-\varrho^2$ und $-\varrho$ angenommen, so dass

$$\Omega_1' = -\varrho J^{\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_1(J) - \varrho^2 J^{-\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_2(J),$$

$$\Omega_2' = -\varrho^2 J^{\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_1(J) - \varrho J^{-\frac{1}{6}} \mathfrak{P}_2(J)$$

wird. *Der Vergleich mit* (5) *liefert für die auf dem in Rede stehenden Wege erlangten Zweige die Darstellung*:

$$\Omega_1' = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega_2' = -\Omega_1. \tag{6}$$

Wir könnten nun eine ähnliche Discussion für den Fall anstellen, dass man sich dem Punkte $J = 0$ von der negativen Halbebene des herausgelösten Blattes (Fig. 4) annähert. Inzwischen kommen wir doch bei der Art der zu Grunde liegenden Zerschneidung der J-Ebene zu diesem neuen Punkte $J = 0$ vom eben discutierten aus durch einmalige Umkreisung des Punktes $J = 1$ im negativen Sinne. Wissen wir also, wie sich hierbei unsere Ausgangszweige ändern — und es soll sogleich entwickelt werden — so könnten wir von (5) aus sofort auch Darstellungen der Ausgangszweige für die Umgebung des von

der negativen Halbebene aus erreichten Punktes $J = 0$ hinschreiben. Bei dieser Sachlage können wir die weitere Discussion des Punktes $J = 0$ überspringen und wenden uns sofort nach $J = 1$.

§ 10. Durchführung der Untersuchung für den singulären Punkt $J = 1$.

Genau wie soeben $J = 0$ werden wir jetzt $J = 1$ erledigen können. Hier benutzen wir die Lage der Verzweigungspunkte:

$$e_1 = 1 + \tfrac{1}{2}\delta, \quad e_2 = -1 + \tfrac{1}{2}\delta, \quad e_3 = -\delta,$$

was für die rationalen Invarianten die Werte zur Folge hat:

(1) $g_2 = 4 + 3\delta^2, \quad g_3 = 4\delta, \quad \Delta = 64 - 288\delta^2, \quad J - 1 = \frac{27}{4}\delta^2.$

Die Lage der Periodenwege für verschwindendes δ ist durch Fig. 7 gegeben.

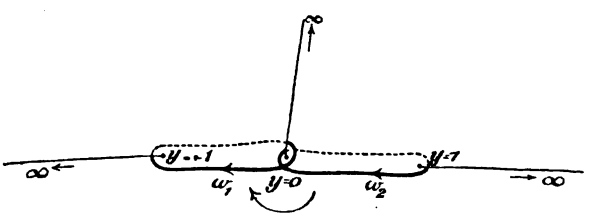


Fig. 7.

Hier ist ersichtlich ω_2 identisch mit dem endlichen, von Null verschiedenen Werte des Integrals

(2) $$\omega_2' = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}\sqrt{y^2-1}},$$

über den bezüglichen Periodenweg ausgedehnt. Die Beziehung der beiden Integrationswege in Fig. 7 zu einander ist eine solche, dass der von ω_1 aus dem anderen durch eine Drehung dieses letzteren um $y = 0$ und zwar in der Pfeilrichtung der Fig. 7 um 180^0 entspringt; nur dass dann gerade noch die Integrationsrichtung die entgegengesetzte ist. Aber der einfachste Gebrauch der vorliegenden Riemann'schen Fläche lehrt, dass diese Drehung auch dadurch erreicht werden kann, dass y das Zeichen wechselt, $\sqrt{y}$ den Factor $-i$ annimmt, während $\sqrt{y^2-1}$ unverändert bleibt. Es ist demgemäss

$$-\omega_1 = \int \frac{-dy}{-2i\sqrt{y}\sqrt{y^2-1}},$$

wo nun der Integrationsweg wieder der von (2) ist, so dass wir $\frac{\omega_2}{i}$ erhalten. Wir haben demnach auch für die Grenzwerte der normierten Perioden die Beziehung:

(3) $$\Omega_1 = i\Omega_2.$$

Aber die normierten Perioden sind nicht mehr endlich, verschwinden vielmehr mit δ, indem sie mit $\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$ oder also mit $(J-1)^{\frac{1}{4}}$ proportional werden. Indem man demnach die nun eintretenden Potenzentwicklungen $\mathfrak{P}(J-1)$ von (6) § 7 in zweckmässiger Weise mit Constanten behaftet, fassen wir die geschehenen Überlegungen in die Angabe der Näherungswerte zusammen:

$$\Omega_1 = i(J-1)^{\frac{1}{4}}\mathfrak{P}_2(0), \quad \Omega_2 = (J-1)^{\frac{1}{4}}\mathfrak{P}_2(0). \tag{4}$$

Auch die Fortsetzung der Überlegung geschieht wie im vorigen Paragraphen. Wir bilden uns zugleich unter Benutzung des Ansatzes (6) § 7 die Gleichung:

$$\frac{d\Omega_i(J-1)^{-\frac{1}{4}}}{dJ} = \sqrt[4]{\frac{4}{27}}\cdot\frac{d\omega_i}{d\delta}\cdot\frac{d\delta}{dJ},$$

sowie

$$\frac{d\Omega_1(J-1)^{-\frac{1}{4}}}{dJ} = a\left(k_1-\frac{1}{4}\right)J^{k_1-\frac{5}{4}}\mathfrak{P}_1(0),$$

$$\frac{d\Omega_2(J-1)^{-\frac{1}{4}}}{dJ} = c\left(k_1-\frac{1}{4}\right)J^{k_1-\frac{5}{4}}\mathfrak{P}_1(0).$$

Aber $\frac{d\omega_i}{d\delta}$ ist für $\delta = 0$ eine endliche, nicht verschwindende Constante, nämlich

$$\left(\frac{d\omega_i}{d\delta}\right)_{\delta=0} = \left(\frac{d}{d\delta}\int\frac{dy}{\sqrt{4y^3-4y-4\delta}}\right)_{\delta=0} = \frac{1}{4}\int\frac{dy}{y\sqrt{y}(\sqrt{y^2-1})^3},$$

integriert über den bezüglichen Weg. Demgemäss hat man bei der Form des hier zu Tage getretenen Integrals und der Lage der Periodenwege

$$\left(\frac{d\omega_1}{d\delta}\right)_{\delta=0} = -i\left(\frac{d\omega_2}{d\delta}\right)_{\delta=0}. \tag{5}$$

Überdies wird $\frac{d\delta}{dJ}$ mit $(J-1)^{-\frac{1}{2}}$ proportional, so dass sich für k_1 unter voller Bestätigung von (3) § 8 der Wert $\frac{3}{4}$ findet. Aus (5) findet sich für die Coefficienten a und c die Beziehung $a = -ic$, und indem wir dann c mit in die Potenzentwicklung $\mathfrak{P}_1(J-1)$ hineinnehmen, kommt als Resultat *für die Darstellung der Ausgangszweige in der Umgebung von* $J = 1$:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -i(J-1)^{\frac{3}{4}}\mathfrak{P}_1(J-1) + i(J-1)^{\frac{1}{4}}\mathfrak{P}_2(J-1),\\ \Omega_2 &= (J-1)^{\frac{3}{4}}\mathfrak{P}_1(J-1) + (J-1)^{\frac{1}{4}}\mathfrak{P}_2(J-1).\end{aligned} \tag{6}$$

Möge man jetzt nach einmaligem Umgange um $J = 1$ im positiven Sinne zu den Zweigen Ω_1', Ω_2' gelangen, so entspringen deren Darstellungen aus (6), indem man dortselbst $(J-1)^{\frac{1}{4}}$ mit dem Factor i, $(J-1)^{\frac{3}{4}}$ mit dem Factor $-i$ behaftet. Es ist dabei ohne weiteres ersichtlich, dass

$$\Omega_1' = -\Omega_2, \quad \Omega_2' = \Omega_1 \tag{7}$$

wird, *wodurch für* $J = 1$ *die explicite Form des Ansatzes* (1) § 7 *gewonnen ist.*

§ 11. Bestimmungen für die Umgebung von $J = \infty$ und zugehörige Berechnung von Ω_2.

Die Grenzwerte der Ausgangszweige für $J = \infty$ wollen wir späterer Anwendung wegen auch numerisch vollständig berechnen. Einen Ansatz (6) § 7 können wir hier nicht benutzen; gleichwohl genügt es, mit Hilfe einer gegen Null convergierenden Grösse δ die Punkte e_i zweckmässig so zu legen, dass J mit verschwindendem δ unendlich wird. Wählt man alsdann die Periodenwege nach Massgabe von § 5, so kommt man, ohne noch δ weiter zu beschränken, zu den richtigen Grenzwerten von Ω_1, Ω_2. Es empfiehlt sich zu setzen:

$$e_1 = -\frac{3}{2} - \delta, \quad e_2 = 3, \quad e_3 = -\frac{3}{2} + \delta,$$

worauf die rationalen Invarianten die Werte erhalten

$$g_2 = 27 + 4\delta^2, \quad g_3 = 27 - 12\delta^2, \quad \Delta = 4 \cdot 3^3 \cdot \delta^2,$$

$$J = \frac{3}{4\delta^2}, \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J}}. \tag{1}$$

Des weiteren gestatten wir uns von Fig. 2 insofern eine ganz unwesentliche Abweichung, als wir die beiden dort von e_1 und e_3 nach $y = \infty$ auslaufenden Verzweigungsschnitte in einen e_1 und e_3 verbindenden zusammenziehen. Alsdann giebt uns Fig. 8 die Lage der Perioden-

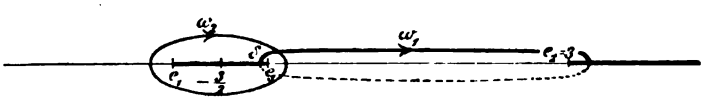


Fig 8.

wege für unsere speciellen e_i. Wollen wir auch numerisch genaue Grenzwerte für Ω_i haben, so ist vor allen Dingen jetzt darüber zu entscheiden, welches Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$ in einem Punkte, etwa des oberen Blattes, der zweiblättrigen y-Fläche zutreffen soll. Bestimmen wir in diesem Sinne, dass $\sqrt{y - e_1}$ und $\sqrt{y - e_3}$ auf

der reellen Axe des oberen Blattes rechts von e_3 selbst reell und *positiv* sind, dass dagegen $\sqrt{y-e_2}$ auf der nämlichen Axe links von e_2 *negativ* imaginär ist.

Indem wir noch darauf aufmerksam machen, dass für $\delta = 0$ $\frac{g_2}{g_3} = 1$ wird, und dass mithin für verschwindendes δ $\Omega_i = \omega_i$ zutrifft, gehen wir sofort an die Bestimmung des Grenzwertes für Ω_2 oder ω_2. Da der bezügliche Periodenweg nirgends einem der Verzweigungspunkte e_1 oder e_3 unendlich nahe kommt, so wird auch für $\delta = 0$ d. h. bei Coincidenz von e_1 und e_3 der Integralwert ein gewisser endlicher sein. Wir setzen sonach in unser Integral einfach $\delta = 0$ und erhalten

$$\omega_2 = \int_{\cdot} \frac{dy}{2\left(y+\frac{3}{2}\right)\sqrt{y-3}},$$

wo nun der Figur entsprechend zweckmässig über einen beliebig kleinen im oberen Blatte gelegenen Kreis um $y = -\frac{3}{2}$ integriert wird, und zwar im negativen Sinne der Drehung. Infolge unserer Festsetzungen ist der Wert von $2\sqrt{y-3}$ im Mittelpunkte dieses Kreises $-3i\sqrt{2}$, und sonach haben wir unter Benutzung elementarer Regeln:

$$\omega_2 = \frac{1}{-3i\sqrt{2}} \int \frac{dy}{y+\frac{3}{2}} = \frac{2i\pi}{3i\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}, \tag{2}$$

womit zugleich der Grenzwert für Ω_2 gefunden ist.

§ 12. Berechnung des Grenzwertes von Ω_1 für $J = \infty$.

Sehr viel umständlicher ist die Bestimmung von Ω_1, und es kommt hierbei zur Erleichterung der Rechnung sehr wesentlich darauf an, den Periodenweg in zweckmässiger Weise zu fixieren. Als besonders brauchbar hat sich Fig. 9 erwiesen, in welcher der Integrationsweg aus zwei

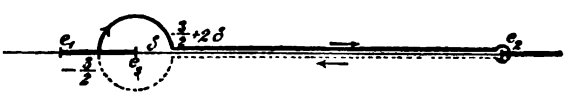


Fig. 9.

Kreisen und zwei geradlinigen Stücken zusammengesetzt ist. Das bekannte Verhalten eines elliptischen Integrals bei Annäherung seiner oberen Grenze an einen der Verzweigungspunkte gestattet dann sogleich, den Radius des Kreises um e_2 verschwinden zu lassen, so dass die Integration über die beiden geradlinigen Strecken bis hart an $e_2 = 3$ heran geleitet werden kann.

Sehr viel vorsichtiger muss man bei e_3 verfahren, da hier schliesslich die beiden Verzweigungspunkte e_1 und e_3 coincidieren sollen. Wir

haben demnach δ selbst als Radius des Kreises um e_3 gewählt und zerlegen nun ω_1 in die Summe von K und L, wo K das Integral über den Kreis, L aber dasjenige über die geradlinige Strecke des oberen Blattes von $e_3 + \delta$ bis e_2 doppelt genommen bedeutet:

$$K = \int_{Kreis} \frac{dy}{2\sqrt{(y-3)\left(y+\frac{3}{2}+\delta\right)\left(y+\frac{3}{2}-\delta\right)}},$$

$$L = \int_{-\frac{3}{2}+2\delta}^{3} \frac{dy}{\sqrt{(y-3)\left(y+\frac{3}{2}+\delta\right)\left(y+\frac{3}{2}-\delta\right)}}.$$

Zur Berechnung von K setzen wir, was bei der Form der kreisförmigen Integrationsbahn gestattet ist, $2\sqrt{y-3}$ mit seinem vom vorigen Paragraphen her bekannten Centralwert vor das Integralzeichen und gewinnen dann in

$$K = \frac{1}{-3i\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \delta^2}}$$

ein ausführbares Integral. Unbestimmt integriert ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \delta^2}} = \text{Const.} + \log\left(y + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \delta^2}\right),$$

wo nun als untere und obere Grenze zwei über einander liegende Punkte der Fläche, nämlich die bei

$$y = -\frac{3}{2} + 2\delta$$

gelegenen, einzusetzen sind. Der Integrationskreis umschliesst *einen* der beiden Verzweigungspunkte e_1, e_3, und da die untere Integrationsgrenze im unteren Blatte gelegen ist, so wird dortselbst

$$\sqrt{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \delta^2}$$

nach unserer Festsetzung negativ, in der oberen Grenze aber positiv zu nehmen sein. Es folgt sonach bestimmt:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \delta^2}} = \log\left(\frac{2\delta + \sqrt{4\delta^2 - \delta^2}}{2\delta - \sqrt{4\delta^2 - \delta^2}}\right) = \log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

und also als Wert des Integrals K:

$$K = \frac{i\sqrt{2}}{6} \log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right). \tag{1}$$

Umständlicher ist die Auswertung von

$$L = i \int_{-\frac{3}{2}+2\delta}^{3} \frac{dy}{\sqrt{3-y}\sqrt{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - \delta^2}},$$

wo wir jetzt getreu unserer obigen Festsetzung längs des geradlinigen Integrationsweges $\sqrt{3-y}$ positiv nehmen müssen. Die Substitution $y + \frac{3}{2} = z$ führt L in die neue Form über:

$$L = i \int_{2\delta}^{\frac{9}{2}} \frac{dz}{z\sqrt{\frac{9}{2}-z}} \left\{1 - \left(\frac{\delta}{z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Der grösste Wert, den $\left(\frac{\delta}{z}\right)^2$ im Integrationsintervall erhält, liegt in der unteren Grenze 2δ. Es ist also im ganzen Intervall

$$0 < \left(\frac{\delta}{z}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

so dass der Klammerausdruck unter dem letzten Integralzeichen in eine gleichmässig convergente Potenzreihe entwickelt werden kann. Wir schreiben:

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}, \quad n > 0,$$

worauf L die Gestalt zeigt:

$$L = i \int_{2\delta}^{\frac{9}{2}} \frac{dz}{z\sqrt{\frac{9}{2}-z}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{z}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{\delta}{z}\right)^{2n} + \cdots\right\}.$$

Verstehen wir weiter unter A_n das Integral

$$A_n = \int_{2\delta}^{\frac{9}{2}} \frac{dz}{z^n\sqrt{\frac{9}{2}-z}},$$

so entspringt durch Integration der einzelnen Glieder unserer Reihe:

$$L = i \sum_{n=0}^{\infty} a_n A_{2n+1} \delta^{2n}, \tag{2}$$

wo nun zunächst die Grössen A_n zu berechnen sind.

Erstlich ist in dieser Hinsicht

$$A_1 = \int_{2\delta}^{\frac{9}{2}} \frac{dz}{z\sqrt{\frac{9}{2}-z}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\left\{\log\frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{9}{2}-z}}{\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}-z}}\right\}_{2\delta}^{\frac{9}{2}},$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\log\left(\frac{9}{\delta}\right).$$

Sodann findet man durch partielle Integration:

$$\frac{\sqrt{\frac{9}{2}-z}}{z^n} = -\frac{9n}{2}\int\frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{\frac{9}{2}-z}} + \frac{2n-1}{2}\int\frac{dz}{z^n\sqrt{\frac{9}{2}-z}}$$

und also, wenn 2δ und $\frac{9}{2}$ als Grenzen eingesetzt werden:

$$\frac{3}{\sqrt{2}\cdot(2\delta)^n} = \frac{9n}{2}A_{n+1} - \frac{2n-1}{2}A_n.$$

Mit Hilfe dieser Recursionsformel drücken wir A_{n+1} durch die A mit niederen Indices aus. Man übersieht indes leicht, dass die linke Seite der letzten Gleichung den Term höchster Ordnung für A_{n+1} abgiebt, da die folgenden Glieder A_n, A_{n-1} u. s. w. nur noch kleinere Potenzen von $\frac{1}{\delta}$ bringen und selbst A_1 nur mit $\log\delta$ in Rechnung kommt. Für sehr kleine δ können wir sonach schreiben

$$A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3n(2\delta)^n},$$

$$A_{2n+1}\delta^{2n} = \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n\cdot 4^n}.$$

Durch Substitution der gefundenen Werte A in (2) kommt:

$$L = \frac{i\sqrt{2}}{3}\log\left(\frac{9}{\delta}\right) + \frac{i\sqrt{2}}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

wo jetzt noch der Wert der unendlichen Reihe zu bestimmen ist. Ist x ein echter Bruch, so hat man

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n,$$

woraus durch Division mit x und Integration

$$\frac{1}{x\sqrt{1-x}} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1},$$

beziehungsweise

$$\text{Const.} - 2\log\left(1+\sqrt{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cdot x^n$$

hervorgeht. Durch den Specialwert $x = 0$ bestimmt man die Integrationsconstante zu $2\log 2$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cdot x^n = 2\log 2 - 2\log\left(1+\sqrt{1-x}\right)$$

wird. Setzt man jetzt $x = \frac{1}{4}$, so ergiebt sich als Wert der im letzten Ausdruck von L enthaltenen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4\log 2 - 2\log\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Setzen wir das in L ein und ersetzen nun endlich noch $\frac{1}{\delta^2}$ durch seinen Wert $\frac{4J}{3}$, so kommt durch Addition von K und L *als der gesuchte Grenzwert der Periode* ω_1 *bez. des Ausgangszweiges* Ω_1 *für* $J = \infty$:

$$\omega_1 = \Omega_1 = \frac{i\sqrt{2}}{6}\left(\log 1728 + \log J\right). \tag{3}$$

§ 13. Erledigung des singulären Punktes $J = \infty$. Historische Bemerkungen.

Als Näherungswerte für die Ausgangszweige haben wir jetzt bei $J = \infty$ die folgenden erhalten:

$$\Omega_1 = \frac{i\sqrt{2}}{6}\left(3\log 12 + \log J\right), \quad \Omega_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Ω_2 ist hiernach in der Umgebung von $J = \infty$ *eindeutig*, während Ω_1 nach einmaliger Umkreisung von $J = \infty$ im positiven Sinne übergeht in:

$$\Omega_1' = \frac{i\sqrt{2}}{6}\left(3\log 12 + \log J - 2i\pi\right) = \Omega_1 + \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Damit ist auch für die Umkreisung von $J = \infty$ *der Ansatz* (1) § 7 *explicite gewonnen, indem*

$$\Omega_1' = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega_2' = \Omega_2 \tag{1}$$

wird. Andrerseits können wir jetzt diese Formeln benutzen, um auf Grund der schon erkannten analytischen Abhängigkeit der Perioden

von J Potenzentwicklungen für die Ausgangszweige, in der Umgebung von $J = \infty$ gültig, anzugeben:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{i \log 12}{\sqrt{2}} \cdot \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{J}\right) + \frac{i\sqrt{2}}{6} \log J \;\; \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{J}\right), \\ \Omega_2 &= \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{J}\right). \end{aligned}$$

Die Entwicklungen $\mathfrak{P}_i$ schreiten nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{J}$ fort, während zugleich $\mathfrak{P}_1(0) = \mathfrak{P}_2(0) = 1$ wird.

Alle in den Darstellungen der Ausgangszweige aufgetretenen Potenzentwicklungen drücken sich, wie wir hier historisch anführen, in einfachster Weise durch hypergeometrische Reihen*) aus mit alleiniger Ausnahme der soeben in Formel (2) sich einstellenden Entwicklung $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{J}\right)$, die nicht durch die hypergeometrische, vielmehr durch eine mit ihr verwandte, aus ihr durch Grenzübergang entstehende Reihe darzustellen ist**). Betrachtet man die Perioden als Functionen von λ oder k^2, was im Anschluss an die von Legendre bereits für diesen Fall berechnete Differentialgleichung in allen älteren Arbeiten geschieht***), so sind die sich einstellenden Potenzentwicklungen im allgemeinen auch durch hypergeometrische Reihen darstellbar. Indessen tritt dann für *alle* singulären Punkte der Ebene λ in den Darstellungen der Perioden der compliciertere Charakter ein, den wir hier für $J = \infty$ durch Auftreten eines logarithmischen Gliedes erhielten.

Zum Gebrauch dieser älteren Darstellungen der Perioden musste bei einem in allgemeiner Form vorgegebenen Integral erster Gattung immer vorab der Ausdruck vierten Grades unter dessen Quadratwurzelzeichen in seine Linearfactoren zerlegt werden, um nämlich die unabhängige Variabele k^2 der genannten Darstellungen zu gewinnen. Dem gegenüber darf es als ein Vorzug der neueren Darstellungen angesehen werden, dass wir deren unabhängige Variabele aus den Coefficienten jenes biquadratischen Ausdrucks durch *rationale* Rechnungen herstellen.

---

*) Man sehe darüber die schon in § 2 genannten Arbeiten, namentlich die Dissertation von Nimsch, weil nämlich dort die Bezeichnungsweise mit der hier gebrauchten in Übereinstimmung ist.

**) Dieselbe ist von Borchardt in der unter § 8 genannten Arbeit eingeführt.

***) In dieser Richtung liegt z. B. eine Untersuchung von Fuchs in Crelle's Journ. Bd. 71, p. 121 (1870) vor, wo im wesentlichen diejenige Normalform für das elliptische Integral erster Gattung zu Grunde gelegt ist, die wir im vorigen Kapitel als die Riemann'sche bezeichneten.

§ 14. Verzweigung der Perioden ω_1, ω_2 über der J-Ebene.

Wenn wir die Gesamtheit der analytischen Fortsetzungen unserer Ausgangszweige Ω_1, Ω_2 bilden, so entspricht dem, dass wir über der J-Ebene eine Riemann'sche Fläche construiert denken, in welcher die beiden analytischen Functionen $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ eindeutige Functionen des Ortes sind. Aus dieser Fläche, die nur bei $J = 0, 1, \infty$ verzweigt war, haben wir in § 6 ein Blatt herausgelöst und Ω_1, Ω_2 in ihrem Verlauf auf diesem Blatte untersucht. Wir wollen jetzt nachsehen, in was für Verzweigungspunkten dieses eine Blatt mit den übrigen zusammenhängt. Dabei lassen wir sofort an Stelle der normierten Perioden wieder die ursprünglichen treten, wo man denn der Vorstellung Raum geben muss, dass bei Veränderung des J der Quotient $X = \frac{g_2}{g_3}$ constant erhalten wird.

Nach einmaliger Umkreisung von $J = \infty$ im positiven Sinne gelangen wir nach (1) § 13 von den Ausgangszweigen zu

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2 \tag{1}$$

und also nach n-maligem Umgange zu den Zweigen:

$$\omega_1' = \omega_1 + n\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2.$$

Zum ersten Zweigpaar kommen wir somit nicht zurück, *so dass unsere Fläche unendlich vielblättrig ist, indem bereits in dem einen bei $J = \infty$ aufgefundenen Verzweigungspunkte unendlich viele Blätter cyclisch zusammenhängen.* Positive Umkreisung von $J = 1$ führt nach (7) § 10 von den Ausgangszweigen zu

$$\omega_1' = -\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1, \tag{2}$$

so dass zwei-, drei-, viermalige Umkreisung der Reihe nach zu den Zweigpaaren $(-\omega_1, -\omega_2)$, $(\omega_2, -\omega_1)$, (ω_1, ω_2) führt. *Viermalige Umkreisung von $J = 1$ führt sonach zu dem Ausgangsblatt zurück.* Endlich kommen wir bei positivem Umgang von $J = 0$, wofern wir in der positiven Halbebene des ersten Blattes beginnen, nach (6) § 9 zu

$$\omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = -\omega_1 \tag{3}$$

und werden nun durch wiederholte Ausführung dieses Umganges zu den weiteren Zweigpaaren $(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2)$, $(-\omega_1, -\omega_2)$, $(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1)$, $(-\omega_2, \omega_1 + \omega_2)$, (ω_1, ω_2) geführt. *Sechsmalige Umkreisung von $J = 0$ vom ersten positiven Halbblatt aus führt in dieses zurück.*

Hier ist nun auch der Ort, wo wir den Punkt $J = 0$ des negativen ersten Halbblattes berücksichtigen. Bei der jetzt bekannten Art, wie sich die Ausgangszweige Ω_i beim negativen Umgang von $J = 1$ ändern,

folgt aus (5) § 9 als Darstellung dieser Zweige in der Umgebung des genannten Punktes:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \Omega_1 &= J^{\frac{1}{6}}\mathfrak{P}_1(J) + J^{-\frac{1}{6}}\mathfrak{P}_2(J), \\ \Omega_2 &= -\varrho^2 J^{\frac{1}{6}}\mathfrak{P}_1(J) - \varrho J^{-\frac{1}{6}}\mathfrak{P}_2(J), \end{aligned}$$

wo die Potenzentwicklungen dieselbe Bedeutung haben wie in (5) § 9. Die Umkreisung von $J = 0$ vom ersten negativen Halbblatt aus führt also, wie leicht berechnet, zu

$$(5)\qquad \omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = -\omega_1 + \omega_2,$$

so dass dort gerade wie im positiven Halbblatt sechsfache Umkreisung von $J = 0$ in das erste Blatt zurückführt.

Für eine Bestätigung unserer Rechnung führe man von einem Punkte des positiven ersten Halbblattes einen geschlossenen Weg aus, der nach einander im positiven Sinne $J = 0$, $J = 1$ und $J = \infty$ umkreist und der also, da an anderen Stellen Verzweigungspunkte nicht vorkommen, in der That wieder im ersten Halbblatte endigt. Aber zufolge (1), (2), (3) kommen wir bei diesen drei Umgängen von den Ausgangszweigen (ω_1, ω_2) der Reihe nach zu den Zweigen $(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1)$, $(\omega_1 - \omega_2, \omega_2)$, (ω_1, ω_2) und gelangen somit in der That am Schlusse des Weges zum Ausgangszweigpaar (ω_1, ω_2) zurück. Geht man bei dieser Operation vom negativen Halbblatte aus, so hat man die Verzweigungspunkte in der Reihenfolge $0, \infty, 1$ zu umkreisen und findet dann wiederum eine Bestätigung für Formeln (1) bis (5).

Wie man sieht, stellen die Formeln (1), (2), (3), (5) *Specialfälle ganzzahliger linearer Substitutionen der Determinante* 1 *dar*:

$$(6)\qquad \begin{gathered} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{gathered}$$

Da diese vier besondern Substitutionen (1), (2), (3), (5) in der Folge sehr häufig auftreten, so führen wir für sie besondere abkürzende Bezeichnungen ein, indem wir sie der Reihe nach als Substitutionen S, T, U, U' benennen. Eine allgemeine Substitution (6) heisst dem gegenüber zumeist V, wobei verschiedene solche Substitutionen durch obere oder untere Indices unterschieden werden sollen.

Wenn man auf ω_1', ω_2' in Formel (6) aufs neue eine Substitution V' ausübt, so gelangt man zu ω_1'', ω_2'', welche aber, wie man leicht ausrechnet, an ω_1, ω_2 direct auch wieder nur durch eine Substitution der Art (6) gekettet sind. Wir sprechen diese sehr folgenreiche Eigenschaft der Operationen (6) dahin aus, *dass zwei unter ihnen nach einander*

*angewandt eine dritte liefern, oder dass sie in ihrer Gesamtheit eine Gruppe bilden**). Dabei ist es dann noch sehr wichtig, *dass durch Wiederholung und Combination der Operationen S und T jede Substitution V hergestellt werden kann*, ein Satz, der erst im zweiten Kapitel des folgenden Abschnittes zur Ableitung gelangt.

Kehren wir nun zur Frage nach der Abhängigkeit der Perioden von J zurück, so sind die Substitutionen (1), (2), (3), (5) ohne Ausnahme solche vom Charakter der V und andrerseits finden sich unter jenen vieren gerade die Substitutionen S und T. Es folgt also, sofern wir uns bereits auf den gerade genannten Satz stützen wollen: *Alle Zweige* ω_1', ω_2', *in welche wir das Ausgangspaar durch Wege auf der Riemann'schen Fläche fortsetzen können, erscheinen in der Form* (6) *und zugleich können wir jedes solches Paar* (6) *durch einen geeigneten Weg erhalten.*

Nun sind aber die Formeln (3), (4) des § 1 von den hier betrachteten Formeln (6) dadurch verschieden, dass bei ihnen

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

gesetzt ist, während $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ jetzt durchaus $= +1$ genommen werden muss. *Die Gesamtheit der primitiven Periodenpaare des* § 1 *teilen sich sonach in zwei Classen, je nachdem in Gleichung* (4) § 1 *das obere oder untere Zeichen gilt. Die Gesamtheit der Paare einer einzelnen Classe erscheinen als die zusammenstehenden Zweige eines Paares neben einander gestellter analytischer Functionen von J. Aber es ist nicht möglich, das eine Paar analytischer Functionen durch analytische Fortsetzung in das andere Paar überzuführen.*

Mit diesen Sätzen überblicken wir den wesentlichen Charakter der zwischen ω_1, ω_2 und J bestehenden analytischen Abhängigkeit.

§ 15. Der Periodenquotient ω als Function von J.

Die Schlusssätze des letzten Paragraphen konnten offenbar nur dadurch erhalten werden, dass wir jene beiden Grössen ω_1, ω_2 unverbrüchlich neben einander stehend betrachteten. Die Sachlage wird nun bedeutend durchsichtiger, wenn wir diesen Umstand dadurch direct zum Ausdruck bringen, dass wir von den einzelnen ω_1, ω_2 zur Betrachtung ihres Quotienten

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{1}$$

---

*) „Ikos." p. 5 u. f.

fortschreiten. *Dieser „Periodenquotient" ω ist als absolute Invariante nur noch Function von J allein.* Die Eigenart dieser Function von J entspringt dabei sofort aus den soeben gewonnenen Sätzen. Wir haben es mit einer *unendlich vieldeutigen analytischen Function* von J zu thun, *deren sämtliche Zweige*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \tag{2}$$

sind, wo α, β, γ, δ alle möglichen Zahlquadrupel der Determinante 1

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

durchlaufen. Die Verzweigungspunkte sind bei $J = 0,\ 1,\ \infty$ gelegen, und zwar setzt sich bei Umgang um dieselben der *„Ausgangszweig" ω*, der den ω_1, ω_2 des vorigen Paragraphen entsprechen soll, in folgender Weise fort:

$J = \infty$: $\omega' = \omega + 1$,

$J = 1$: $\omega' = -\frac{1}{\omega}$,

$J = 0$: $\omega' = \frac{\omega + 1}{-\omega}$, bez. $\omega' = \frac{1}{-\omega + 1}$.

Wir nennen diese Substitutionen auch in vorliegender nichthomogener Gestalt S, T, U und U'. Für den Ausgangszweig ω ist dabei immer an der Zerschneidung Fig. 4 der J-Ebene festgehalten, so dass wir für $J = 0$ die zweifache Möglichkeit U und U' haben.

Der Übergang von ω_1, ω_2 zur absoluten Invariante ω entspricht genau dem Übergange von A, B zum λ, wie auch von μ_1, μ_2 zu μ, wie solches im vorigen Kapitel geschah. Dabei ist denn auch die Analogie zwischen den drei Grössen λ, μ, ω eine sehr weit reichende. Freilich ist $\lambda(J)$ sechswertig, $\mu(J)$ 24-wertig und im Gegensatze $\omega(J)$ unendlich vielwertig. Aber in Ansehung der Beziehung, die zwischen den verschiedenen Werten von ω besteht, reiht sich diese Function dem λ, wie μ völlig an. Die sechs Werte λ waren lineare Functionen von einem unter ihnen, das Gleiche galt auch von den 24 Werten $\mu(J)$. *So ist nun auch jetzt jeder folgende Zweig ω' von $\omega(J)$ eine lineare Function* (2) *vom Ausgangszweige und also auch von irgend einem Zweige.* Der Diedergruppe der λ-Substitutionen, der Oktaedergruppe der μ-Substitutionen entspricht dabei *die Gruppe der ganzzahligen ω-Substitutionen der Determinante* 1.

Den tiefer liegenden Grund der Zusammengehörigkeit dieser Functionen λ, μ, ω von J werden wir erst im folgenden Kapitel durch Heranziehung neuer Hilfsmittel überblicken. Merken wir uns noch an,

um die künftigen Entwicklungen zu erleichtern, welches die Werte sind, die der Ausgangszweig ω in den Verzweigungspunkten annimmt. Wir entnehmen dieselben ohne Mühe aus den Darstellungen der Perioden für die Umgebung der singulären Stelle 0, 1, ∞. Die Verwertung der Formeln (5) § 9, (6) § 10, (2) § 13 und (4) § 14 ergiebt als Darstellung des Ausgangszweiges ω in den Bereichen der Verzweigungspunkte

$$(3)\quad \begin{cases} J=0: & \begin{cases} \omega = \varrho \cdot \dfrac{1+\varrho\sqrt[3]{J}\mathfrak{P}^{(0)}(J)}{1+\sqrt[3]{J}\mathfrak{P}^{(0)}(J)}, & \text{(posit. Halbeb.)} \\ \omega = -\varrho^2 \cdot \dfrac{1+\sqrt[3]{J}\mathfrak{P}^{(0)}(J)}{1+\varrho\sqrt[3]{J}\mathfrak{P}^{(0)}(J)}, & \text{(negat. Halbeb.)} \end{cases} \\ J=1: & \omega = i \cdot \dfrac{1-\sqrt{J-1}\mathfrak{P}^{(1)}(J-1)}{1+\sqrt{J-1}\mathfrak{P}^{(1)}(J-1)}, \\ J=\infty: & 2\pi i\omega = -\log J - 3\log 12 \cdot \mathfrak{P}^{(\infty)}\left(\frac{1}{J}\right). \end{cases}$$

Dabei sind jedesmal die Quotienten der bezüglichen früheren Entwicklungen, also $\mathfrak{P}_1 : \mathfrak{P}_2$, in Reihen nach ganzen positiven Potenzen der beigesetzten Argumente entwickelt gedacht, so dass $\mathfrak{P}^{(0)}(0)$ und $\mathfrak{P}^{(1)}(0)$ endlich und von Null verschieden, $\mathfrak{P}^{(\infty)}(0)$ sogar der Einheit gleich ist. *Aus den angeschriebenen Entwicklungen entnimmt man, dass*

$$(4)\qquad \omega(0) = \varrho \text{ bez. } = -\varrho^2, \quad \omega(1) = i$$

ist, während $\omega(\infty)$ *logarithmisch unendlich wird wie*

$$(5)\qquad -\frac{1}{2\pi i} \cdot \log(1728 \cdot J).$$

Sollen wir die zu $\omega(J)$ gehörende Riemann'sche Fläche über der J-Ebene construieren, so wird die Art, wie das Ausgangsblatt mit den übrigen zusammenhängt, ohne weiteres aus den Darstellungen (3) abgelesen. Im Punkte $J=0$ finden wir das erste Blatt als eines unter *drei* cyclisch verbundenen, bei $J=1$ in entsprechender Weise als eines unter *zweien*. Schliesslich hängen bei $J=\infty$ mit dem ersten Blatte noch *unendlich viele andere im Cyclus zusammen*. Da jeder Zweig von ω eine lineare Function des ω ist, so schliessen wir sofort weiter, dass jedes folgende Blatt genau so an die übrigen gekettet ist, wie das eben gemeinte Ausgangsblatt.

Wir haben diese letzten Sätze hier nur mehr beiläufig entwickelt. Ein klares Bild über die Abfolge der Blätter der in Rede stehenden Riemann'schen Fläche gewinnt man auf diesem Wege doch nicht. Zu diesem Ende werden vielmehr im folgenden Kapitel neue Hilfsmittel

verwertet werden. Vorab haben wir noch eine Ergänzung des gegenwärtigen Kapitels zu geben, die dann zugleich in sehr wichtiger Weise das folgende vorbereitet.

§ 16. Differentialgleichung dritter Ordnung für $\omega(J)$. Die s-Functionen.

Die Function $\omega(J)$ genügt einer sehr bemerkenswerten Differentialgleichung dritter Ordnung, welche wir hier von der Differentialgleichung zweiter Ordnung (5) des § 3 ableiten wollen. Zwei ein Fundamentalsystem bildende particuläre Integrale dieser letzteren Differentialgleichung waren unsere beiden bestimmt gewählten Perioden Ω_1, Ω_2. Wir werden somit aufschreiben können:

$$\begin{aligned} \Omega_1'' + p\Omega_1' + q\Omega_1 &= 0, \\ \Omega_2'' + p\Omega_2' + q\Omega_2 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

wenn wir unter Ω_i' und Ω_i'' erste und zweite Ableitung von Ω_i nach J verstehen und unter den Abkürzungen p und q die rationalen Ausdrücke meinen:

$$p = \frac{1}{J}, \quad q = \frac{\frac{31}{144}J - \frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}.$$

Zur Berechnung der Differentialgleichung für ω eliminieren wir zunächst q aus den beiden Gleichungen (1) und erhalten:

$$(\Omega_2\Omega_1'' - \Omega_1\Omega_2'') + p(\Omega_2\Omega_1' - \Omega_1\Omega_2') = 0. \tag{2}$$

Indem wir andrerseits unter ω', ω'' etc. die Ableitungen von ω nach J verstehen, kommt aus

$$\omega' = \frac{\Omega_2\Omega_1' - \Omega_1\Omega_2'}{\Omega_2^2}$$

durch logarithmische Differentiation

$$\frac{\omega''}{\omega'} = \frac{\Omega_2\Omega_1'' - \Omega_1\Omega_2''}{\Omega_2\Omega_1' - \Omega_1\Omega_2'} - 2\frac{\Omega_2'}{\Omega_2},$$

welche Gleichung mit Benutzung von (2) in die folgende übergeht:

$$-\frac{\omega''}{\omega'} = p + 2\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}. \tag{3}$$

Formel (3) wollen wir nun einerseits differentiieren und andrerseits quadrieren und durch -2 dividieren. So kommen die beiden neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\omega'''}{\omega'} - \left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2 &= -p' - 2\frac{\Omega_2''}{\Omega_2} + 2\left(\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}\right)^2, \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2 &= -\frac{1}{2}p^2 - 2p\frac{\Omega_2'}{\Omega_2} - 2\left(\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}\right)^2, \end{aligned}$$

deren Addition unter Berücksichtigung von (1) auf:

$$\frac{\omega'''}{\omega'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2 = -p' - \frac{1}{2}p^2 - \frac{2}{\Omega_2}(\Omega_2'' + p\Omega_2') = 2q - p' - \frac{1}{2}p^2$$

führt. Setzen wir nun für p und q wieder ihre Werte ein und berechnen auch p', *so kommt als Gestalt der in Aussicht genommenen Differentialgleichung*:

$$(4) \qquad \frac{\omega'''}{\omega'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\right)^2 = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8(1-J)^2} + \frac{23}{72J(1-J)}.$$

Gemäss „Ikos." p. 74 hat der links stehende Differentialausdruck, den wir wie dort durch $[\omega]_J$ bezeichnen, die Eigenschaft unverändert sich zu reproducieren, wenn wir ω durch eine beliebige lineare Function $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ ersetzen. Infolge der Willkürlichkeit der Constanten a, b, c, d, die natürlich nur in ihren Quotienten zur Wirkung kommen, *haben wir in* $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ *das allgemeine Integral der Differentialgleichung* (4) *vor uns.* In dieser Form sind denn auch notwendigerweise alle Zweige enthalten, zu welchen wir von $\omega(J)$ aus durch analytische Fortsetzung gelangen können.

Mit (4) haben wir Anschluss gewonnen an diejenige Differentialgleichung dritter Ordnung, welche in „Ikos." p. 78 Formel (34) aufgestellt ist und die wir hier in der Form reproducieren:

$$(5) \qquad [s]_J = \frac{\nu_1^2 - 1}{2\nu_1^2(J-1)^2} + \frac{\nu_2^2 - 1}{2\nu_2^2 J^2} + \frac{\frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_3^2} - 1}{2J(J-1)}.$$

Es ist dies diejenige Differentialgleichung, welche in Hrn. Schwarz' Arbeit*) „Zur Theorie der hypergeometrischen Reihen" eine fundamentale Stellung einnimmt. Integrale derselben bezeichnen wir deshalb auch als Schwarz'sche *s-Functionen* und werden denselben im folgenden Kapitel eine sehr ausgiebige Untersuchung widmen. Schon hier aber können wir darauf hindeuten, worin die Wesenseinheit der drei Functionen $\lambda(J)$, $\mu(J)$, $\omega(J)$ bestehen wird: *Sie sind alle drei Specialfälle von s-Functionen, die ersten beiden laut Kapitel* 3 *der Vorlesungen über das Ikosaeder, die dritte, weil thatsächlich Gleichung* (5) *durch Substitution der besonderen Werte* $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = \infty$ *in* (4) *übergeht.*

Fassen wir noch tabellarisch zusammen, welche besonderen Werte der ν_i für unsere drei speciellen s-Functionen in Kraft treten:

---

*) Ausführlich: *Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt.* Crelle's Journ. Bd. 75 (1872).

	ν_1	ν_2	ν_3
λ	2	3	2
μ	2	3	4
ω	2	3	∞

Für weitere sich hier anschliessende Gesichtspunkte, sowie namentlich betreffs der Beziehung der s-Functionen überhaupt zu den Riemann'schen P-Functionen verweisen wir auf „Ikos." I Kap. 3 und auf Schwarz' ebengenannte Arbeit*).

*) Ausserdem verweisen wir hier auch noch auf „Ikos." p. 132 u. f., wo auch bereits über die Einordnung der Function $\omega(J)$ in die Kette der s-Functionen berichtet wurde.

Drittes Kapitel.

Über gewisse conforme Abbildungen und die aus ihnen entspringenden Dreiecksfunctionen.

Nachdem bereits soeben die enge Verwandtschaft der drei Functionen $\lambda(J)$, $\mu(J)$, $\omega(J)$ in mannigfachen Zügen hervortrat, ist es der Zweck dieses dritten Kapitels, durch Heranziehung von Hilfsmitteln der conformen Abbildung eben diese Verwandtschaft der genannten drei Functionen noch sehr viel ausgiebiger zu illustrieren. Die vorzunehmenden conformen Abbildungen haben aber noch eine andere Bedeutung für uns, die weiterhin sehr folgenreich wird. Wir fanden, dass $\lambda(J)$, $\mu(J)$, $\omega(J)$ eindeutige Functionen des Ortes in gewissen Riemann'schen Flächen sind, welche die J-Ebene bez. 6-, 24-, ∞-blättrig überdecken. So sehr die Verzweigung dieser Flächen eine übersichtliche sein mag, so sind sie gleichwohl ihrer grossen Blätterzahl wegen beim Gebrauch unbequem. Hier bieten uns die in Aussicht stehenden conformen Abbildungen zweckmässige Ersatzmittel jener Flächen. In ihrer grossen Einfachheit geben diese Ersatzmittel wie von selbst zu neuen functionentheoretischen Ideen und Sätzen Anlass, deren Darlegung den Hauptinhalt dieses Kapitels ausmachen wird. Dabei werden wir insbesondere in das Wesen der Functionen $J(\omega)$, $\lambda(\omega)$ vollen Einblick gewinnen.

§ 1. Ersatz vorkommender Riemann'scher Flächen durch einfachere Figuren.

Wir wählen der Gewohnheit wegen als unabhängige Variabele sogleich wieder J, ohne indessen vorerst auf die typische Bedeutung dieser Bezeichnung Bezug zu nehmen. Es liege alsdann eine algebraische Function n^{ten} Grades $z(J)$ vor, aber derart speciell gewählt, dass in der definierenden Gleichung

$$f(z, J) = 0 \tag{1}$$

J selbst nur linear vorkommt, so dass also J eine rationale Function n^{ten} Grades von z ist.

Die übliche Methode, den Verlauf der Function $z(J)$ zu verdeutlichen, ist die, dass wir die J-Ebene n-fach überdecken und die n Blätter längs gewisser die eintretenden Verzweigungspunkte verbindender Verzweigungsschnitte zusammenhängen lassen. Dieser gebräuchlichen Vorstellungsweise gegenüber wollen wir folgende Massnahme auf ihre Brauchbarkeit prüfen: *Wir wollen unsere geometrischen Hilfsoperationen nicht mehr über der J-Ebene, sondern in der Ebene der Function $z(J)$ selbst ausführen.* Den Übergang zur z-Ebene veranstalten wir dabei in nachfolgender Weise:

Man zeichne in der J-Ebene eine in sich zurücklaufende stetig gekrümmte Curve C, welche alle Verzweigungspunkte $p_1, p_2 \ldots p_l$, an Zahl l, durchsetzen soll (cf. Fig. 10). Längs dieser Linie, welche die Ebene J in zwei einfach zusammenhängende Teile T und T' zerlegt, denken wir uns einen sämtliche n Blätter der Fläche durchdringenden Schnitt geführt. Hiernächst wählen wir die Verzweigungsschnitte der Fläche so, dass sie überall mit Stücken dieser Schnittcurve zusammenfallen. Wir bauen unsere Riemann'sche Fläche also aus n über einander liegenden einfach zusammenhängenden Bereichen T, sagen wir $T_1, T_2 \ldots T_n$, und ebenso vielen anderen $T_1', T_2' \ldots T_n'$ auf, die längs ihrer Begrenzungscurven in zweckmässiger Weise verbunden sind. Der Anschaulichkeit wegen wollen wir uns dabei die Teile T vor den T' durch eine Schraffierung ausgezeichnet denken.

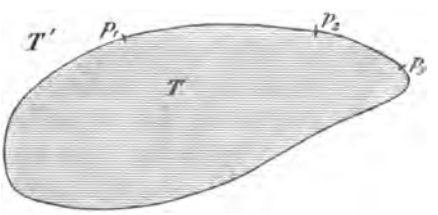


Fig. 10.

Innerhalb jedes einzelnen dieser Bereiche T, T' ist jetzt $z(J)$ eine eindeutige Function, und wir wollen den Übergang zur z-Ebene nun dadurch gewinnen, dass wir dort die durch $z(J)$ vermittelte conforme Abbildung der verschiedenen Bereiche T, T' bestimmen. Wir beginnen etwa mit dem Bereiche T_1. Das Bild, welches wir $\mathfrak{T}_1$ nennen wollen, ist wieder einfach zusammenhängend und bedeckt ein Stück der z-Ebene einfach, da J rational von z abhängt. Aber die Begrenzung von $\mathfrak{T}_1$ ist nicht mehr überall stetig gekrümmt, zeigt vielmehr eine gewisse Anzahl von Einknickungen, die sich indessen höchstens an den Punkten $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_l$ finden können, deren Originale die bei $J = p_1, p_2 \ldots p_l$ gelegenen Randpunkte des Bereiches T_1 sind.

Ist nämlich zuvörderst p ein beliebiger mit keinem der Ver-

zweigungspunkte zusammenfallender Punkt des Randes von T_1 und π sein Bildpunkt, so gilt für die rationale Function $J(z)$ beim Punkte π die Entwicklung

$$J - p = a_1(z - \pi) + a_2(z - \pi)^2 + \cdots$$

mit nicht verschwindendem a_1. In erster Annäherung ist sonach

$$J - p = a_1(z - \pi),$$

d. h. die Begrenzung von T_1, die wir folgerecht mit C_1 bezeichnen, überträgt sich in der Nähe des Punktes p auf die Begrenzung von T_1, die analog durch Γ_1 bezeichnet sei, in Form eines stetig gekrümmten Stückes von Γ_1 zu beiden Seiten des Punktes π.

Anders in der Umgebung eines dem Curvenstücke C_1 angehörigen Verzweigungspunktes. Es wird z. B. für die Umgebung des auf C_1 bei $J = p_i$ gelegenen Verzweigungspunktes die Entwicklung gelten

$$(2) \qquad J - p_i = a_{m_i}(z - \pi_i)^{m_i} + a_{m_i+1}(z - \pi_i)^{m_i+1} + \cdots,$$

deren erster Coefficient a_{m_i} von Null verschieden ist. Dabei wird im allgemeinen*) $m_i > 1$ sein. Mit dem ersten T_1 tragenden Blatt sind dann im Punkte p_i andere $(m_i - 1)$ Blätter cyclisch verbunden, und es muss J um den Punkt p_i m_i Umläufe beschreiben, bis z in seiner Ebene um π_i einen einzigen vollführt hat. Die Abbildung der Ebene von J auf die von z hört hiernach im Punkte π_i in dem Sinne auf conform zu sein, als sich Winkel mit dem Scheitelpunkte p_i in ihren Bildern in der z-Ebene auf den m_i^{ten} Teil ihrer ursprünglichen Grösse zusammenziehen. Wir haben also: *Die stetig gekrümmte Curve C_1 überträgt sich auf ein Bogenpolygon Γ_1 der z-Ebene, dessen l Ecken bei $z = \pi_1, \pi_2 \ldots \pi_l$ gelegen sind. Im Eckpunkte π_i bilden die hier zusammenstossenden Seiten von Γ_1 den Winkel $\frac{\pi}{m_i}$*, (so dass hiernach Γ_1 auch im Punkte π_i stetig gekrümmt erscheint, falls das T_1 tragende Blatt im Punkte p_i isoliert verläuft). *Γ_1 umgrenzt das in der z-Ebene gelegene conforme Bild von T_1.*

Wir verlassen jetzt den Bereich T_1, indem wir dessen Grenze etwa zwischen den beiden Punkten p_i und p_{i+1} überschreiten. Dabei gelangen wir in einen Bereich T', der T_k' genannt werden mag, und für welchen nichts hindert, eine der obigen völlig gleiche Betrachtung durchzuführen. Wir werden finden, dass sich T_k' auf einen Bereich

*) Der Fall $m_i = 1$, den wir nicht ausschliessen, bedeutet offenbar, dass das gerade vorliegende Blatt in p_i isoliert verläuft, d. h. dass $J = p_i$ eine Verzweigungsstelle unserer Riemann'schen Fläche bezeichnet, an welcher der Bereich T_1 nicht beteiligt ist.

T_k' abbildet, begrenzt von einem Bogenpolygon Γ_k', das eine seiner Seiten, nämlich die zwischen π_i und π_{i+1}, mit Γ_1 gemein hat. Dabei werden die nächsten Seiten von Γ_k' mit der eben gemeinten in den Punkten π_i und π_{i+1} bez. die Winkel $\frac{\pi}{m_i}$ und $\frac{\pi}{m_{i+1}}$ bilden.

Man mag nun auch T_k' über einen Verzweigungsschnitt verlassen und den Weg in ähnlicher Weise fortsetzen. Immer wird man durch die entsprechenden Wege der z-Ebene zu neuen Polygonen gelangen, die mit den nächst vorhergehenden längs einer ihrer stetig gekrümmten Seiten zusammenhängen. Zwei Umstände sind es dabei, welche das endliche Resultat unserer Überlegungen besonders einfach gestalten. *Erstlich werden die* $2n$ *Bilder* T, T' *der Bereiche* T, T' *nirgends mit einander collidieren können;* denn auf der n-blättrigen J-Fläche nimmt z jeden Wert nur *einmal* an. Weil aber auch *jeder* Wert z sich einmal findet, so wird *zweitens durch die fraglichen* $2n$ *Bilder* T, T' *die* z*-Ebene vollständig ohne Lücke bedeckt.*

An Stelle der *über einander liegenden die* J*-Ebene bedeckenden Blätter* ist sonach eine *Gebietsteilung der* z*-Ebene in neben einander liegende Bereiche getreten,* womit der in Aussicht genommene Ersatz der Riemann'schen Fläche gewonnen ist*). Dieses Bild gewinnt noch an Anschaulichkeit, indem wir die den T entsprechenden T im Gegensatz zu den den T' entsprechenden T' schraffieren. *In der* z*-Ebene folgen dann schraffierte und nicht schraffierte Polygone alternierend.* Besonders machen wir noch auf die Bilder der Verzweigungspunkte aufmerksam. Sie sind solche Punkte der z-Ebene, um welche sich $2m$ der in Rede stehenden Bereiche kranzförmig schaaren, den Punkt selbst mit dem Winkel $\frac{\pi}{m}$ erreichend (unter m die Anzahl der Blätter verstanden, welche im Originalpunkt cyclisch verbunden sind). Der ersichtliche Vorteil aber ist der, dass wir *die gesamte Verzweigungsart* der algebraischen Function z von J, nicht nur das Verhalten in der Umgebung des einzelnen Verzweigungspunktes, thatsächlich *figürlich darstellen* können und nun nicht mehr nötig haben, wie dies sonst der Fall ist, durch zahlreiche zusätzliche Bemerkungen über die Reihenfolge

*) Diese Vorstellungsweise ist Riemann selbst keineswegs unbekannt gewesen; sie kommt vielmehr z. B. in der aus dem Nachlasse Riemann's stammenden Arbeit *„Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung"* (Riemann's Werke pag. 283, zuerst publiciert von Hattendorf im 13. Bande der Göttinger Abhandlungen [1867]) zur Geltung, eine Arbeit, die überhaupt in mehrfacher Hinsicht die Keime zu den Entwicklungen enthält, über die wir im Laufe des Kapitels zu berichten haben. Vgl. übrigens Klein, Math. Ann. Bd. XIV p. 459 (1878), sowie die weiterhin wiederholt zu nennenden Arbeiten von Schwarz.

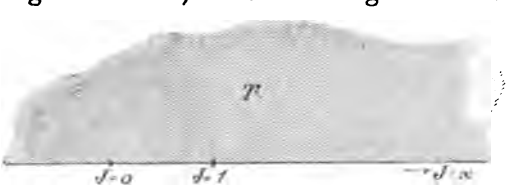
der Blätter die zunächst unbestimmte Vorstellung einer vielblättrigen, mit gewissen Verzweigungspunkten ausgestatteten Riemann'schen Fläche zu ergänzen*).

§ 2. Figur zur Darstellung des Zusammenhanges zwischen λ und J.

Wenden wir jetzt die eben gegebene allgemeine Erörterung auf den Fall der algebraischen Function $\lambda(J)$ an, welche wir mit J durch die Gleichung verknüpft fanden:

(1) $J:J-1:1=4(\lambda^2-\lambda+1)^3:(2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2)^2:27\lambda^2(1-\lambda)^2.$

Die Lage der Verzweigungspunkte der bezüglichen sechsblättrigen Fläche über der J-Ebene bestimmen wir nach der in „Ikos." pag. 69 gegebenen Vorschrift und finden, dass dieselben ausschliesslich bei $J=0,\ 1,\ \infty$ gelegen sind. Den hier eintretenden Fall eines bei $J=\infty$ gelegenen Verzweigungspunktes haben wir im vorigen Paragraphen nicht besonders berücksichtigt. Doch bietet die Abbildung der Umgebung eines solchen Verzweigungspunktes auf die λ-Ebene keine besondere Schwierigkeit. Wir haben nur an unserer früheren Bestimmung (p. 35) festzuhalten, dass für $p_i=\infty$ unter $J-p_i$ einfach $\frac{1}{J}$ verstanden werden soll. Alsdann bleibt die Entwicklung (2) § 1 uneingeschränkt bestehen, und es finden gleichmässig alle dort gezogenen Folgerungen auch nun statt. Ebenso wird es gestattet sein, die Schilderung der in der z-Ebene gelegenen Figuren auch für den Fall aufrecht zu erhalten, dass einer der Punkte π nach $z=\infty$ fällt.



T'
Fig. 11.

Bei der besonderen Lage der Verzweigungspunkte ist es jedenfalls das einfachste, als Curve C des § 1 die reelle J-Axe zu wählen (cf. Fig. 11), so dass die zu zeichnenden zwölf Gebietsteile der λ-Ebene abwechselnd Bilder der positiven und negativen J-Halbebene sind (von denen wir die erstere in der Figur schraffiert haben). Die Grenzen dieser Gebietsteile werden demnach durchgehends reellen Werten von J entsprechen, und wir

*) Unsere Massnahme erscheint zunächst nur auf solche algebraische Functionen $z(J)$ anwendbar, deren inverse Functionen $J(z)$ rational sind, was in der That von den im Text in Betracht kommenden Functionen $\lambda(J)$ und $\mu(J)$ gilt. Es ist hier noch nicht der Ort, von der möglichen Verallgemeinerung auch für andere algebraische Functionen zu handeln.

können jene geradezu dadurch bestimmen, dass wir die Bilder der reellen J-Axe in der λ-Ebene aufsuchen.

Bemerken wir zu dem Ende zuvörderst, dass J mit $\lambda(1-\lambda)$ reell ausfällt. Schreibt man also $\lambda = x + iy$, so entspringt aus

$$\lambda(1-\lambda) = x - x^2 + y^2 - iy(2x-1)$$

der Satz, dass J auf den beiden Geraden $y(2x-1) = 0$ reelle Werte annimmt. Es ist dies einerseits die reelle λ-Axe, andrerseits eine Parallele zur imaginären Axe, die durch $\lambda = \frac{1}{2}$ geht. Schreiben wir weiter:

$$\frac{27}{4} \cdot J = \frac{(\lambda + \lambda^{-1} - 1)^3}{\lambda + \lambda^{-1} - 2} = \frac{((1-\lambda) + (1-\lambda)^{-1} - 1)^3}{(1-\lambda) + (1-\lambda)^{-1} - 2},$$

so folgt, dass J sowohl mit $(\lambda + \lambda^{-1})$ als mit $((1-\lambda) + (1-\lambda)^{-1})$ reell ist. Das findet aber zufolge leichter Rechnung auf den beiden Kreisen statt:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

welche die Mittelpunkte $\lambda = 0$ bez. $\lambda = 1$ mit dem Radius 1 umgeben.

Man entwerfe nun in der λ-Ebene die beiden Geraden und die beiden Kreise, so erscheint dieselbe in der That unserem allgemeinen

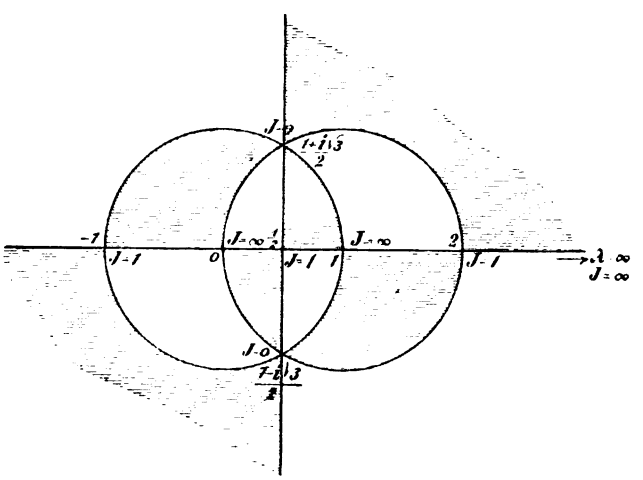


Fig. 12.

Ansatze entsprechend in zwölf Gebiete zerlegt (Fig. 12), und wir lesen aus der Zeichnung sofort ab, dass die Bilder der Verzweigungspunkte nach den reellen Punkten $\lambda = 0,\ 1,\ \infty$, sowie nach $\lambda = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

und endlich nach den beiden imaginären Punkten $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ zu liegen kommen. Dabei tragen die drei ersten Punkte den Wert $J = \infty$, die drei folgenden $J = 1$, und in dem letzten Punktepaar verschwindet J. Je zwei neben einander liegende Gebiete der Fig. 12 ersetzen uns ein Blatt der sechsfach überdeckten J-Ebene. Da sieht man denn offen vor Augen, *wie bei $J = 0$ sich die sechs Blätter in zwei Verzweigungspunkten zu je dreien cyclisch zusammenordnen, wie sie dem gegenüber bei $J = 1$, sowie auch bei $J = \infty$ jedesmal in drei Verzweigungspunkten zu je zweien zusammenhängen.*

Sehen wir die geraden Linien unserer Figur als Kreise von unendlich grossem Radius an, so haben wir das wichtige Resultat erlangt, *dass ein Zweig der Function $\lambda(J)$ eine Halbebene von J auf ein von Kreisbogen begrenztes Dreieck abbildet.* Dabei tragen alle zwölf Kreisbogendreiecke, die in wechselnder Folge positiver und negativer J-Halbebene entsprechen, *übereinstimmend die Winkel* $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Wir haben in Fig. 12 bereits die unseren allgemeinen Festsetzungen entsprechende Schraffierung hinzugefügt. Die schraffierten Felder entsprechen dabei, wie wir verabredeten, der positiven Halbebene J. Es ist dies leicht zu controlieren, wenn man beachtet, dass die Punkte $J = 0, 1, \infty$ auf dem Rande der genannten Halbebene so auf einander folgen, dass dadurch eine positive Umkreisung der Halbebene indiciert wird. In der That markieren die diesen Punkten in Figur 12 als Eckpunkte eines schraffierten Bereiches entsprechenden Stellen gleichfalls eine positive Umkreisung dieses schraffierten Bereiches.

§ 3. Übertragung der λ-Ebene auf die Kugeloberfläche.

Wie man sah, fand sich auch $\lambda = \infty$ unter den Bildern der Verzweigungspunkte der J-Fläche in der λ-Ebene, was den Nachteil hat, dass man die Eigenart der Fig. 12 in der Umgebung dieses Punktes nicht wirklich sieht. Da ist es angezeigt, von dem Hilfsmittel der stereographischen Projection der λ-Ebene auf eine Kugeloberfläche Gebrauch zu machen, weil alsdann die Sonderstellung des Punktes $\lambda = \infty$, die wir begrifflich doch nicht aufrecht erhalten, auch für die Anschauung hinwegfällt. Übrigens ist von dieser Vorstellungsweise bereits in „Ikos." I Kap. 2 der ausgedehnteste Gebrauch gemacht, so dass wir nicht erst nötig haben, bei der Einführung derselben in allgemeine Erörterungen einzutreten.

Die Kugel möge den Radius $\frac{\sqrt{3}}{4}$ haben und die λ-Ebene im Punkte

$\lambda = \frac{1}{2}$ berühren. Der Erfolg dieser Wahl ist der, dass die beiden Punkte $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ auf der Kugel diametral werden, während sich die reelle λ-Axe auf einen grössten Kreis überträgt, dessen Ebene zum Verbindungsdurchmesser dieser beiden Punkte $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ senkrecht steht. Das Merkwürdige an der dann entstehenden Kugelteilung ist dieses, *dass die zwölf sphärischen Dreiecke, die den Halbebenen J entsprechen, alle einander congruent werden*, womit der volle Anschluss an die Figur des Dieders für $n = 3$ gewonnen ist, das sich ja nach den Erörterungen von Kap. 1 § 9 an dieser Stelle einfinden musste.

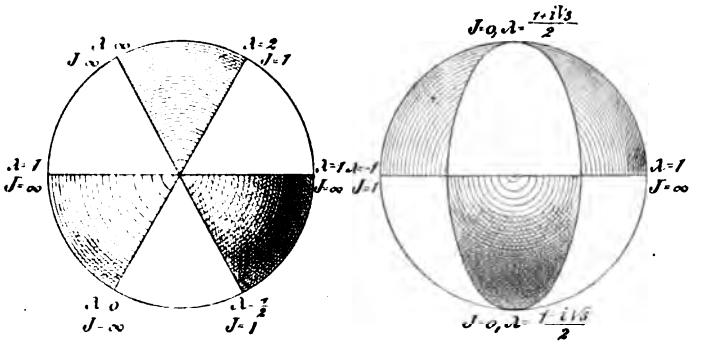


Fig. 13.

Wir haben in Fig. 13 zwei Ansichten unserer Kugelteilung entworfen und wenigstens teilweise mit der bezüglichen Verteilung der Werte von λ und J versehen. In der ersten Figur blicken wir gerade auf den Punkt $\lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ hin, und das Bild der reellen λ-Axe wird derjenige grösste Kreis, der die sichtbare Halbkugel begrenzt. Auf demselben folgen einander die sechs Punkte $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty, -1$ in gleichen Intervallen. In der zweiten Figur erscheint der grösste Kreis mit den reellen λ-Werten zur Geraden projiciert, und es liegen nun die beiden Punkte $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ am Rande der sichtbaren Halbkugel*).

Sollen wir noch einen Augenblick bei der elementaren Ableitung der neuen Figur verweilen, so ist es zuvörderst ein allgemeiner Satz, *dass bei der stereographischen Projection Kreise der Ebene stets wieder in Kreise der Kugeloberfläche übergehen.* Die Spitze des den Kreis der Ebene projicierenden Kegels liegt nämlich auf der Kugeloberfläche, so

*) Cf. Klein, Math. Ann. Bd. XIV, p. 115 (1878).

dass diese letztere vom Kegel übrigens nur noch in einer ebenen Curve d. i. einem Kreise geschnitten wird. Dass ausser dem Träger der reellen Werte λ auch die drei complexe Werte von λ tragenden Kreise der Figur 12 grösste Kreise der Kugel werden, folgt aus dem Umstande, dass sie durch die beiden Träger der Werte $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ gehen. Endlich folgt die Äquidistanz der sechs reellen Punkte

$$\lambda = -1,\ 0,\ \tfrac{1}{2} \cdots$$

durch ganz elementare Rechnungen.

§ 4. Rückbeziehung auf das zweite Kapitel.

Auf Grund der jetzt erhaltenen Resultate erscheinen die Entwicklungen von §§ 5 und 6 des vorigen Kapitels in einem neuen Lichte. Es lag dort der Satz zu Grunde, dass jedes Dreieck mit den Ecken e_1, e_2, e_3 der y-Ebene mit einem und nur einem Dreiecke ähnlich war, dessen zwei erste Ecken bei $y = 0, 1$ lagen, während die dritte Ecke, die dort e hiess, auf den in Fig. 5 (p. 40) eingegrenzten Raum eingeschränkt war. War das freilich ein geometrisch evidenter Satz, so wird jetzt seine Beziehung zur absoluten Invariante unter Benutzung der Figur 12 in neuem Sinne verständlich. Wie man sieht, erscheinen die Dreiecke I, II in Fig. 5 jetzt geradezu als zwei aus Fig. 12 herausgenommene Dreiecke. In der That ist ja die in § 6 daselbst benutzte Gleichung (2) gar keine andere, als die zwischen J und λ selbst bestehende. Die neue Eigenschaft, unter der wir also jetzt den in Fig. 5 gezeichneten Bereich kennen lernen, ist die, *dass derselbe das conforme Abbild der J-Ebene ist, entworfen durch einen einzelnen Zweig der Function* $\lambda(J)$.

Mit Hilfe dieser Anschauungsweise können wir die in Rede stehenden Entwicklungen des vorigen Kapitels in folgender Weise zusammenfassen. In dem Bereich Fig. 5 als in einem conformen Abbilde der J-Ebene bestimmt ein Wert J einen und nur einen Punkt $\lambda = e$, und damit ein und nur ein Dreieck mit den Ecken 0, 1, e. Es giebt eine unendliche Mannigfaltigkeit von Dreiecken, die zu diesem ähnlich sind und zugleich den Punkt $y = 0$ zum Schwerpunkt haben. Schreiben wir

$$u = \int \frac{dy}{2\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}},$$

so werden e_1, e_2, e_3 immer eines dieser Dreiecke bilden. Irgend eines derselben können wir auswählen und kommen dann durch vorschriftsmässige Legung der in Kap. 2 § 5 näher bezeichneten Periodenwege stets zu den richtigen Werten $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$, unabhängig vom gewählten Dreieck.

Der Gewinn dieser zusätzlichen Bemerkung zum vorigen Kapitel ist aber der, dass wir nun in sehr viel bequemerer Weise ersichtlich gemacht haben, warum zu jedem beliebig vorgeschriebenen Werte J *ein* Punkt e im Bereich (Fig. 5) und demnach *eine* Schaar ähnlicher Dreiecke mit dem Schwerpunkt $y = 0$ gehört. Werden wir doch sogar, wenn uns erst in einem der folgenden Paragraphen die Beziehung der J-Halbebene auf ein Kreisbogendreieck in lebendiger Weise vor Augen geführt ist, in Fig. 5 die Lage des einem gegebenen J entsprechenden e ohne alle Rechnung ungefähr angeben können.

§ 5. Figuren zur Erläuterung des Zusammenhanges zwischen μ und J.

Um jetzt die Überlegung des § 1 auch auf die algebraische Function 24sten Grades $\mu(J)$ anzuwenden, schreiben wir die zwischen J und μ bestehende Relation in der Form:

$$J = \frac{(\mu^4 + \mu^{-4} + 14)^3}{108(\mu^4 + \mu^{-4} - 2)^2}. \tag{1}$$

Es sind auch hier wieder die Verzweigungspunkte der 24-blättrigen Fläche über der J-Ebene ohne Ausnahme bei $J = 0,\ 1,\ \infty$ gelegen, so dass wieder die reelle J-Axe als Curve C benutzt werden kann. Es gilt demnach, diejenigen Linienzüge in der Ebene von μ zu zeichnen, denen auf Grund von (1) reelle Werte von J entsprechen.

Jedenfalls ist J mit $(\mu^4 + \mu^{-4})$ reell. Man setze also $\mu = x + iy$, berechne $(\mu^4 + \mu^{-4})$ und setze den imaginären Bestandteil des gewonnenen Ausdrucks gleich Null. Nach Abtrennung eines unbrauchbaren Factors kommt:

$$xy(x + y)(x - y)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Zu den zu construierenden Linienzügen der μ-Ebene gehören also die reelle und imaginäre Axe, die beiden Geraden, welche die Winkel dieser Axen halbieren und der Kreis mit dem Radius 1 um $\mu = 0$, den wir kurz als Einheitskreis bezeichnen.

Führen wir in einer Zeichnung die gefundenen Linien wirklich aus, so entspringen statt der $2 \cdot 24$ Gebietsteile erst 16 solche. Es fehlen also noch neue Linien, die gleichfalls Bilder der reellen J-Axe sind. Um sie zu finden, gehen wir auf die Beziehung von μ zu λ zurück:

$$\lambda = -\left(\frac{\mu^2 - 1}{2\mu}\right)^2$$

und benutzen den Umstand, dass J auf dem Einheitskreise der λ-Ebene reelle Werte besitzt. Man wird demgemäss, um die noch fehlenden Linien zu finden, fordern, dass

$$\frac{\mu^2 - 1}{2\mu} = \frac{(x + iy)^2 - 1}{2(x + iy)}$$

den absoluten Betrag 1 habe oder in anderen Worten, dass Zähler und Nenner im letzten Bruch den nämlichen absoluten Betrag haben sollen. Wir gewinnen als Bedingung

$$(x^2 + y^2 + 2x - 1)\,(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0,$$

so dass also J auch noch reell wird auf den beiden Kreisen:

$$(x \pm 1)^2 + y^2 = 2,$$

die mit dem Radius $\sqrt{2}$ bez. die Punkte $\mu = \mp 1$ umgeben. Indem man entsprechend von

$$1 - \lambda = \left(\frac{\mu^2 + 1}{2\mu}\right)^2$$

ausgeht, schliessen sich den vorigen noch die beiden Kreise an

$$x^2 + (y \pm 1)^2 = 2,$$

welche mit jenen congruent ausfallen und $\mu = \pm i$ umgeben.

Zeichnen wir die Gesamtheit der so gefundenen Linien, so zeigen

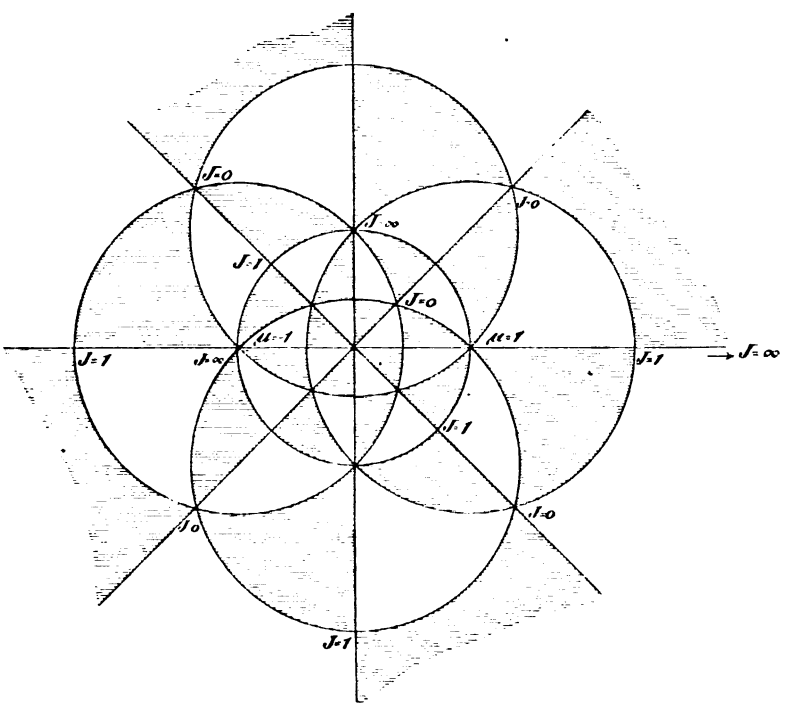


Fig. 14.

sich nun in der That 48 Gebiete in der μ-Ebene abgetrennt, welche diese Ebene ganz bedecken. In der Figur 14 ist dies zur Ausführung

gebracht und zugleich sind die Bilder der positiven J-Halbebene wieder durch eine Schraffierung ausgezeichnet. Die Verzweigung der algebraischen Function $\mu(J)$ tritt in Fig. 14 wieder deutlich zu Tage. *Bei $J = 0$ werden die 24 Zweige acht Male zu je dreien zusammenhängen, bei $J = 1$ zwölf Male zu je zweien und bei $J = \infty$ sechs Male zu je vier.* Als Hauptresultat aber merken wir uns an, *dass irgend ein Zweig der Function $\mu(J)$ eine Halbebene von J auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ abbildet.*

Durch Übertragung auf die Kugeloberfläche wird nicht nur das Verhalten bei $\mu = \infty$ deutlicher, sondern man kann auch erreichen, dass die 48 Gebietsteile der μ-Ebene in ebenso viele sphärische Dreiecke übergehen, die nun abwechselnd mit einander symmetrisch und congruent sind. Zu dem Ende lassen wir die Kugel mit dem Durchmesser 1 unsere Ebene im Punkte $\mu = 0$ berühren und wenden stereographische Projection an. Auf dem Wege gelangen wir gerade zur Gestalt der *oktaedrischen Kugelteilung* zurück (vgl. Fig. 15), wie sie in der Theorie der regulären Körper („Ikos." pag. 15 u. f.) zu Grunde gelegt wurde. In der That ist ja Gleichung (1), wie wir schon hervorhoben, ohne weiteres mit der Oktaedergleichung identisch.

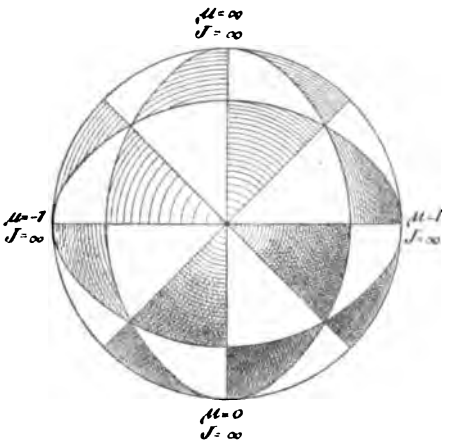


Fig. 15.

§ 6. Von der Beziehung eines Kreisbogendreiecks auf die Halbebene von J.

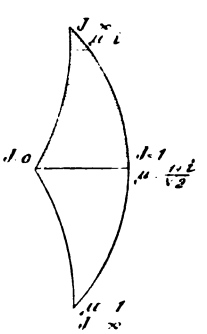


Fig. 16.

Die Wichtigkeit, welche figürliche Hilfsmittel späterhin für uns haben werden, hält uns noch einen Augenblick bei der conformen Abbildung des vorigen Paragraphen zurück. Irgend zwei neben einander liegende von den 48 Kreisbogendreiecken der μ-Ebene, z. B. die beiden in Figur 16 gezeichneten, geben uns ein vollständiges Bild der J-Ebene. Die drei reellen Punkte $J = 0, 1, \infty$ haben wir dabei an ihre bezüglichen Stellen der μ-Ebene geschrieben, und man hat sich nun vorzustellen, dass alle Punkte J mit positivem imaginären Bestandteil in das Innere

des oberen schraffierten Dreiecks verpflanzt sind, das sie ganz erfüllen, während entsprechend die Punkte der negativen J-Halbebene sich im unteren Dreieck wiederfinden.

Die beiden Dreiecke, wie sie in Figur 16 gewählt sind, bilden ein grösseres Dreieck, das wir fernerhin ein *Doppeldreieck* nennen können. Es ist wünschenswert, dass die gegenseitige Beziehung vom Doppel-

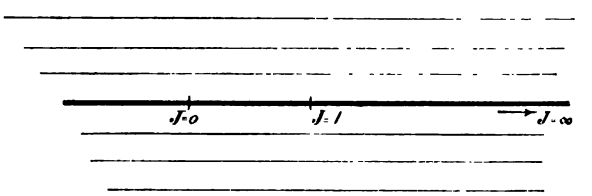


Fig. 17a.

dreieck zur J-Ebene so lebhaft wie möglich erfasst werde, und wir wollen dem dadurch zu Hilfe kommen, dass wir eine Reihe von Linien in der J-Ebene ziehen, die wir dann in ihren Bildern im Doppeldreieck der μ-Ebene verfolgen. In Figur 17, die übrigens wie auch die Figuren 18, 19, 20 nur schematische Bedeutung hat, sind eine Reihe äquidistanter, zur reellen J-Axe paralleler Linien angedeutet und ihre Bilder im Doppeldreieck verfolgt. Die in der positiven J-Halbebene gelegenen parallelen Linien übertragen sich im Dreieck ABC auf ein System stetig gekrümmter Curven, die ihre stärkste Krümmung in der Nähe der Punkte A und B zeigen und im gemeinsamen Ursprung und Ende C sämtlich die Kreisbogen AC bez. BC berühren. Während sie somit, je näher sie nach C gelangen, um so mehr sich einander annähern, werden sie übrigens längs ihrer ganzen Ausdehung einen nahezu parallelen Verlauf zeigen. Die Parallelen der negativen J-Halbebene übertragen sich in symmetrischer Weise auf das Kreisbogendreieck ABD.

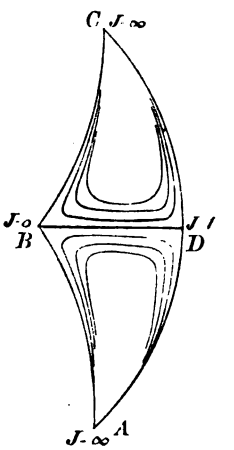


Fig. 17b.

Nehmen wir ein System von Parallelen der J-Ebene senkrecht zur reellen Axe und denken diese Linien in der Richtung von positiver zu negativer Halbebene durchlaufen (Fig. 18a). Es werden dann die Bilder im Doppeldreieck bei C entspringen, indem sie den dort befindlichen Winkel des Dreiecks gerade halbieren (vgl. Fig. 18b). Aber nun ist deutlich, dass die Bilder der parallelen Linien ihren gemeinsamen Endpunkt D nur dann in ununterbrochenem Zuge erreichen können, wenn das Original in der J-Ebene die reelle Axe zwischen $J = 0$ und

$J = 1$ kreuzt. Jedes Bild einer anderen der gedachten Parallelen wird im oberen Dreieck seinen Lauf in einem Punkte P des begrenzenden Kreisbogens beenden müssen, während der Verlauf im unteren Dreieck offenbar völlig symmetrisch ist und demnach sein Ende im Punkte P' (Fig. 18b) findet. Die Punkte P und P' werden somit denselben Punkt der J-Ebene abbilden, und indem wir sofort diesen Thatbestand allgemeiner denken, müssen wir den Satz, dass das Doppeldreieck und die J-Ebene eindeutig auf einander bezogen sind, hiernach in folgender Art modificieren. Jedem Werte $J = x + iy$ entspricht jedenfalls nur *ein* Punkt des Doppeldreiecks, wofern $y \gtrless 0$ ist; ebenfalls einer, wenn J reell positiv und kleiner als 1 ist. Aber ist J reell und negativ, so haben wir ersichtlich *zwei* Bildpunkte, einen auf dem Bogen AC, einen auf AD, und ist J reell und grösser als 1, so gibt es ebenfalls *zwei* Bildpunkte, welche auf BC bez. BD liegen.

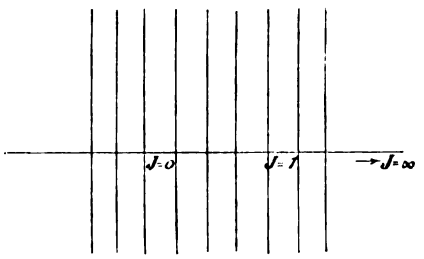


Fig. 18 a.

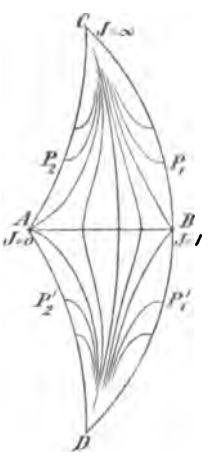


Fig. 18 b.

Inzwischen vermögen wir die Schwierigkeit, welche sich sonach der Eindeutigkeit unserer conformen Beziehung entgegenstellt, leicht zu heben. Wir brauchen nur festzusetzen, dass von den Rändern des Kreisbogendreiecks etwa nur die als demselben zugehörig betrachtet werden sollen, welche in Fig. 19 stärker gezogen sind*). Oder wir können auch bestimmen, dass je zwei entsprechende Punkte von BC und BD einerseits und von AC und AD andrerseits als identisch erachtet werden sollen, wodurch die begrenzenden Kreisbogen unserer Figur zu Paaren einander zugeordnet sind. Die Pfeile der letzten Figur geben die Reihenfolge dieser Zugehörigkeit an. Wir können sogar durch Verfolg dieser letzten Vorstellung *eine mechanische Überführung unserer Kreisbogenfigur in die J-Ebene durch successive Formänderung vollführt denken* (wo-

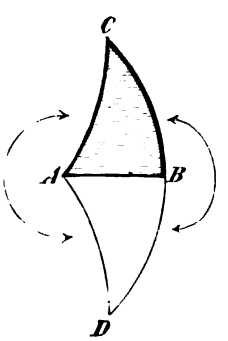


Fig. 19.

*) Dies ist ersichtlich dieselbe Massnahme, deren wir uns schon in Fig. 5 bedienten.

bei wir dieser Operation keinerlei analytische Grundlage geben wollen). In der That erreichen wir durch Annäherung der zu einander gehörigen Kreisbogen, welche mit einer Dehnung derselben Hand in Hand gehen soll, nach Durchlaufung der Zwischenstadien, von denen

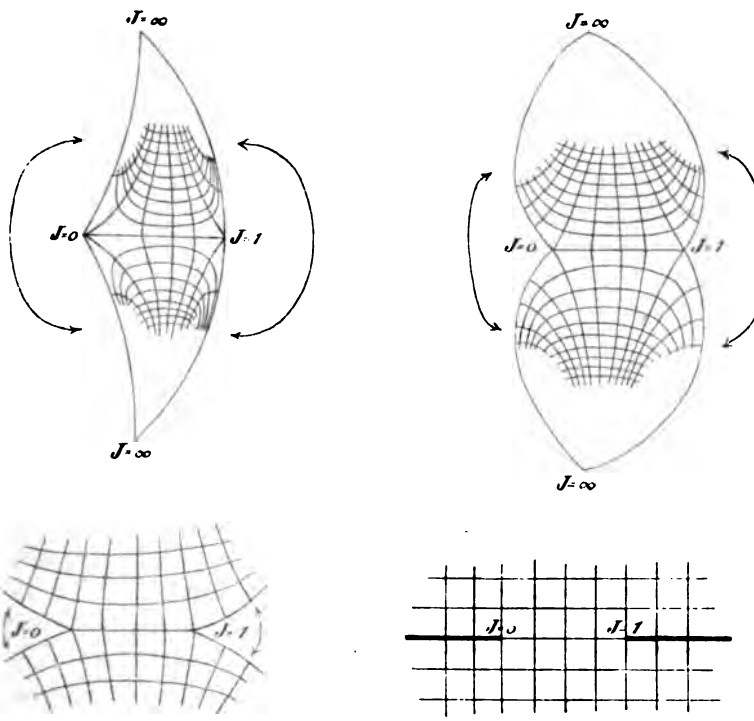


Fig. 20.

wir einige in Figur 20 fixiert haben, endlich die Gestalt der J-Ebene. Die beiden Kreisbogendreiecke haben sich so bis zur gänzlichen Ausfüllung der J-Ebene ausgedehnt. Man hat sich dabei vorzustellen, dass je die beiden Ufer der reellen J-Axe zwischen $-\infty$ und 0 sowie zwischen 1 und $+\infty$ im letzten Augenblick zur vollen Überdeckung der Ebene zusammenzuheften sind.

Offenbar könnten wir uns den Zusammenhang zwischen der J-Ebene und den in der λ-Ebene gelegenen Doppeldreiecken durch ganz entsprechende stetige Deformationen klar machen. Ein weiteres lehrreiches Beispiel für den Gebrauch derselben Methode gibt der folgende Paragraph. Späterhin wird ein ausgedehnter Gebrauch von dieser Vorstellungsweise gemacht. Denn es wird durch dieselbe nicht nur die Abhängigkeit eindeutig auf einander bezogener Bereiche der Anschauung

äusserst lebendig vorgeführt, vielmehr wird dieselbe geradezu als Hilfsmittel zur *Erforschung* algebraischer Abhängigkeiten mit Vorteil herangezogen werden.

§ 7. Beziehung von λ zu μ durch Figuren erläutert.

Die beiden irrationalen Invarianten λ und μ fanden wir im Kap. 1 durch die Relation verknüpft:

$$(1) \qquad \lambda : \lambda - 1 : 1 = \left(\frac{\mu^2 - 1}{2}\right)^2 : \left(\frac{\mu^2 + 1}{2}\right)^2 : -\mu^2,$$

und wir wollen deren Zusammenhang nun auch noch figürlich erläutern. Die Verzweigungspunkte der Function $\mu(\lambda)$ liegen bei $\lambda = 0, 1, \infty$; wir werden also in der μ-Ebene wieder diejenigen Linien construieren, welche auf Grund von (1) reelle Werte von λ abbilden. Es müssen dabei Linienzüge herauskommen, die auch schon in der durch Fig. 14 gegebenen Teilung der μ-Ebene eine Rolle spielen; denn reelle Werte von λ haben ihrerseits wieder eben solche von J im Gefolge.

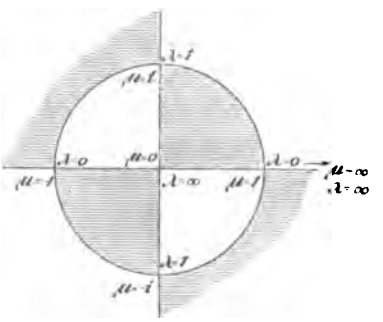


Fig. 21.

In der That hält es keineswegs schwer zu erkennen, dass λ auf der reellen und imaginären μ-Axe, sowie auf dem Einheitskreise der μ-Ebene reell ausfällt, und es zerlegen diese drei Linien bereits, wie wir es hier brauchen, die μ-Ebene in $2 \cdot 4$ Gebiete. Dieselben haben wieder die Form von *Kreisbogendreiecken, welche jetzt alle acht übereinstimmend die Winkel* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ *besitzen.* Wir haben in Fig. 21 gleich wieder die Bilder der positiven λ-Halbebene schraffiert und eine Reihe von Werten λ, μ aufgetragen.

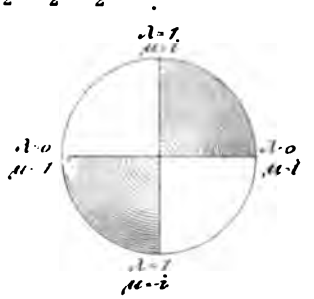


Fig. 22.

Zur stereographischen Projection auf die Kugeloberfläche möge der Kugeldurchmesser gleich 1 genommen werden, während ihre Berührung mit der μ-Ebene in deren Nullpunkt stattfinden soll; das ist dieselbe Kugelfläche, die wir in § 5 benutzten. Es kommt dann die wohlbekannte Figur der *Vierteilung* zum Vorschein (Fig. 22, cf. „Ikos." p. 13); denn die drei Grenzlinien der Gebiete in Fig. 21 werden drei zu einander senkrechte grösste Kreise.

Zwei neben einander liegende Dreiecke, die auf der Kugel ein

Zweieck bilden, geben uns jetzt ein volles Bild der λ-Ebene. Wir können für diesen Zweck z. B. den links von der imaginären Axe und ausserhalb des Einheitskreises gelegenen Teil der μ-Ebene wählen (Fig. 23). Die beiden Quadranten des Einheitskreises von $\mu = -1$ bis $\mu = i$ und von $\mu = -1$ bis $\mu = -i$ tragen dann dieselbe Reihe der Werte von λ, sie gehören also einander an im Sinne des vorigen Paragraphen. Gleiches gilt auch von den beiden von $\mu = i$ und $\mu = -i$ ausgehenden Teilen der imaginären Axe, was wir in beiden Fällen durch die Pfeile anzudeuten versuchten.

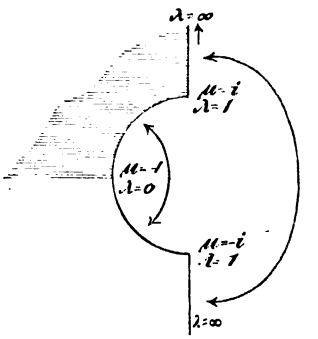


Fig. 23.

Deformieren wir den in Fig. 23 aufgezeichneten Bereich durch Annäherung seiner zusammengehörigen Grenzen und denken dabei die in dem einzelnen Punkte des Bereichs aufgepflanzten Werte von λ mit fortgezogen, so werden wir auf diese Weise den Bereich zur ganzen λ-Ebene zusammenbiegen können. Ganz besonders lehrreich wird diese Operation, wenn wir nun auch noch die rationale Invariante J selbst mit in Betracht ziehen. Die Invariante λ war eine sechsdeutige Function von J, und also müssen sich im Bereich der Fig. 23, dessen

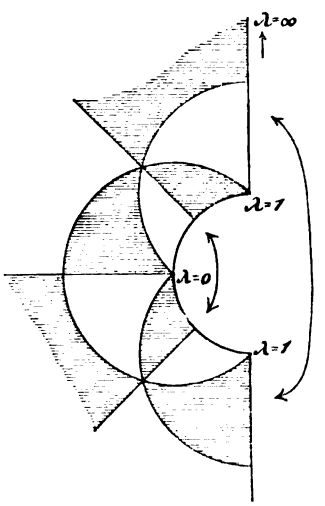


Fig. 24.

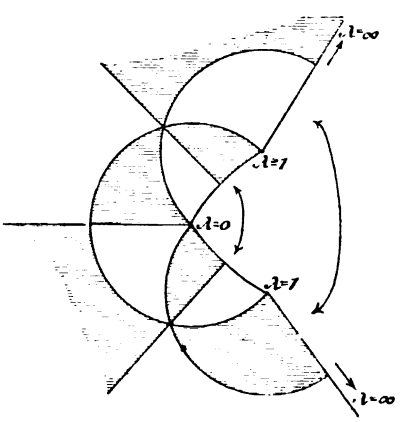


Fig. 25a.

Punkte die complexen Werte von λ tragen, immer sechs Punkte mit dem gleichen J zeigen. Aber der Bereich in Fig. 23 ist aus der μ-Ebene ausgeschnitten, und die Beziehung von μ zu J wurde durch

Fig. 14 versinnlicht. Versehen wir daher die μ-Ebene vorab mit der Teilung dieser Figur und schneiden dann erst unseren jetzt in Rede stehenden Bereich aus, so trägt derselbe in der That, wie Fig. 24 lehrt, eine Unterteilung in zwölf Gebiete, die abwechselnd der positiven und negativen J-Halbebene entsprechen. Diese Figur nun wollen wir unserer stetigen Deformation unterwerfen, indem wir die zusammengehörenden Grenzlinien nach Massgabe der Pfeile einander annähern.

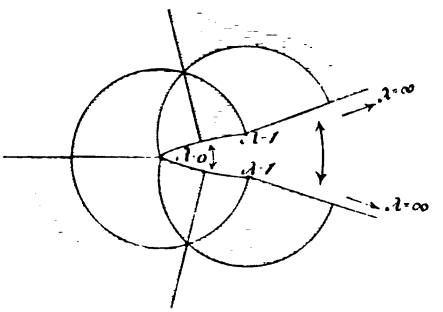


Fig. 25 b.

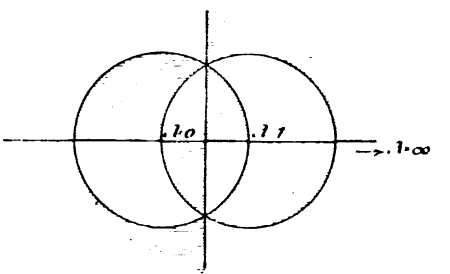


Fig 26.

Wir haben dabei in Fig. 25a und b einige Übergangsformen gezeichnet (die nur schematische Bedeutung haben) und kommen thatsächlich am Schlusse der Umgestaltung zu der bereits bekannten Figur 26 zurück, welche uns oben als Figur 12, p. 70, den Zusammenhang von λ und J erläuterte.

§ 8. Die Kreisverwandtschaft. Sätze über Kreisbogendreiecke.

Die Figuren, welche uns in den voraufgehenden Paragraphen den Zusammenhang der Grössen J, λ, μ erläuterten, sollen jetzt ihrerseits selbst zum Gegenstande der Untersuchung werden. Es gilt verschiedene Gesichtspunkte zu entwickeln, vermöge deren unsere Figuren noch an Bedeutung gewinnen, um uns so den Ansatz zu den allgemeineren Betrachtungen in der zweiten Hälfte dieses Kapitels zu schaffen. Als besonders zweckmässig ziehen wir die Oktaederfigur (vgl. oben Fig. 14 p. 75) heran, doch gelten unsere Überlegungen ebensowohl auch bei den Figuren für den Zusammenhang von J und λ, wie λ und μ.

Bei der in Fig. 15, p. 76, veranstalteten Projection der Oktaederfigur auf die Kugeloberfläche erschienen die Bilder der positiven J-Halbebene (und desgleichen auch die Bilder der negativen J-Halbebene) als 24 mit einander congruente sphärische Dreiecke. Das hatte zur Folge, dass durch Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt ein einzelnes dieser 24 sphärischen Dreiecke in alle übrigen übergeführt werden konnte. Diese Drehungen stellen sich analytisch*) in der Form linear-gebrochener Substitutionen

*) Wie dies in „Ikos." I Kap. 2 in ausführlicher Weise entwickelt wurde.

$$\mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d} \tag{1}$$

dar, deren explicite Gestalt wir in Kap. 1 § 13 reproduciert haben.

Wir verwerten diese Umstände, indem wir sogleich zur μ-Ebene zurückgehen. Dabei deuten wir (1), wie auch im Einzelfall die constanten Coefficienten a, b, c, d beschaffen sein mögen, als eine eindeutige Beziehung dieser Ebene auf sich selbst, durch welche dem Punkte μ jeweils der Punkt μ' zugeordnet ist. Wir sagen auch wohl, dass durch eine Substitution (1) die μ-Ebene in sich selbst transformiert wird. Rechnen wir hier immer die Operation $\mu' = \mu$, bei welcher die μ-Ebene unverändert bleibt, als *identische Substitution* mit, so können wir die vorhin beschriebenen Verhältnisse in den Satz kleiden: *Ein einzelnes Kreisbogendreieck der Fig.* 14 *wird durch gewisse* 24 *linear-gebrochene Substitutionen* (1) *in die mit ihm gleichartigen Dreiecke der Figur transformiert.* Als unter sich gleichartige Dreiecke sind dabei einerseits die schraffierten gedacht und andrerseits die nichtschraffierten.

Zwei Eigenschaften der gemeinten 24 Substitutionen treten hierbei unmittelbar in Evidenz. Erstens werden die *kreisförmigen* Grenzen eines Dreiecks stets wieder in *kreisförmige* Grenzen eines anderen transformiert, d. h. *gewisse Kreise der μ-Ebene gehen wieder in Kreise über.* Zweitens sind die Winkel jenes ersten Dreiecks $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ gleich den ihnen entsprechenden Winkeln des andern, d. h. *die Winkel in den Ecken der Dreiecke bleiben bei unseren Transformationen unverändert.*

Wir haben damit zwei Eigenschaften gefunden, welche nicht nur den besonderen Oktaedersubstitutionen, sondern ganz allgemein den Substitutionen (1) anhaften, und welche sich nicht nur für die Kreise und Winkel der Oktaederfigur zeigen, sondern überhaupt für irgend welche Kreise und Winkel der μ-Ebene.

Verstehen wir nämlich für den Augenblick unter μ ganz allgemein eine complexe Variabele und deuten μ' gesondert in einer Ebene für sich, so ist durch (1) eine *conforme* Abbildung der Ebene von μ auf die von μ' hergestellt. Nach den bekannten Grundsätzen der Theorie*) der conformen Abbildung ist aber ein beliebiger Winkel im Abbilde gleich dem entsprechenden Winkel im Original, möglicher Weise abgesehen von einzelnen singulären Lagen für den Scheitelpunkt des Winkels, die aber im Falle der linearen Abhängigkeit, mit der wir hier zu thun haben, überhaupt nicht auftreten.

*) Als zweckmässige Einleitung in die Theorie der conformen Abbildungen ist zu nennen Holzmüller, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften etc.* (Leipzig 1882). Man vgl. insbesondere das 4. Kapitel dortselbst.

Um die andere für die Substitution (1) namhaft gemachte Eigenschaft zu zeigen, spalte man μ und μ' sowie die Coefficienten von (1) a, b, c, d in ihre reellen und imaginären Bestandteile, setze also $\mu = x + iy$, $\mu' = x' + iy'$ u. s. f. Besteht dann zwischen x und y die Gleichung eines Kreises, so zieht dieselbe zufolge völlig elementarer Rechnung für x' und y' gleichfalls die Gleichung eines Kreises nach sich. Dabei müssen wir freilich hinzusetzen, dass auch die geraden Linien der μ-Ebene, wie der μ'-Ebene als Kreise zu gelten haben, nämlich als solche von unendlich grossem Radius.

Die durch Substitution (1) vermittelte Transformation der Ebene von μ in die von μ' oder auch der μ-Ebene in sich ist demnach so beschaffen, *dass Winkel unverändert bleiben, Kreise wieder in Kreise übergehen.* Dieser letzteren Eigenschaft wegen, vermöge deren sich die durch Substitutionen (1) vermittelten conformen Abbildungen vor anderen auszeichnen, nennt man die Ebenen von μ und μ' oder auch durch (1) auf einander bezogene Bereiche beider Ebenen *kreisverwandt**). Wir werden später noch ausführlich von der Kreisverwandtschaft zweier Ebenen handeln, die wir dann aber stets mit einander zur Deckung gebracht denken**).

Indem wir jetzt den Satz aussprechen, dass in unseren Dreiecksfiguren, z. B. Fig. 14, irgend zwei gleichartige Dreiecke kreisverwandt sind, erblicken wir wieder hierin den Specialfall eines sehr viel allgemeineren Satzes. Es lässt sich nämlich leicht der Satz zeigen, *dass je zwei Kreisbogendreiecke, welche die gleichen Winkel in der gleichen Folge haben, stets mit einander kreisverwandt sind.* Auf die Reihenfolge der Winkel muss man dabei achten, wie wir denn schon bemerkten, dass bei der Durchlaufung des Umfangs gleichartiger Dreiecke der Oktaederteilung die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ immer in der nämlichen Anordnung auf einander folgen.

Der allgemeine Beweis des soeben aufgestellten Satzes lässt sich leicht führen. Mögen nämlich zwei Dreiecke mit den Winkeln α, β, γ in gleicher Folge vorliegen, so wollen wir zuvörderst das erste durch eine Substitution (1) derart transformieren, dass der Scheitelpunkt des

*) Der Name rührt von Möbius her, der die Kreisverwandtschaft zuerst in ausführlicher Weise untersucht hat; man sehe *„Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung"*, Abhdl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W. Bd. II p. 529 (1855), oder auch Möbius' Ges. Werke Bd. II, p. 243. Dortselbst hat das Wort „Kreisverwandtschaft" freilich eine noch etwas umfassendere Bedeutung; wir werden hierauf im übernächsten Paragraphen zurückkommen.

**) Nämlich im ersten Kapitel des folgenden Abschnitts. Es ist deshalb nicht unzweckmässig, dieses Kapitel zur weiteren Erläuterung der Entwicklungen des Textes mit heranzuziehen.

Winkels α nach dem Nullpunkt der complexen Ebene, der zweite Schnittpunkt der Schenkel von α nach deren Unendlichkeitspunkt zu liegen kommt*). Man überzeugt sich leicht, dass dadurch die Substitution (1) noch nicht völlig festgelegt ist; doch denken wir sie in irgend einer Weise specificiert. Das neue Dreieck ist nun ein solches mit zwei geradlinigen Seiten, und indem wir eine gleiche Transformation mit dem zweiten Dreiecke vornehmen, erhalten wir zwei neue Dreiecke, die ersichtlich einander ähnlich sind und sich also vermöge einer Substitution $\mu' = a\mu$ als kreisverwandt erweisen. Eine geeignete Zusammensetzung der drei so benutzten Substitutionen (1) ergiebt uns jetzt eine Substitution, welche das eine gegebene Kreisbogendreieck in das andere überführt.

Zugleich geht aus dieser Überlegung hervor, dass es nur *eine* Substitution (1) giebt, welche zwei kreisverwandte Kreisbogendreiecke in einander überführt. Es geht nämlich ersichtlich das Dreieck mit zwei geradlinigen Seiten nur durch die identische Substitution $\mu' = \mu$ in sich selbst über.

§ 9. Von der Symmetrie bezüglich eines Kreises.

Die oktaedrische Kugelteilung wurde durch neun grösste Kugelkreise hergestellt, die wir uns durch neun Diametralebenen aus der Kugel ausgeschnitten denken können. Diese neun Ebenen waren Symmetrieebenen der Oktaederteilung; denn dieselbe ging gerade in sich selbst über, falls man sie an einer dieser neun Ebenen in elementarem Sinne zur Spiegelung brachte**). Nur freilich entsprach dabei jedesmal ein schraffiertes Dreieck einem freien und umgekehrt. Der Begriff der symmetrischen Lage zweier Punkte oder auch zweier Bereiche bezüglich einer Diametralebene der Kugel hat also einen sofort verständlichen, elementaren Sinn. Wir wollen nachsehen, welche geometrischen Beziehungen zwischen dem Schnittkreis der Symmetrieebene und irgend zwei sich spiegelnden Punkten eingetreten sein werden, wenn wir die Kugeloberfläche stereographisch auf die Ebene projiciert haben.

Sei also K irgend ein Symmetriekreis und P_1, P_2 zwei Punkte der Kugel, die zu einander bezüglich K symmetrisch gelegen sind. Es wird alsdann die gerade Verbindungslinie von P_1 und P_2 auf der Diametralebene, welche K ausschneidet, senkrecht stehen. Dieserhalb muss

*) Bei dieser Betrachtung ist stillschweigend $\alpha > 0$ vorausgesetzt; der besondere Fall eines Kreisbogendreiecks mit lauter verschwindenden Winkeln kommt unten ausführlich zur Erörterung.

**) Man vgl. hier die Auseinandersetzung über die erweiterten Gruppen in „Ikos." I Kap. 1 § 11.

das durch diese Verbindungslinie $\overline{P_1 P_2}$ hindurchgehende Ebenenbüschel die Kugeloberfläche in einem System von Kreisen schneiden, die ohne Ausnahme gegen den Kreis K orthogonal verlaufen. Es ist überdies ohne Mühe einzusehen, dass überhaupt jeder Kreis durch P_1, der K unter rechtem Winkel schneidet, auch durch P_2 hindurch zieht.

Wollen wir nun die so gedachte, auf der Kugeloberfläche liegende Configuration stereographisch auf die Ebene übertragen, so müssen wir dabei die beiden Fundamentaleigenschaften der stereographischen Projection als bekannt voraussetzen, dass dieselbe Kreise der Kugel in Kreise der Ebene überträgt und die Winkel unverändert erhält. Wir erhalten dann folgendes Ergebnis: Die Projection des Kreises K führt auf einen Kreis der Ebene, den wir wieder K nennen. Durch einen beliebigen Punkt P_1 etwa im Innern des Kreises K — denn auch der Punkt P_1 auf der Kugel konnte ja ganz willkürlich gewählt werden — geht dann ein ganzes System von Kreisen, die K unter rechtem Winkel schneiden. Alle diese Kreise gehen noch durch *einen* bestimmten Punkt P_2 ausserhalb K, *und dieser Punkt P_2 ist es, den wir nun auch in der Ebene zu P_1 bezüglich des Kreises K symmetrisch gelegen nennen wollen.* Es bedarf kaum des Hinweises, dass die Beziehung zwischen den beiden Punkten P_1, P_2 eine gegenseitige ist, dass wir also von P_2 beginnend durch die geschilderte Construction zu P_1 geführt worden wären.

Wir erkannten vorhin als die beiden Haupteigenschaften der die Kreisverwandtschaften vermittelnden Substitutionen (1) § 8, dass dieselben Kreise stets wieder in Kreise transformierten und die Winkel unverändert liessen. Da ist denn sofort ersichtlich, dass die Construction, welche uns soeben von P_1 zum bezüglich K symmetrischen Punkte P_2 führte, bei Fortgang zu einer kreisverwandten Ebene ihren Charakter völlig bewahrt. Werden wir also in dieser K, P_1 und P_2 bez. in K', P_1' und P_2' wiederfinden, so werden die Punkte P_1', P_2' einander bezüglich K' symmetrisch gelegen sein. *Die Symmetrie von Punktepaaren bezüglich eines Kreises erweist sich dergestalt gegenüber der Kreisverwandtschaft als invariant.* Durch diesen Satz erhält dann unsere Betrachtung erst den richtigen Grad von Allgemeinheit. Bislang galt sie doch nur für die Kreise K, welche bei der stereographischen Projection aus den grössten Kugelkreisen entstanden; *sie gilt nun überhaupt für jeden Kreis der Ebene,* da man in der That ohne Mühe erkennt, dass sich ein beliebiger Kreis durch eine Substitution (1) § 8 stets in einen andern beliebig vorgeschriebenen überführen lässt*).

Sollen wir zu einem ersten Punkte P_1 seinen symmetrischen be-

*) Das sieht man z. B. leicht mit Hilfe der im ersten Kapitel des folgenden Abschnitts entwickelten anschaulichen Massnahmen.

züglich eines Kreises K wirklich construieren, so werden wir nur zwei Kreise durch P_1 orthogonal zu K zu legen brauchen; deren anderer Schnittpunkt ist dann P_2. Ziehen wir etwa erstlich die Gerade durch P_1 und den Mittelpunkt C von K, welche als Kreis mit unendlich grossem Radius dem in Rede stehenden Kreissystem durch P_1 angehört, und nehmen sodann als zweiten Kreis denjenigen, dessen Mittelpunkt auf dieser geraden Verbindungslinie $\overline{CP_1}$ gelegen ist. Des näheren giebt Fig. 27 diese Verhältnisse wieder. Wir entnehmen aus derselben vermöge elementargeometrischer Betrachtungen die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke CAP_1 und CP_2A, welche dann ihrerseits die Gleichung liefert:

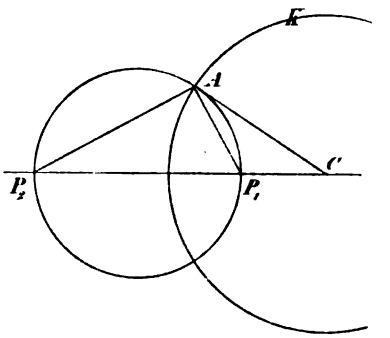


Fig. 27.

$$\overline{CP_1} \cdot \overline{CP_2} = r^2,$$

unter r den Radius von K verstanden. So gewinnen wir den Satz, *dass der Punkt P_2 aus P_1 durch die Transformation vermöge reciproker Radien am Kreise K entspringt.* Die Symmetrie bezüglich K ist also eine anderweit wohlbekannte Transformation.

Ist K ein Kreis mit unendlich grossem Radius d. h. eine Gerade, so erscheint im elementaren Sinne P_2 als Spiegelbild von P_1 an dieser Geraden. Unsere Transformation vermöge reciproker Radien geht dann über in eine Umklappung der Ebene um diese Gerade oder man kann auch sagen in eine *Spiegelung an* dieser Geraden. Wollen wir auch für den allgemeinen Fall eines Kreises K mit endlichem Radius diesen knappen Ausdruck *der Spiegelung an K* für die Transformation durch reciproke Radien beibehalten; wir werden dann von zwei geometrischen Gebilden jedes das Spiegelbild des anderen an K nennen, wenn sie durch die oft genannte Transformation an K gerade mit einander vertauscht werden.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der Spiegelung erkennen wir jetzt durch Rückgang auf den durchlaufenen Entwickelungsgang. Bei der Spiegelung der Kugeloberfläche an einer Diametralebene (hier die Bezeichnung „Spiegelung" im elementaren Sinne gebraucht) gehen ersichtlich Kreise der Kugeloberfläche wieder in Kreise über, während die Winkel unverändert bleiben. Durch stereographische Projection im Verein mit Anwendung einer Substitution (1) § 8 können wir den Schnittkreis jener Diametralebene in einen beliebigen Kreis K der Ebene transformieren, und dabei geht jene elementare Spiegelung der Kugelober-

fläche an der Diametralebene in diejenige Operation über, die wir nun auch Spiegelung der Ebene am Kreise K nannten. Da sehen wir denn, *dass auch bei dieser letzten Spiegelung Kreise stets in Kreise übergeführt werden und alle Winkel unverändert bleiben.* In diesem Sinne reiht sich die Operation der Spiegelung einer Ebene an einem ihrer Kreise durchaus der im vorigen Paragraphen besprochenen durch eine Substitution (1) § 8 definierten Transformation einer Ebene an. Inzwischen besteht doch ein Unterschied darin, *dass bei Ausübung einer Spiegelung die Schenkel der Winkel umgelegt werden*, was bei Anwendung einer Substitution (1) § 8 nicht stattfindet. Durch Verfolg dieser Sachlage schaffen wir uns sogleich die allgemeinere Auffassung der Kreisverwandtschaft, von der schon unter dem Texte des vorigen Paragraphen die Rede war. Doch bereiten wir auch hier die allgemeinen Sätze durch besondere Betrachtung der Fig. 14, p. 75, vor.

§ 10. Das Symmetriegesetz. Directe und indirecte Kreisverwandtschaft.

Bei dem Entwicklungsgange des vorigen Paragraphen ist es von vornherein deutlich, dass unsere ebenen Figuren 12, 14, 21 von der Gesetzmässigkeit der Symmetrie bezüglich der in ihnen vorkommenden Kreise oder, wie wir kurz sagen wollen, vom *Symmetriegesetz* beherrscht werden. Die Kreise der gemeinten Figuren waren nämlich für die bezüglichen Configurationen auf der Kugel durchgehends Schnittkreise der Kugel mit Symmetrieebenen. So möge man nun vor allen Dingen Fig. 14 vornehmen und sich veranschaulichen, wie durch Spiegelung oder, wie man auch sagt, durch *Inversion nach dem Symmetriegesetz* an einem beliebigen der neun Kreise die Figur unter Wechsel der Schraffierung mit sich selbst zur Deckung kommt.

Vor allen Dingen ist es jetzt wichtig, die gewonnene Anschauungsweise für irgend zwei benachbarte Kreisbogendreiecke in Fig. 14 zu verfolgen. Von beiden wird das eine das Spiegelbild des andern sein, längs der gemeinsamen kreisförmigen Seite entworfen. Bei dieser Sachlage giebt uns das Symmetriegesetz offenbar ein Mittel, *die ganze Figur* 14 *von einem einzelnen ihrer Kreisbogendreiecke aus entstehen zu lassen.* Wir werden nämlich das gegebene einzelne Dreieck an jeder seiner drei Seiten spiegeln und nun an solchen neu erzeugten Dreiecken immer wieder die nämliche Operation der Spiegelung bezüglich ihrer noch frei gelegenen Seiten wiederholen. Man wird auf dem Wege mit Notwendigkeit zu derjenigen Teilung der Ebene geführt, welche Fig. 14 versinnlicht.

Hier können wir nun unsere Auffassung noch in einer wichtigen Weise

verallgemeinern. Möge irgend ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ gegeben sein, *so wird stets die Vervielfältigung nach dem Symmetriegesetz, in der geschilderten Weise auf dieses Dreieck angewandt, zu einer Ebenenteilung in 48 Kreisbogendreiecke führen, die mit Fig.* 14 *kreisverwandt erscheint.* In der That ist ja jenes gegebene Dreieck, wie wir es auch wählen mögen, entweder mit den schraffierten oder den freien Dreiecken der Fig. 14 im Sinne von § 8 kreisverwandt. Kreisverwandte Dreiecke aber geben, in entsprechender Weise symmetrisch vervielfältigt, kreisverwandte Figuren. Es ist damit die allgemeinste Auffassung gewonnen, welche wir uns von unseren ebenen Kreisbogenfiguren bilden können: *Es handelt sich um Figuren, welche aus einem Kreisbogendreieck mit besonderen Winkeln, das sonst keiner Beschränkung unterliegt, durch wiederholte Anwendung des Symmetriegesetzes entstehen.*

Ist durch die Betrachtungen des Paragraph 8 die Beziehung zweier gleichartigen Dreiecke der Fig. 14 auf einander charakterisiert, so überblicken wir nun auch die Beziehung zweier ungleichartigen Dreiecke dieser Figur auf einander. Das eine geht in das zweite über, wenn wir die Spiegelung an einem Kreise der Figur mit einer gewissen Operation (1) § 8 vereinen. Auch nach den auf einander folgenden Anwendungen dieser beiden Operationen werden Kreise jeweils wieder in Kreise übergeführt, Winkel bleiben unverändert, nur dass sich ihre Schenkel umlegen. Wollen wir nun auch ganz allgemein zwei dergestalt auf einander bezogene Figuren einander kreisverwandt nennen, wo wir dann also zwischen *Kreisverwandtschaft mit Umlegung der Winkel und Kreisverwandtschaft ohne Umlegung der Winkel* unterscheiden. Letztere nennen wir auch kurz *directe Kreisverwandtschaft* und ihr insbesondere galten die Überlegungen in § 8. Erstere benennen wir demgegenüber als *indirecte Kreisverwandtschaft* und haben ganz allgemein den Satz, dafs sie als Resultat *der directen Kreisverwandtschaft combiniert mit Spiegelung an irgend einem Kreise der Ebene* erscheint. Eine Spiegelung an einem Kreise der complexen Ebene subsumiert sich dabei als besonderer Fall unter die indirecte Kreisverwandtschaft.

Als unmittelbare Folgerungen merken wir uns noch diese an: *Zwei Kreisbogendreiecke, welche die gleichen Winkel in umgekehrter Reihenfolge haben, sind indirect kreisverwandt. Zwei Kreisbogendreiecke, die beide einem dritten indirect kreisverwandt sind, sind unter einander direct kreisverwandt* *).

*) Symmetrische Umformungen geometrischer Figuren an Ebenen oder Kugelflächen, durchaus im obigen Sinne auf den Raum übertragen, sind in der mathe-

§ 11. Bedeutung des Symmetriegesetzes für die Function $\mu(J)$.

Irgend zwei benachbarte Kreisbogendreiecke der μ-Ebene bilden ein Doppeldreieck oder ein Kreisbogenviereck, welches conform auf die ganze J-Ebene bezogen ist, wie wir dies in § 6 ausführlich schilderten. Wir fixieren nun zwei Punkte dieser herausgegriffenen Dreiecke, die bezüglich ihrer gemeinsamen Seite symmetrisch liegen, und fragen nach der Lage der beiden durch jene abgebildeten Punkte der J-Ebene. Nach den Erörterungen von § 6 wird man sofort vermuten, *dass diese beiden Punkte der J-Ebene conjugiert complex sind.* Thatsächlich ist dies auch sofort analytisch beweisbar, falls die gemeinsame Seite K unserer beiden ausgewählten Dreiecke ein Stück der reellen μ-Axe ist. Die beiden symmetrischen Punkte der von uns betrachteten Dreiecke sind dann conjugiert complex und ziehen ebensolche Werte von J nach sich, da die Oktaedergleichung durchgehends reelle Coefficienten hat.

Hat K diese einfache Lage nicht, so können wir doch immer durch

$$\mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}$$

zu einer solchen kreisverwandten Ebene μ' gehen, in der das Bild von K ein Stück K' der reellen Axe geworden ist. J ist dann auch in μ' durch eine Gleichung mit reellen Coefficienten darstellbar, da doch den unendlich vielen reellen Werten μ' auf K' reelle J zugehören. Bezüglich der Geraden K' symmetrische Punkte der neuen Dreiecke entsprechen also conjugiert complexen J, und also gilt dasselbe von den bezüglich K symmetrischen Punkten der ursprünglichen beiden Dreiecke.

Jetzt möge man nach dieser kurzen Ergänzung die Entstehungsweise der Fig. 14, p. 75, aus einem ihrer Dreiecke, wie wir sie im vorigen Paragraphen schilderten, in functionentheoretischem Sinne interpretieren. Mit einem einzelnen etwa schraffierten Ausgangsdreieck ist der Wertcomplex eines Zweiges von $\mu(J)$ in der positiven Halbebene gegeben. Wir setzen uns vor, von hier aus durch analytische Fortsetzung die Function $\mu(J)$ zu untersuchen. Diese Aufgabe wird durch

---

matischen Physik seit lange als Operationsmittel im Gebrauch. Die Symmetrie an Ebenen spielt z. B. in Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* (1861) eine principielle Rolle, und die Symmetrie an Kugelflächen wurde bereits 1845 von Will. Thomson in der Elektrostatik benutzt (cf. Liouville's Journ. Bd. 10). Für die Functionentheorie das Symmetriegesetz mit grossem Erfolg verwertet zu haben, ist das Verdienst von Hrn. Schwarz, dessen bezügliche Arbeiten wir sogleich nennen.

das Symmetriegesetz völlig erledigt. Wir wollen etwa die reelle J-Axe zwischen 0 und 1 überschreiten und also diejenige Seite K des Ausgangsdreiecks in's Auge fassen, welche der Strecke 0-1 der reellen J-Axe entspricht. *Dann werden wir als conformes Abbild der negativen J-Halbebene dasjenige Dreieck erhalten, welches sich aus dem Ausgangsdreiecke durch Inversion an K ergiebt.* Indem wir noch betonen, dass bezüglich K symmetrische Punkte des ursprünglichen und invertierten Dreiecks conjugiert complexen J entsprechen, *hat in der That das Symmetriegesetz die Fortsetzung von $\mu(J)$ in die negative Halbebene hinein völlig bestimmt.*

In derselben Weise hätte man nun weiter zu gehen und jetzt die reelle J-Axe etwa zwischen 0 und $-\infty$ oder zwischen 1 und ∞ zu überschreiten. Offenbar würde man durch Anwendung des gleichen Schlussverfahrens schliesslich zu den sämtlichen Kreisbogendreiecken der Figur und damit zu sämtlichen Zweigen von $\mu(J)$ gelangen. Wir werden sagen dürfen, *dass die Entstehung der ganzen Teilung aus einem einzelnen Dreieck der Durchführung analytischer Fortsetzungen von einem Zweige $\mu(J)$ aus nicht nur entspricht, dass vielmehr jener geometrische Vorgang diesen analytischen Process geradezu vertritt.* Jedes neu entspringende schraffierte Dreieck giebt einen neuen Zweig für die positive J-Halbebene, jedes neue nicht-schraffierte Dreieck einen solchen für die negative.

Wie bequem dieser geometrische Ersatz des abstracten Processes der analytischen Fortsetzung ist, erläutern wir noch an einem dabei zu Tage tretenden Umstande. Die 48 Dreiecke der Figur 14 reihen sich glatt an einander und bedecken in ihrer Gesamtheit die μ-Ebene gerade *einfach*. Irgend ein Einzelwert μ_0 gehört demnach einem bestimmten Dreieck an, so dass ihm *ein* bestimmter Wert von J entspricht. *Aus der einfachen Überdeckung der μ-Ebene mit Kreisbogendreiecken folgt demgemäss, dass die zu $\mu(J)$ inverse Function $J(\mu)$ eindeutig von ihrem Argumente abhängt.* Die einfache Überdeckung selbst aber ist, vermöge des Symmetriegesetzes, Folge der Annahme des ersten Kreisbogendreiecks, und an dieser Annahme wieder ist nach dem in § 8 gegebenen Satze nichts wesentlich, als die Grösse der dem Kreisbogendreieck angehörenden Winkel.

§ 12. Allgemeine Erörterung der functionentheoretischen Bedeutung des Symmetriegesetzes*).

Die Folgerungen des vorigen Paragraphen werden für uns erst dann von allgemeiner Bedeutung, wenn wir die Principien desselben von den besonderen dort vorliegenden Voraussetzungen frei gemacht haben. Das geschieht durch folgende Erörterung. Sei für die positive J-Halbebene eindeutig eine analytische Function $f(J)$ definiert, welche diese Halbebene auf einen Bereich B der f-Ebene derart conform abbildet, dass eine Strecke der reellen J-Axe etwa die zwischen J_0 und J_1 sich auf ein *kreisförmiges Stück K in der Begrenzung von B* überträgt. Längs dieses Stückes spiegeln wir B nach dem Symmetriegesetz und mögen dergestalt den benachbarten Bereich $\overline{B}$ erhalten. Es wird alsdann ganz allgemein behauptet, *dass $f(J)$ bei Überschreitung der J-Axe zwischen J_0 und J_1 eine analytische Fortsetzung in die negative J-Halbebene zulässt, welch' letztere eben durch die erreichte Fortsetzung auf $\overline{B}$ abgebildet wird; insbesondere werden bezüglich K symmetrische Punkte von B und $\overline{B}$ conjugiert imaginäre J abbilden.*

In der That gehe man, wie wir es oben schon im speciellen Falle thaten, durch Ausübung einer Substitution

$$f' = \frac{af + b}{cf + d} \tag{1}$$

zu einer solchen kreisverwandten Figur, dass sich K auf ein Stück K' der reellen f'-Axe überträgt. Aus B und $\overline{B}$ entstehen B' und $\overline{B'}$, die im elementaren Sinne bezüglich K' symmetrisch sind. Es genügt, unseren Satz für f' unter Zugrundelegung der neuen Figur zu zeigen, da er sich dann bei der bekannten Eigenart der Kreisverwandtschaft ohne weiteres auf die frühere Sachlage überträgt. Wir gehen hierbei einen indirecten Weg. Function f' ist mit f für die positive J-Halbebene definiert. Pflanzen wir jetzt in unabhängiger Weise in den Punkten der negativen Halbebene derart Functionswerte $\overline{f'}$ auf, dass in conjugiert complexen Punkten J die Werte f' und $\overline{f'}$ selbst conjugiert complex sind und beweisen nun umgekehrt, dass $\overline{f'}$ gerade die analytische Fortsetzung von f' vorstellt!

Nach den Principien der Functionentheorie stellt der Wertcomplex $\overline{f'}$ für den Bereich der negativen J-Halbebene eine analytische Function von J dar, so gut wie f' für die positive. Da aber f' für alle reellen Punkte J zwischen J_0 und J_1 reell ist, so gehen erstens die Wertcomplexe f' und $\overline{f'}$ über diese Strecke der reellen J-Axe stetig in einander über,

*) Hier vgl. man nun Schwarz' Originalarbeit, *Über einige Abbildungsaufgaben*, Cr. J. Bd. 70 p. 105 (1869).

fürs zweite beachte man, dass für die Umgebung eines reellen Punktes J zwischen J_0 und J_1 bei der angezeigten Sachlage f' eine Taylor'sche Entwicklung mit *reellen* Coefficienten zulässt. Im Convergenzbezirk dieser Reihe, der in beide Halbebenen gleichförmig hineingreift, entsprechen demgemäss conjugiert complexen J eben solche Werte der dargestellten Function. Es stellt sich demnach bei Überschreitung der reellen Axe zwischen J_0 und J_1 thatsächlich $\overline{f'}$ als analytische Fortsetzung von f ein, wie zu beweisen war.

§ 13. Begriffsbestimmung und Fundamentaleigenschaften der Dreiecks- oder s-Functionen.

Wir haben gegenwärtig den wichtigsten Wendepunkt des Kapitels erreicht; die Function $\mu(J)$ und die Teilung der μ-Ebene haben wir ausgebeutet und an ihr eine Reihe wichtiger Begriffe und Massnahmen eingeübt; *die nämlichen Processe sollen jetzt unter allgemeineren Prämissen zur Anwendung gelangen. An Stelle des Kreisbogendreiecks mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ *soll nämlich allgemein das Kreisbogendreieck mit den Winkeln* $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ *treten, und wir wollen dann versuchen von ihm aus alle die Folgerungen zu ziehen, die wir soeben vom besonderen Oktaederdreieck aus haben ziehen können.*

Mögen die drei Winkel in der Reihe $\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi$ so auf einander folgen wie die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ in einem schraffierten Dreieck der Figur 14, *so existiert jedenfalls in der positiven J-Halbebene eine einzige, eindeutig definierte Function von J, welche diese Halbebene derart conform auf das Dreieck abbildet, dass in den Scheitelpunkten der Winkel* $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ *bez. die Werte* $J = 1, 0, \infty$ *stattfinden.* Wir nennen diese Function ihrer Definition wegen eine Dreiecksfunction und bezeichnen sie nach dem Vorgange von Hrn. Schwarz*) durch

$$s(\alpha, \beta, \gamma; J).$$

Für ihre Existenz und eindeutige Bestimmtheit könnten wir uns auf den bekannten Grundsatz der Riemann'schen Functionentheorie von der Möglichkeit der conformen Beziehung zweier einfach zusammenhängenden Bereiche auf einander berufen. Aber sogleich in einem der folgenden Paragraphen werden wir den Existenzbeweis noch in einer directen Weise führen.

*) s soll hier die Abkürzung von „sphaera" sein und darauf hindeuten, dass man die einfachste Vorstellung von dem Verlaufe unserer Function erhält, indem man sich die in Betracht kommenden Kreisbogendreiecke durch stereographische Projection auf die Kugel übertragen denkt.

Vorab stellen wir die Fundamentaleigenschaften der s-Function zusammen, wie sie sich vermittelst des Symmetriegesetzes nun ohne weiteres ergeben. Alles werden wir im wesentlichen erledigt haben, wenn wir die geometrische Aufgabe durchführen, das gegebene Dreieck vermittelst des Symmetriegesetzes zu vervielfältigen und die schliesslich bei diesem Process zu Tage tretende Figur zu überblicken. Nehmen wir an, dass dies bereits geschehen sei. Zwecks grösserer Anschaulichkeit wollen wir dabei wieder das erste Dreieck und alle diejenigen, die aus ihm durch eine gerade Zahl von Inversionen hervorgehen, schraffieren, die anderen unschraffiert lassen. Wir haben dann den Satz: *Jedes schraffierte Dreieck der erzeugten Figur giebt uns den Wertcomplex eines durch analytische Fortsetzung von s erreichbaren Zweiges unserer Function für die positive Halbebene J, jedes freie Dreieck leistet ein gleiches für die negative Halbebene J. Soviel Dreiecke der einzelnen Art die entspringende Figur zusammensetzen, so viel Zweige hat unsere analytische Function $s(\alpha, \beta, \gamma; J)$.* Da aber alle Dreiecke der einzelnen Art unter sich direct kreisverwandt sind, *so ist jeder Zweig von $s(\alpha, \beta, \gamma; J)$ eine lineare Function jedes anderen.* Trifft es sich, dass die Dreiecke der Figur *nicht mit einander collidieren*, sondern sich glatt an einander reihen, wie die der Figur 14, *so wird die inverse Function $J(s)$ eindeutig von ihrem Argumente abhängen**).

§ 14. Reihenentwicklungen für einen Zweig der s-Function.

Zur Vorbereitung für einige demnächst auszuführende Rechnungen untersuchen wir die Gestalt von Reihenentwicklungen, welche die s-Function nach Potenzen von J zulässt. Doch genügt es zumeist, wenn wir nur die Gestalt der Anfangsglieder solcher Entwicklungen aufstellen. Dabei können wir nicht umgehen, in ausgiebigerer Weise von den Principien der Theorie der conformen Abbildung Gebrauch zu machen.

Sei J_0 ein beliebiger Punkt der J-Ebene, vorerst nur abgesehen von den dreien $J = 0, 1, \infty$, sei weiter s irgend ein specieller Zweig unserer Function, der für J_0 den Wert s_0 annimmt. Es wird alsdann durch s die Umgebung von J_0 conform auf diejenige von s_0 abgebildet, und es lässt demgemäss $(s - s_0)$ eine Entwicklung *nach positiven ganzen Potenzen von $(J - J_0)$ zu*:

---

*) Alles dies sind Folgerungen, welche im Anschlusse an Riemann zuerst Hr. Schwarz vermöge des Symmetriegesetzes entwickelt hat; cf. dessen schon gen. Arbeit, *Über diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres 4ten Argumentes ist*, Crelle's Journ. Bd. 75 (1872). Die sämtlichen Entwicklungen der noch folgenden Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels gehen auf diese Arbeit zurück.

(1) $$s - s_0 = c_1(J - J_0) + c_2(J - J_0)^2 + \cdots,$$

in welcher der Coefficient c_1 des ersten Gliedes eine endliche, von Null verschiedene Zahl ist.

Anders wird der Charakter der Entwicklungen für die Umgebung eines der Punkte $J = 1, 0, \infty$, welche in der That singuläre Punkte für die durch den Zweig s vermittelte Abbildung der J-Ebene sind. Wir müssen hier auf die drei Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ unserer Kreisbogendreiecke zurückgehen und bemerken vorab, dass zufolge ihrer Einführung die drei Zahlen α, β, γ als reell und positiv und zwar < 2 anzusehen sind*). *Dabei schliessen wir aber die untere Grenze* 0 *für diese Zahlen keineswegs aus.*

Wir wollen nun zuvörderst die positive J-Halbebene und also unter den beiden zum Zweige s gehörigen Dreiecken das schraffierte in Augenschein nehmen. Sei dann J_0 einer der drei singulären Punkte, ν die ihm zugehörige Zahl aus der Reihe α, β, γ, die zunächst > 0 sei, und s_0 die bezügliche Ecke des gedachten Dreiecks. Wir beschreiben um J_0 mit sehr kleinem Radius einen Kreis, der einen kleinen halbkreisförmigen Bereich in der positiven Halbebene um J_0 ausschneidet. Im conformen Abbild erscheint dieser Halbkreis annähernd zu einem kleinen Kreisausschnitt mit dem Centriwinkel $\nu\pi$ und dem Scheitelpunkt s_0 deformiert**). Aber genau wird eine derartige Abbildung des Halbkreises auf den Kreisausschnitt durch die Function $s_0 + c(J - J_0)$ geleistet, wenn wir die Constante c dabei in richtiger Weise bestimmen. *Für die Umgebung von J_0 erschliessen wir solchergestalt als angenäherte Darstellung von s:*

(2) $$s - s_0 = c(J - J_0)^\nu.$$

Diese Überlegung gilt aber nur, wenn $\nu > 0$ ist, und den Fall $\nu = 0$ haben wir jetzt noch besonders zu betrachten. Nun wird jener kleine Halbkreis um J_0 annähernd auf ein kleines gleichschenkliges Kreisbogendreieck abgebildet, dessen Basiswinkel rechte sind, während der Winkel an der Spitze bei s_0 verschwindet. Gehen wir durch Ausübung der Substitution $s' = \frac{1}{s - s_0}$ zur kreisverwandten s'-Ebene, so erscheint jenes sehr kleine gleichschenklige Dreieck jetzt in Gestalt eines sich ins Unendliche ziehenden Bandes, das von zwei geraden Parallelen und einer dritten zu jenen senkrecht stehenden Geraden begrenzt wird. Aber genau wird eine solche Abbildung des um J_0 abgegrenzten halbkreisförmigen Bereichs durch die Function

*) Letzteres wäre an sich keineswegs notwendig; es ist aber im Texte nicht nötig, dass wir eine allgemeinere Voraussetzung machen.

**) Man erinnere sich hier an die in § 6 beschriebene mechanische Überführung des Kreisbogendreiecks in die Halbebene.

$$a \log b(J - J_0) = a \log (J - J_0) + c$$

geleistet, wenn wir darin die Constanten a, b oder auch a, c in richtiger Weise bestimmen. *Für $v = 0$ finden wir sonach für die nächste Umgebung von J_0 als angenäherte Darstellung unseres Zweiges s:*

$$s - s_0 = \frac{1}{a \log b(J - J_0)}. \tag{3}$$

§ 15. Differentialgleichung dritter Ordnung für die s-Function.

Mit Hilfe der entwickelten Sätze sind wir leicht im Stande, eine Differentialgleichung dritter Ordnung anzugeben, der die s-Function als Integral zugehört. In „Ikos." p. 74 ist der Nachweis geführt, dass der Differentialausdruck dritter Ordnung:

$$[s]_J = \frac{\frac{d^3s}{dJ^3}}{\frac{ds}{dJ}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2s}{dJ^2}}{\frac{ds}{dJ}}\right)^2 \tag{1}$$

(derselbe, zu dem wir in § 16 des vorigen Kapitels gekommen waren) unverändert bleibt, wenn man s durch eine beliebige linear-gebrochene Function seiner selbst ersetzt. Nun sind, zufolge unserer geometrischen Construction, alle Zweige, in welche man einen ersten Zweig unserer Function $s(\alpha, \beta, \gamma; J)$ fortsetzen kann, solche lineare Functionen dieses ersten. Der Ausdruck $[s]_J$ hat demnach für alle Zweige von s den nämlichen Wert und ist somit *eine eindeutige Function von J*, die wir jetzt berechnen wollen.

Zu dem Ende wollen wir die Unstetigkeitsstellen von $[s]_J$ in der J-Ebene feststellen und dürfen dabei nach dem gerade Gesagten unter s irgend einen Zweig unserer Function verstehen. Ist J_0 irgend ein Punkt der J-Ebene, abgesehen nur von den drei singulären, so bringen wir zur Berechnung unseres Differentialausdrucks dritter Ordnung die Entwicklung (1) § 14 in Anwendung. Es zeigt sich, dass keine der ersten drei Ableitungen von s nach J bei J_0 unstetig wird, dass überdies die erste Ableitung den von Null verschiedenen Wert c_1 annimmt. *Die eindeutige Function $[s]_J$ von J hat somit bei J_0 einen endlichen Wert.* Unstetigkeitspunkte derselben können also nur in den singulären Stellen $J = 1, 0, \infty$ vorkommen.

Bringt man für $J = 1, 0, \infty$ nach (2) § 14 die Näherungsdarstellungen in Anrechnung:

$$s - s_1 = c_1(J - 1)^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \quad s - s_0 = c_2 J^{\beta}, \quad s - s_\infty = c_3\left(\frac{1}{J}\right)^{\gamma},$$

α, β, γ vorab > 0 vorausgesetzt, so berechnen sich sofort für unsere

eindeutige Function $[s]_J$ *in den Umgebungen von* $J = 1,\ 0,\ \infty$ *bez. die Anfangsterme*:

$$(2) \qquad \frac{1-\alpha^2}{2(J-1)^2},\quad \frac{1-\beta^2}{2J^2},\quad \frac{1-\gamma^2}{2J^2}.$$

Diese Ausdrücke bleiben auch dann noch in Kraft, wenn eine oder mehrere der Zahlen α, β, γ *mit Null identisch werden.* Alsdann nämlich haben wir von der Darstellung (3) § 14 für s auszugehen, können aber auch, da $[s]_J$ unverändert bleibt, wenn wir s durch eine lineare Function seiner selbst ersetzen, für die Berechnung von $[s]_J$ s direct mit $\log(J - J_0)$ identificieren. Da erhält man für ein endliches J_0 angenähert $[s]_J = \frac{1}{2(J-J_0)^2}$, was sich in der That für $J_0 = 1$ oder 0 vermöge der Specialwerte $\alpha = 0$ bez. $\beta = 0$ unter (2) subsumiert. Für $J_0 = \infty$ und also $(J - J_0) = \frac{1}{J}$ kommt aber $[s]_J = \frac{1}{2J^2}$, was wirklich vermöge $\gamma = 0$ aus der dritten Annäherung (2) entspringt.

Bei den Eigenschaften, die wir nunmehr für unsere Function $[s]_J$ kennen gelernt haben, schliessen wir, dass sie *eine rationale Function* 4ten *Grades von* J *ist mit den beiden Unstetigkeitspunkten* $J = 0$ *und* $J = 1$. Unter Berücksichtigung von (2) setzen wir demnach an:

$$[s]_J = \frac{1-\alpha^2}{2(J-1)^2} + \frac{A}{J-1} + \frac{1-\beta^2}{2J^2} + \frac{B}{J} + C$$

mit noch unbestimmten Constanten A, B, C. Zur Bestimmung derselben entwickeln wir diesen Ausdruck von $[s]_J$ bei $J = \infty$ in eine Reihe nach absteigenden Potenzen von J:

$$[s]_J = C + \frac{A+B}{J} + \frac{2-\alpha^2-\beta^2+2A}{2}\cdot\frac{1}{J^2} + \cdots$$

und haben somit, um der dritten Formel (2) gerecht zu werden, für A, B, C die Gleichungen

$$C = 0,\quad A + B = 0,$$
$$2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2A = 1 - \gamma^2,$$

die zu ihrer Bestimmung hinreichen. *Wir finden dergestalt, dass die* s-*Function* $s(\alpha, \beta, \gamma; J)$ *Integral der Differentialgleichung**) *dritter Ordnung ist:*

$$(3) \qquad [s]_J = \frac{1-\alpha^2}{2(J-1)^2} + \frac{1-\beta^2}{2J^2} + \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-1}{2J(J-1)}.$$

Ist s irgend ein Partikularintegral dieser Differentialgleichung, so ist jedes andere Integral s' derselben in der Form darstellbar

*) Die hier gegebene Ableitung derselben ist genau derjenigen der Gleichung (34) in „Ikos." p. 78 nachgebildet, welche letztere übrigens als Specialfall in der Gleichung (3) des Textes enthalten ist.

$$s' = \frac{as + b}{cs + d}; \tag{4}$$

denn die Quotienten der Integrationsconstanten a, $b \cdots$ geben hier gerade den richtigen Grad der Allgemeinheit. Aber für uns bedeutet (4) eine Kreisverwandtschaft, und nun beachten wir, dass alle Eigenschaften der s-Function, von denen wir bei Definition dieser Function ausgingen, gegenüber der Kreisverwandtschaft Invarianz besitzen. Es folgt: *Jedes Integral der Differentialgleichung* (3) *hat den Charakter der s-Function.* Speciell hat jeder Zweig der s-Function, der sich aus dem ursprünglich angenommenen durch analytische Fortsetzung ergiebt, wieder denselben Charakter wie dieser.

Mit der Aufstellung der Differentialgleichung (3) ist nun auch der Beweis der Existenz der s-Function, wegen dessen wir uns oben auf allgemeine Riemann'sche Principien beriefen, auf Grund bekannter Sätze der Theorie der Differentialgleichungen geliefert*). Umgekehrt hätte man bei dieser Sachlage die Differentialgleichung selbst zum Ausgangspunkte machen können, um von ihr aus Definition und Eigenschaften der s-Function zu gewinnen. Thatsächlich ist dies der Gang, den Hr. Schwarz in seiner unter § 13 genannten Arbeit eingeschlagen hat.

§ 16. Zusammenstellung früher bereits vorgekommener Dreiecksfunctionen.

Beispiele von Dreiecksfunctionen treten bereits im früheren mehrfach auf. Recapitulieren wir zunächst aus den Vorlesungen über das Ikosaeder, *so sind sämtliche Irrationalitäten der regulären Körper Dreiecksfunctionen;* denn sie leisten alle die conforme Abbildung einer Halbebene auf Kreisbogendreiecke mit bestimmten Winkeln. (Es ist allerdings, wenn wir an den Entwicklungen von „Ikos." festhalten, die Lage dieser Dreiecke auf der Kugel keine ganz willkürliche, so dass wir mit partikulären s-Functionen zu thun haben.) So werden wir die *Irrationalität des Dieders* durch

---

*) Noch bemerken wir, dass sich s als Quotient zweier nicht durch eine lineare Relation verbundenen Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dJ^2} + \frac{1 - \beta + (\alpha + \beta - 2)J}{J(1 - J)} \cdot \frac{dy}{dJ} + \frac{\gamma^2 - (1 - \alpha - \beta)^2}{4J(1 - J)} \cdot y = 0$$

darstellt. Man wolle zum Beweise dieser Behauptung das dritte Kapitel in Abschnitt I von „Ikos." zu Rate ziehen und dortselbst insbesondere auch noch die Beziehungen unserer obigen Entwicklungen zu Riemann's P-Function vergleichen. Man sehe auch die unter p. 94 genannte Arbeit von Schwarz.

$$s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{n}; J\right)$$

bezeichnen können und haben bereits im vorigen Kapitel die beiden besonderen Fälle

$$\lambda(J) = s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}; J\right), \quad \mu(\lambda) = s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \lambda\right)$$

zu betrachten gehabt. Die *Tetraeder-Irrationalität* nennen wir weiterhin*) $\xi(J)$. Als partikulärer s-Function kommen ihr die Werte $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$ zu, so dass wir schreiben können:

$$\xi(J) = s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}; J\right).$$

Die *Oktaeder-Irrationalität* trat in den beiden vorigen Kapiteln wiederholt als $\mu(J)$ auf, so dass es genügen wird, nochmals an die Gleichung

$$\mu(J) = s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}; J\right)$$

zu erinnern, deren wir schon am Schlusse des letzten Kapitels gedachten. Endlich wollen wir hinfort die *Ikosaeder-Irrationalität* durch $\zeta(J)$ bezeichnen; diese ist dann als partikuläre s-Function definiert durch

$$\zeta(J) = s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}; J\right).$$

Das wichtigste Resultat aber, das sich hier einstellt, ist dieses, *dass auch $\omega(J)$ eine Dreiecksfunction ist;* denn in der That erwähnten wir schon vorgreifend am Schlusse des vorigen Kapitels, dass die Differentialgleichung für $\omega(J)$ (Formel (4) p. 63) ein besonderer Fall der Differentialgleichung der s-Function sei, und wir gewinnen jene wirklich, indem wir in diese letztere die besonderen Werte

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = 0$$

eintragen. So haben wir $\omega(J)$ als partikuläre s-Function zu definieren durch

$$\omega(J) = s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 0; J\right)$$

und gewinnen nun den Fundamentalsatz: *Ein Zweig der Function $\omega(J)$ z. B. der Ausgangszweig bildet die einzelne J-Halbebene auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 ab**). Alle Sätze des vorigen Kapitels, die wir über $\omega(J)$ entwickelten, subsumieren sich nun unter die Eigenschaften, die wir allgemein für die s-Functionen erkannten. So

*) Cf. unten § 18. **) Cf. unten § 21.

z. B. war jeder Zweig von $\omega(J)$ eine lineare Function eines beliebigen z. B. des Ausgangszweiges; so fanden*) wir weiter als Näherungsdarstellungen für den Ausgangszweig in der positiven J-Halbebene bei $J = 0,\ 1,\ \infty$ bez.

$$(1)\quad \omega - \varrho = c_0 J^{\frac{1}{3}},\quad \omega - i = c_1 (J-1)^{\frac{1}{2}},\quad \omega = \frac{i}{2\pi}\log(1728\cdot J),$$

die sich ersichtlich unter die Formeln des § 14 subsumieren. Als Argumente für die Ecken des Ausgangsdreiecks erscheinen dabei die wohlbestimmten Werte ϱ, i und ∞.

Endlich haben wir noch einer s-Function zu gedenken, welche den bisherigen Entwicklungen keineswegs fremd ist; es ist die Function $\omega(\lambda)$. Wird gleich die Thatsache, dass $\omega(\lambda)$ eine s-Function ist, später in directer Weise zu Tage treten, so wollen wir doch den Nachweis schon hier liefern, um insbesondere die Werte von α, β, γ festzustellen, welche dieser s-Function eigentümlich sind. Sicher ist $\omega(\lambda)$ durch Vermittlung von J eine analytische Function, und es ist auch sogleich zu sehen, *dass alle Zweige dieser Function $\omega(\lambda)$ linear in einem einzelnen darstellbar sein werden.* Beschreibt nämlich λ einen geschlossenen Weg in seiner Ebene, so wird am Schlusse desselben $J(\lambda)$ wieder seinen ersten Wert annehmen, und demnach muss ω entweder gleichfalls wieder seinen Anfangswert angenommen haben oder doch in eine lineare Function dieses Anfangswertes übergegangen sein. Bei dieser Sachlage wird $[\omega]_\lambda$ eine eindeutige Function von λ sein, die wir berechnen wollen. Wir wiederholen dabei durchaus die Überlegung des § 15, operieren mit einem Zweige ω von $\omega(\lambda)$ und legen übrigens die in Fig. 12, p. 70, gegebene Teilung der λ-Ebene der Betrachtung zu Grunde.

Sei λ_0 zunächst ein beliebiger Punkt, der nicht gerade in einen Eckpunkt von Dreiecken der Fig. 12 fällt, so sei dortselbst $J = J_0$ und $\omega = \omega_0$. Die Umgebung von λ überträgt sich conform auf die von J_0 und diese wieder in gleicher Art auf die von ω_0, *so dass $[\omega]_\lambda$ in λ_0 nicht unstetig werden kann.* Sei zweitens λ_0 einer der beiden Werte, für welche J verschwindet, so ist das für $\omega(J)$ ein singulärer Wert von J. Inzwischen haben wir dann, unter ω_0 den zugehörigen Wert von ω verstanden, neben einander annähernd

$$\lambda - \lambda_0 = c_0 J^{\frac{1}{3}},\quad \omega - \omega_0 = c_1 J^{\frac{1}{3}},$$

so dass $\omega - \omega_0 = c(\lambda - \lambda_0)$ wird und $[\omega]_\lambda$ für λ_0 nicht unstetig werden kann. Genau das nämliche Resultat erhalten wir für jeden der drei Werte λ, für welche $J = 1$ wird, und es bleiben sonach nur

*) Man sehe die Formeln (3) und (5) pg. 61.

noch allein die drei Punkte $\lambda = 0,\ 1,\ \infty$ zu untersuchen, in denen $J = \infty$ wird. Sei einer von ihnen λ_0, und ω_0 zugehöriger Wert des Zweiges ω, so haben wir nunmehr zu gleicher Zeit:

$$\lambda - \lambda_0 = c : J^{\frac{1}{2}}, \quad \omega - \omega_0 = \frac{1}{a \log bJ}.$$

Eliminieren wir J, so kommt mit gewissen zwei neuen Constanten A, B:

$$\omega - \omega_0 = \frac{1}{A \log B(\lambda - \lambda_0)}\text{*)}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Angaben ist nach Analogie von § 15 sofort das Resultat zu überblicken. *Als Differentialgleichung findet sich:*

$$[\omega]_\lambda = \frac{1}{2(J-1)^2} + \frac{1}{2J^2} - \frac{1}{2J(J-1)},$$

und man hat also:

$$\omega(\lambda) = s(0,\ 0,\ 0;\ \lambda).$$

Hieraus schliessen wir sofort: *Irgend ein Zweig der Function $\omega(\lambda)$ leistet die Abbildung einer λ-Halbebene auf ein Kreisbogendreieck mit durchgehends verschwindenden Winkeln.*

Überblicken wir noch einmal die im Laufe des Paragraphen namhaft gemachten Dreiecksfunctionen, so muss uns die Thatsache auffallen, *dass alle hier zur Geltung kommenden Werte von α, β, γ rationale Brüche mit dem Zähler* 1 *sind.* Alle genannten Dreiecksfunctionen sind sonach in der allgemeinen Form

$$s\left(\frac{1}{\nu_1},\ \frac{1}{\nu_2},\ \frac{1}{\nu_3};\ J\right)$$

enthalten, wo die ν_i *ganze* Zahlen oder auch ∞ bedeuten sollen. Die bei den betrachteten Functionen eintretenden Zahlwerte der ν fassen wir in der Tabelle zusammen

	ν_1	ν_2	ν_3
$\mu(\lambda)$	2	2	2
$\lambda(J)$	2	3	2
$\xi(J)$	2	3	3
$\mu(J)$	2	3	4
$\zeta(J)$	2	3	5
$\omega(J)$	2	3	∞
$\omega(\lambda)$	∞	∞	∞

*) Hiermit erklärt sich die frühere (p. 56) Bemerkung, dass bei Darstellung der Perioden ω_1, ω_2 als Functionen von λ für die Umgebung *jedes* der singulären Punkte $\lambda = 0,\ 1,\ \infty$ Logarithmen auftreten.

§ 17. Arteinteilung der Dreiecksfunctionen.

In einem letzten Teile des vorliegenden Kapitels bringen wir jetzt unsere Untersuchung der Dreiecksfunctionen dadurch zum vorläufigen Abschluſs, daſs wir das Symmetriegesetz thatsächlich ausbeuten, um uns aus einem ersten vorgegebenen Dreiecke mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ durch Vervielfältigung diejenige Figur herzustellen, die alle wesentlichen Eigenschaften von $s(\alpha, \beta, \gamma; J)$ zur Anschauung bringt. Hier soll nun freilich nicht jedes mögliche Zahlsystem für α, β, γ zugelassen werden; wir sondern vielmehr nur diejenigen s-Functionen zur näheren Untersuchung aus, *deren inverse Functionen $J(s)$ eindeutig sind.* Da ist es eine erste Bedingung, die wir fordern müssen, dass sich die Dreiecke bei ihrer Vervielfältigung glatt um ihre Ecken herum anordnen. Sie sollen also die Umgebungen solcher Ecken einfach und ohne mit einander zu collidieren bedecken, wie wir dies von der Oktaederteilung her gewohnt sind. Wir wollen sogleich diese Forderung in eine Bedingung für die Zahlen α, β, γ umsetzen, welch' letztere wir vorerst von Null verschieden voraussetzen.

Betrachten wir zunächst die Umgebung des Scheitelpunktes etwa vom Winkel $\alpha\pi$. Wir dürfen in einfachster Weise dessen Schenkel als gerade voraussetzen; denn es ist sofort ersichtlich, dass diejenigen Eigenschaften der Dreiecke, um welche es sich hier handelt, sich auf kreisverwandte Figuren invariant übertragen. Sollen wir nun vom so gedachten Ausgangsdreieck aus, wenn wir es um den Scheitelpunkt des Winkels $\alpha\pi$ herum vervielfältigen, thatsächlich nach *einmaligem* Umkreis zu diesem nämlichen Dreieck zurückgeführt werden, so ist offenbar die einzige Bedingung dafür diese, *dass die Zahl α ein rationaler Bruch mit dem Zähler* 1 *ist*:

$$\alpha = \frac{1}{\nu_1}.$$

In der That wird für einen solchen Wert von α der Scheitelpunkt des Winkel $\alpha\pi$ im Mittelpunkt eines Kranzes von $2\nu_1$ abwechselnd symmetrischen und congruenten Kreisbogendreiecken liegen, welche die Umgebung dieses Mittelpunktes vollständig und einfach bedecken. Völlig analogen Charakter trägt, wie schon angedeutet, die entspringende Figur bei allgemeinerer Lage des Kreisbogendreiecks, nur dass dann an Stelle der elementaren Symmetrie und Congruenz der $2\nu_1$ Dreiecke, allgemein zu reden, indirecte und directe Kreisverwandtschaft tritt*).

Indem wir die Gültigkeit dieser Überlegung sofort auch auf β

*) Zur Veranschaulichung der geschilderten Verhältnisse dienen die oben benutzten wie die sogleich mitzuteilenden Figuren.

und γ ausdehnen, entspringt der Satz: *Eine s-Function, deren inverse Function $J(s)$ eindeutig ist, hat notwendig die Form des vorigen Paragraphen*:

$$s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; J\right). \tag{1}$$

Dass aber auch jede s-Function dieser Gestalt eine eindeutige inverse Function $J(s)$ hat, werden wir im Laufe der nächsten Paragraphen erkennen. Derselbe Satz gilt auch noch, wie wir erst weiter unten zeigen, wenn man unendlich grosse Werte der ν zulässt. Von hier aus wird dann die am Schlusse des vorigen Paragraphen besprochene Erscheinung ihre richtige Würdigung erfahren.

Indem nun unsere weitere Betrachtung auf die s-Functionen (1) d. i. auf die partikulären Lösungen von (5) p. 63 eingeschränkt bleibt, begründen wir eine Einteilung derselben in *drei Arten* auf folgende Weise. *Zur ersten Art rechnen wir die s-Functionen* (1), *für welche*

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} > 1$$

ist; für die zweite Art soll diese Summe gleich 1, *für die dritte kleiner als* 1 *sein.* Es ist zweckmässig, das erste Dreieck sich jederzeit so gelagert zu denken, dass es zwei gerade Seiten hat. Wir können alsdann an diesem Dreieck unsere Arteinteilung sehr leicht charakterisieren. Im ersten Falle wird die dritte Seite des Dreiecks ihre *concave* Krümmung dem Innern des Dreiecks zuwenden, im dritten Fall dagegen ihre *convexe*, während ein zur zweiten Art gehöriges Dreieck gedachter Form *geradlinig* ist.

§ 18. Die s-Functionen erster Art.

Man zeigt leicht oder entnimmt aus „Ikos." p. 117 u. f., dass die einzigen Lösungen von

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} > 1$$

in ganzen Zahlen ν die nachstehend tabellarisch zusammengestellten sind:

ν_1	ν_2	ν_3
2	2	n
2	3	3
2	3	4
2	3	5 .

Wir haben sonach den Satz: *Die s-Functionen erster Art sind identisch mit den Irrationalitäten der regulären Körper**). Für die erste der vier

*) Hält man an den bestimmten Gleichungsformen, die in „Ikos." als Definition dieser Irrationalitäten gegeben werden, fest, so wird der Satz des Textes

aufgeschriebenen Möglichkeiten haben wir bereits im Anfang des Kapitels zwei Beispiele gehabt*) ($n = 2, 3$), und ebenso ist dortselbst der dritte Fall $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; J\right)$ bereits erledigt. Es erübrigt den zweiten und vierten Fall noch durch Figuren zu erläutern, wobei wir immer das Ausgangsdreieck mit zwei geradlinigen Seiten versehen.

Vom Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ kommen wir zu der in Fig. 28 dargestellten Überdeckung einer complexen Ebene, deren Variabele wir ξ nennen. Durch zweckmässige Projection auf die Kugel-

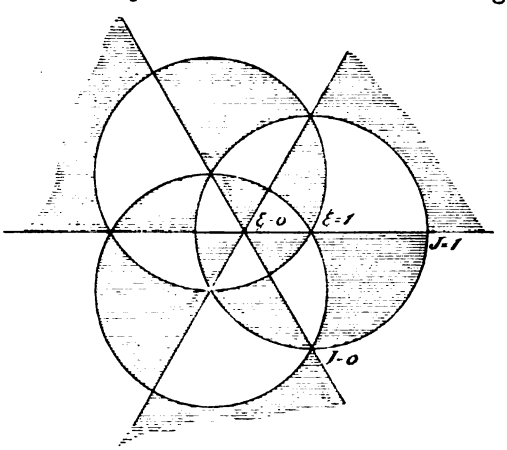


Fig. 28.

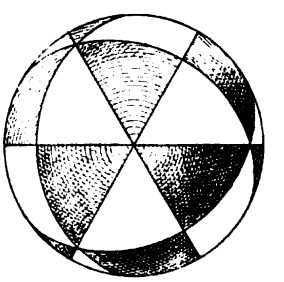


Fig. 29.

oberfläche entspringt die *Tetraederteilung* derselben, welche Fig. 29 wiedergiebt. Die ξ-Ebene ist, wie man sieht, von einem Complex von $2 \cdot 12$ Dreiecken einfach überdeckt. Es folgt daraus: *Die Function*

$$\xi(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; J\right)$$

ist eine algebraische Function 12ten *Grades, deren inverse Function* $J(\xi)$ *eindeutig und also rational ist.* Bei der Orientierung der Dreiecksteilung in der ξ-Ebene, wie sie in Fig. 28 vorliegt, haben wir

$$(1) \qquad J : J - 1 : 1 = \xi^3(\xi^3 + 8)^3 : (\xi^6 - 20\xi^3 - 8)^2 : 64(\xi^3 - 1)^3,$$

welche Form der *Tetraedergleichung* durch die Substitution:

$$(2) \qquad \frac{z_1}{z_2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\xi - 1 + \sqrt{3}}{\xi - 1 - \sqrt{3}}, \quad Z = \frac{1}{J}$$

aus Formel (61^b) in „Ikos“. p. 60

in präciserer Fassung lauten: *Die s-Functionen erster Art sind irgendwelche lineare Functionen der Irrationalitäten der regulären Körper.*

*) Über die Bedeutung des Grenzfalls $n = \infty$ vgl. man „Ikos.“ p. 128.

$$Z : Z - 1 : 1 = \left(z_1^4 - 2\sqrt{3} z_1^2 z_2^2 - z_2^4\right)^3 : -\,12\sqrt{3}\left(z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4)\right)^2 : \left(z_1^4 + 2\sqrt{3} z_1^2 z_2^2 - z_2^4\right)^3$$

hervorgeht.

Endlich führt die Vervielfältigung des Dreiecks mit den Winkeln

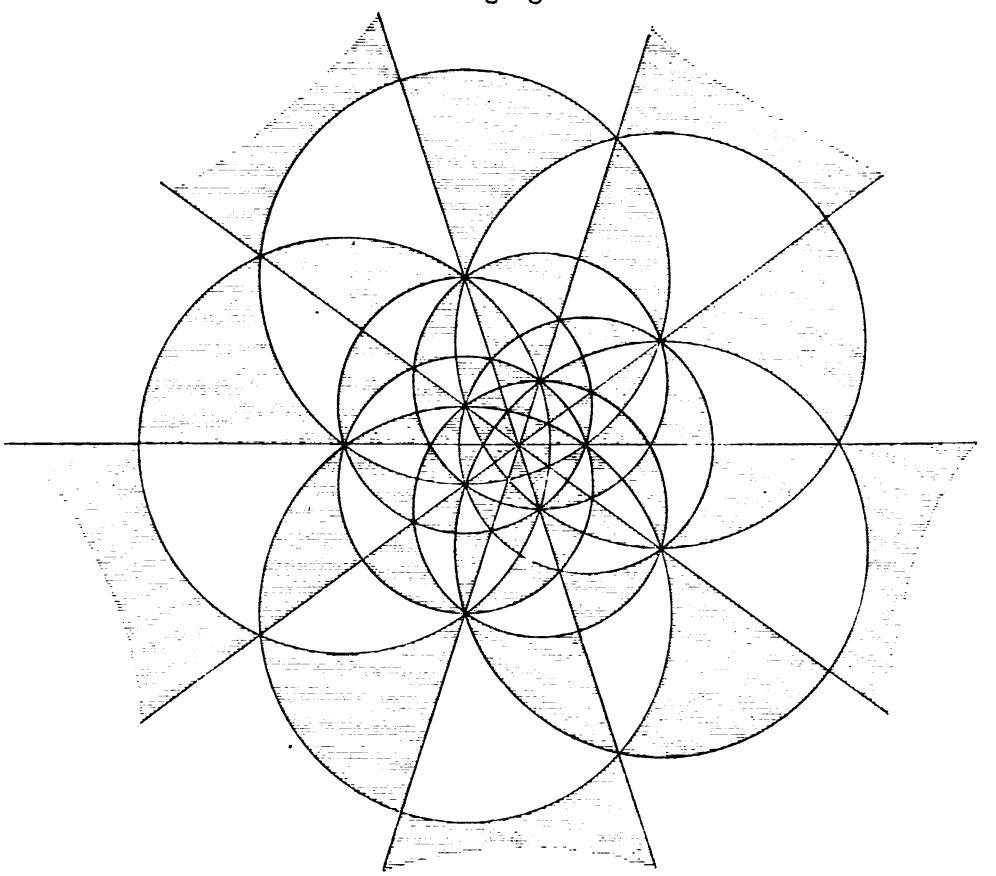


Fig. 30.

$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ auf die in Fig. 30 dargestellte Überdeckung der ζ-Ebene mit $2 \cdot 60$ Kreisbogendreiecken, die auf die Kugel projiciert in Fig. 31 die *Ikosaederteilung* hervorbringen. *Sonach ist* $\zeta(J)$ *eine algebraische Function* 60sten *Grades von* J *mit inverser rationaler Function* $J(\zeta)$. Die stattfindende Relation ist die *Ikosaedergleichung**) mit der Form:

$$J : J - 1 : 1 = (-\zeta^{30} - 1 + 228(\zeta^{15} - \zeta^5) - 494\zeta^{10})^3 : -(\zeta^{30} + 1 + 522(\zeta^{25} - \zeta^5) - 10005(\zeta^{20} + \zeta^{10}))^2 : 1728\,\zeta^5(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1)^5.$$

*) Cf. „Ikos." I. Kap. 2 §§ 13, 14.

Indem wir vorgreifend bemerken, dass die zur zweiten und dritten Art gehörigen Dreiecke bei der Vervielfältigung stets zu unendlich vielen neuen Dreiecken führen, können wir den Satz aufstellen: *Die*

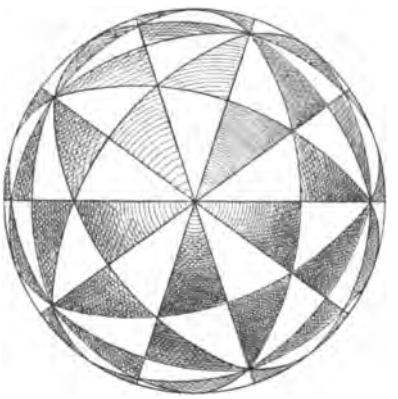


Fig. 31.

s-Functionen erster Art oder die Irrationalitäten der regulären Körper sind die einzigen s-Functionen, welche algebraische Functionen von J mit rationalen inversen Functionen darstellen.

§ 19. Die *s*-Functionen zweiter Art.

Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1$$

in ganzen Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 giebt es überhaupt nur drei, die wir wieder tabellarisch aufstellen:

ν_1	ν_2	ν_3
2	3	6
2	4	4
3	3	3 .

Die bezüglichen Ausgangsdreiecke können, wie wir schon sagten, geradlinig angenommen werden, und wir gelangen so zu den drei in Fig. 32 dargestellten Überdeckungen der Ebene.

Die gegenwärtigen Fälle schliessen sich an die soeben besprochenen insofern an, als auch jetzt die Dreiecke *die ganze s-Ebene einfach und vollständig* bedecken. Das Neue ist, dass hier zu diesem Zweck eine *unendliche* Anzahl von Dreiecken erforderlich ist. Eine ganz besondere Rolle spielt der unendlich ferne Punkt der *s*-Ebene, und wir mögen ihn deshalb der Anschauung noch zugänglicher machen, indem wir zu

einer kreisverwandten Figur übergehen, bei der er in die endliche Lage des Punktes P gelangen soll. Für diesen Fall ist das gegebene Ausgangsdreieck von wirklichen Kreisen begrenzt, *die alle drei durch den Punkt P gehen.* Wie wir dann auch immer bei der fortschreitenden Bedeckung der s-Ebene mit Kreisbogendreiecken neue Grenzkreise durch Spiegelung hervorrufen, stets werden doch diese letzteren wieder durch den Punkt P hindurchlaufen. Dabei ist das Spiel der entstehenden Figur ein solches, dass sie nach und nach anwachsend sich von allen Seiten jenem gedachten Punkte annähert. So lange aber eine endliche Zahl von Spiegelungen vorgenommen ist, bleibt immer noch ein endlicher Bereich um den Punkt P, der von Dreiecken frei ist. *Erst durch eine unendliche Folge von Dreiecken werden wir P rings erreichen können und seine Umgebung voll und einfach bedecken.* Dabei müssen die Dreiecke in ihren Dimensionen gegen den Punkt P hin, falls derselbe im Endlichen liegt, unendlich klein werden; *denn in jeder noch so kleinen Umgebung von P liegt eine unendliche Zahl von ihnen.*

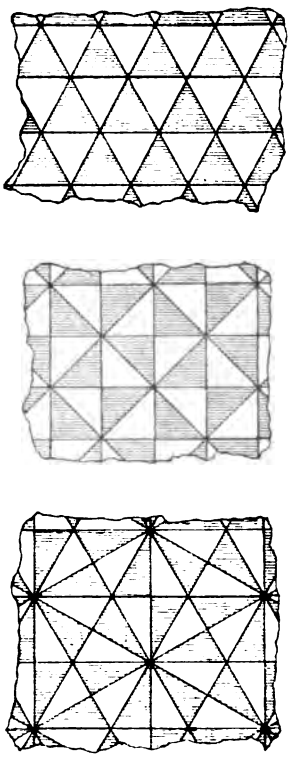


Fig. 32.

Eine s-Function zweiter Art ist sonach *unendlich vieldeutig* von J abhängig, und ihre inverse Function $J(s)$ *ist zwar eindeutig, aber transcendent.* Der Punkt P ist für $J(s)$ *ein wesentlich singulärer Punkt;* denn $J(s)$ nimmt in jeder noch so kleinen Umgebung von P jeden complexen Wert unendlich oft an*).

*) Die hier besprochenen $s(J)$ und ihre inversen Functionen $J(s)$ sind, falls man die Dreiecke geradlinig annimmt, sehr bekannt. Alsdann ist nämlich $J(s)$ eine eindeutige doppelt-periodische Function ihres Argumentes, wie man denn sofort aus den Dreiecken der Figuren 32 bezügliche Periodenparallelogramme aufbaut. Die Gestalt dieser Parallelogramme ist dabei in jedem Falle eine charakteristische. Function $s(J)$ erscheint sonach in diesen Fällen als elliptisches Integral erster Gattung, dessen obere Grenze J ist, während seine absolute Invariante je einer festen Zahl gleich ist. Für letztere berechnet man in den drei Fällen bez. 0, 1, 0.

§ 20. Die s-Functionen dritter Art.

Alle unendlich vielen in den beiden vorigen Paragraphen noch nicht genannten Tripel ganzer Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 definieren s-Functionen dritter Art. Bei ihnen werden wir durch das Symmetriegesetz zu völlig neuen Ergebnissen geführt, die um so mehr interessieren müssen, als ja die beiden späterhin besonders in Betracht kommenden s-Functionen $\omega(J)$, $\omega(\lambda)$ solche der dritten Art sind.

Versieht man vorübergehend ein vorgegebenes zur dritten Art gehöriges Dreieck, für welches wir zunächst an der Voraussetzung endlicher ν_i festhalten, mit zwei geradlinigen Seiten, so ist die dritte Seite, wie wir schon bemerkten, gegen das Dreieck convex gekrümmt. Es giebt infolge dieses letzten Umstandes einen bestimmten reellen Kreis der Ebene, der die drei Grenzlinien des Dreiecks unter rechtem Winkel schneidet. Dieser Kreis, der sogleich die grösste Bedeutung gewinnen wird, soll der *Orthogonalkreis* heissen. Indem wir von diesem Ausgangsdreiecke jetzt zu einer beliebigen kreisverwandten Figur übergehen, bleiben diese Verhältnisse offenbar invariant, und wir sagen demnach: *Jedes zur dritten Art gehörige Kreisbogendreieck besitzt einen einzigen reellen Orthogonalkreis**).

Jetzt zerlegt jeder einzelne Grenzkreis des vorgegebenen Dreiecks die Fläche des Orthogonalkreises, in dessen Innerem wir das Dreieck gelegen denken, in zwei sichelförmige Bereiche, welche bei Spiegelung an jenem Grenzkreise mit einander permutiert werden. Es entspringen daraus die beiden höchst wichtigen Sätze: Durch Inversion nach dem Symmetriegesetz erhalten wir aus dem ersten Dreieck ein zweites, das mit jenem den Orthogonalkreis gemeinsam hat und gleichfalls im Innern desselben liegt. Wir schliessen sofort: *Wie weit man auch den Vervielfältigungsprocess fortsetzen mag, alle entspringenden Dreiecke haben wieder den nämlichen Orthogonalkreis wie das erste und alle liegen mit jenem ersten im Innern dieses Kreises.*

Wir haben späterer Anwendung wegen besondere Veranlassung, die s-Function $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}; J\right)$ zu betrachten, und die ihr entsprechende Figur ist in 33 begonnen. Der äussere Kreis ist der Orthogonalkreis, und nun tritt die merkwürdige Erscheinung ein, dass, in welcher Richtung wir die Inversion der Dreiecke von der schon gewonnenen Figur aus weiter fortsetzen mögen, wir freilich immer neue Dreiecke erhalten, aber doch den Orthogonalkreis nicht überschreiten werden. Je näher wir vielmehr dem Orthogonalkreise zustreben, um so mehr

*) Für ein Dreieck der ersten Art wird der Orthogonalkreis imaginär, für ein solches der zweiten Art zieht er sich als unendlich kleiner reeller Kreis auf den Punkt P zusammen, in welchem sich die Seiten eines solchen Dreiecks kreuzen.

werden die neu entspringenden Dreiecke zusammenschrumpfen, so dass alle noch im Innern des Kreises Platz finden. Dabei ist es von grösster Wichtigkeit, *dass jedes in endlicher Entfernung vom Orthogonalkreis gelegene Dreieck auch eine endliche Grösse hat.* Wir sehen dergestalt: *In*

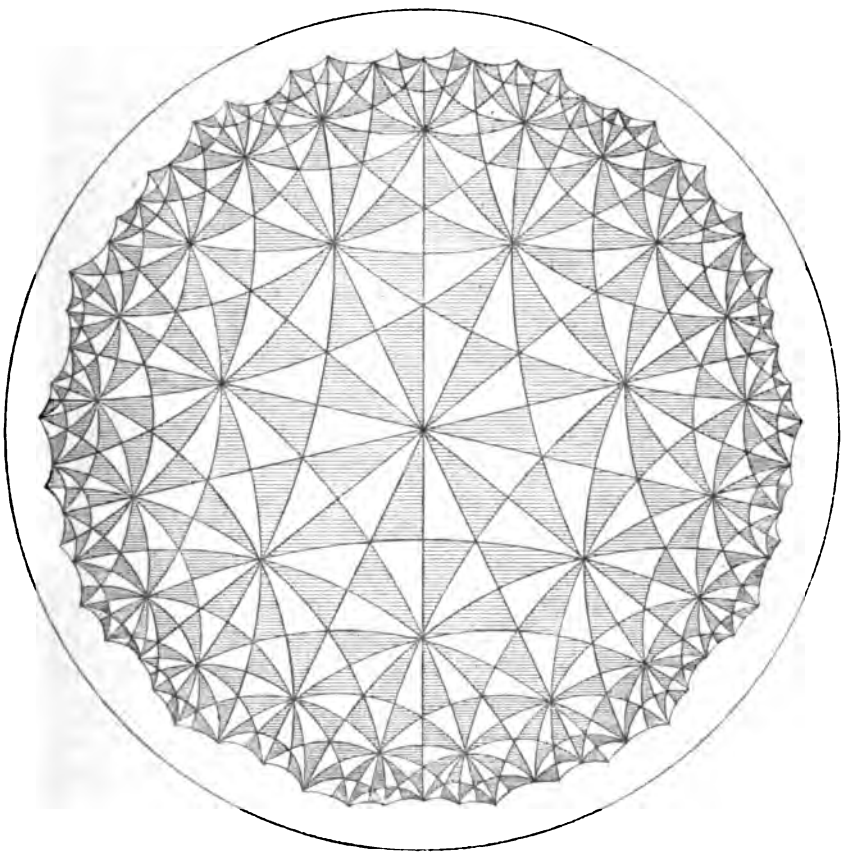


Fig. 33.

jeder noch so kleinen endlichen Entfernung vom Orthogonalkreis ist das Spiel der entstehenden Dreiecke genau das nämliche, das wir bei den grösseren Dreiecken in der Mitte des Orthogonalkreises vor Augen sehen. Immer wieder werden sich die Dreiecke glatt an einander reihen und mit wachsender Anzahl das Innere des Orthogonalkreises mehr und mehr vollständig und einfach bedecken. Nur erst in unendlicher Nähe jedes Punktes vom Orthogonalkreise werden die Dreiecke, die sich hier in unendlichen Mengen von allen Richtungen aus dem Innern dieses Kreises zusammendrängen, in ihren Dimensionen unendlich klein.

Die sehr merkwürdige so erhaltene Dreiecksfigur sehen wir nun im

Sinne von § 1, (p. 65), als Ersatz der Riemann'schen Fläche für $s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; J\right)$ an und wollen die Fundamentaleigenschaften dieser Function und ihrer inversen aus derselben ablesen. Wir sehen sofort: Es ist $s(J)$ eine unendlich vieldeutige Function von J, deren inverse Function $J(s)$ zufolge der *einfachen* Überdeckung des Innern vom Orthogonalkreise eben *in diesem Innern eine eindeutige Function ihres Argumentes* ist. Sie hat dabei in jedem Bereich, der im Innern des oft genannten Kreises liegt und seiner Peripherie nirgends unendlich nahe kommt, den Charakter einer *rationalen* Function, indem sie nur in der endlichen Zahl der Dreiecksecken dritter Art, welche auf jenen Bereich entfallen, unendlich wird, und zwar je algebraisch ν_3-fach. Indem aber je zwei benachbarte Dreiecke der Teilung ein conformes Abbild der J-Ebene liefern, wird $J(s)$ in noch so kleiner Umgebung eines auf dem Orthogonalkreise selbst gelegenen Punktes jeden Wert unendlich oft annehmen: *Der Orthogonalkreis bildet eine überall dichte Folge von wesentlich singulären Punkten für* $J(s)$.

Definiert man $J(s)$ für einen Bereich im Innern des Orthogonalkreises durch eine Potenzreihe, so reicht, wie man weiss, deren Convergenzkreis um den gewählten Mittelpunkt bis zum nächsten Unstetigkeitspunkte gerade heran. Bildet man jetzt analytische Fortsetzungen, so wird man sich mit den Convergenzkreisen der weiterhin folgenden Reihenentwicklungen zwischen den gesetzmässig im Innern des Orthogonalkreises liegenden Unstetigkeitsstellen von $J(s)$ hindurchwinden können. Aber diese Punkte liegen immer dichter, je mehr wir uns dem Orthogonalkreise nähern und folgen auf einander in dessen grösster Nähe unendlich dicht. Wir schliessen, dass die Convergenzradien unserer Entwicklungen bei Annäherung an den Orthogonalkreis immer kleiner und kleiner werden und endlich in dessen grösster Nähe verschwindend klein werden. *Können wir sonach auch durch analytische Fortsetzung von* $J(s)$ *dem Orthogonalkreise beliebig nahe kommen, so erscheint es unmöglich ihn zu überschreiten;* in diesem Sinne heisst derselbe *die natürliche Grenze der Function* $J(s)$.*)

§ 21. Die zu $\omega(\lambda)$ und $\omega(J)$ gehörigen Dreiecksfiguren.

Die Betrachtung des vorigen Paragraphen umfasst formell die beiden von früher her bekannten s-Functionen $\omega(\lambda)$ und $\omega(J)$ noch

*) Die hiermit entwickelten Resultate dürften die interessantesten sein, welche Hr. Schwarz vermittelst des Symmetriegesetzes erzielt hat. Die Existenz natürlicher Grenzen analytischer Functionen, welche bis dahin nur in einzelnen Fällen bemerkt worden war (vgl. bezügliche Angaben in Schwarz' p. 94 genannter Arbeit), wird hierdurch zu einer in allen Einzelheiten anschauungsmässig verständlichen Thatsache erhoben.

nicht mit, da wir zur Vereinfachung der Ausdrucksweise vorläufig die ganzen Zahlen ν_i als endlich voraussetzten. Inzwischen bleiben doch für unendliche ν und insbesondere für jene beiden uns späterhin zumeist interessierenden s-Functionen dritter Art alle wesentlichen soeben gewonnenen Anschauungen bestehen, was wir zuvörderst für $\omega(\lambda) = s(0, 0, 0; \lambda)$ zeigen.

Nehmen wir in einfachster Weise das Ausgangsdreieck mit den drei Winkeln 0 als gleichseitig an, so ist sogleich evident, dass der dem Dreieck umschriebene Kreis Orthogonalkreis wird. Hier ziehen sich also die Spitzen des Dreiecks bis zum Orthogonalkreise heran, und es wird, sofern wir nun den Vervielfältigungsprocess vor sich gehen lassen, ersichtlich jedes neu erzeugte Dreieck seine drei Spitzen zum Orthogonalkreise senden. Übrigens geschieht das Anwachsen des Dreiecks-complexes hier noch sehr viel durchsichtiger, als in den Fällen endlicher ν, wie die nebenstehende Fig. 34 bezeugen wird. Brechen wir den Process nach Erzeugung einer endlichen Zahl von Dreiecken ab, so haben wir vollständig und einfach das Innere eines Bogenpolygons mit Dreiecken bedeckt, wo in der Kette der Grenzkreise des Polygons je zwei benachbarte einander in einem Punkte des Orthogonalkreises berühren, während sie alle auf dem gemeinsamen Orthogonalkreise senkrecht stehen. Jede weitere Spiegelung reiht ein neues Dreieck zwischen dem spiegelnden Kreise und dem Orthogonalkreise der schon gebildeten Figur an. Nach und nach erscheint der Orthogonalkreis immer dichter von Spitzen der Dreiecke übersäet, und in der fertigen Figur strahlt von jedem solchen Punkte des Orthogonalkreises ein Fächer von unendlich vielen neben einander angereihten Dreiecken in das Innere der Figur hinein.

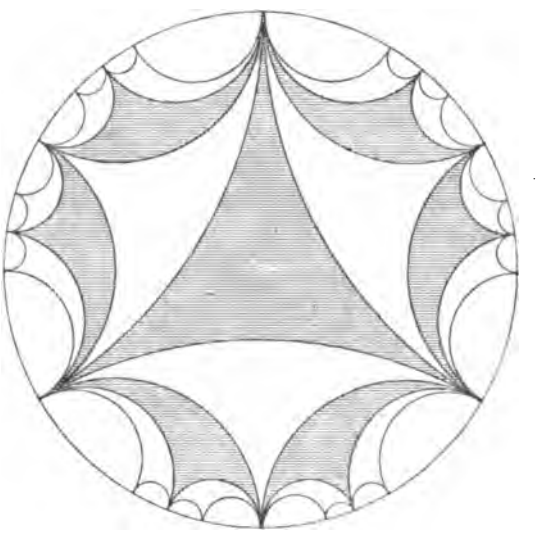


Fig. 34.

Wir verweilen nicht beim Beweise des elementaren Satzes, dass jedes Kreisbogendreieck, dessen sämtliche Winkel verschwinden, mit dem gerade zum Ausgangsdreiecke gewählten gleichseitigen Dreiecke

kreisverwandt ist. Auf Grund dieses Satzes ist insbesondere die zu $\omega(\lambda)$ gehörende Figur mit der in Fig. 34 gegebenen kreisverwandt. Wir haben also für die inverse Function $\lambda(\omega)$ vor allen Dingen: $\lambda(\omega)$ *ist eine eindeutige Function von* ω, *die jedoch eine kreisförmige natürliche Grenze**) *hat, über welche hinüber wir die Function nicht fortsetzen können.* In jedem Bereich im Innern der natürlichen Grenze, welcher dieser letztern nirgends unendlich nahe kommt, hat $\lambda(\omega)$ *den Charakter einer ganzen Function*; in der That liegen ja die Unstetigkeitspunkte unendlich dicht geschaart sämtlich auf dem Orthogonalkreise.

Letzten Endes haben wir einen sehr bequemen Übergang von Fig. 34 zum Kreisbogendreieck**) mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. Wir werden im ersten gleichseitigen Dreieck der Fig. 34 die drei Höhen

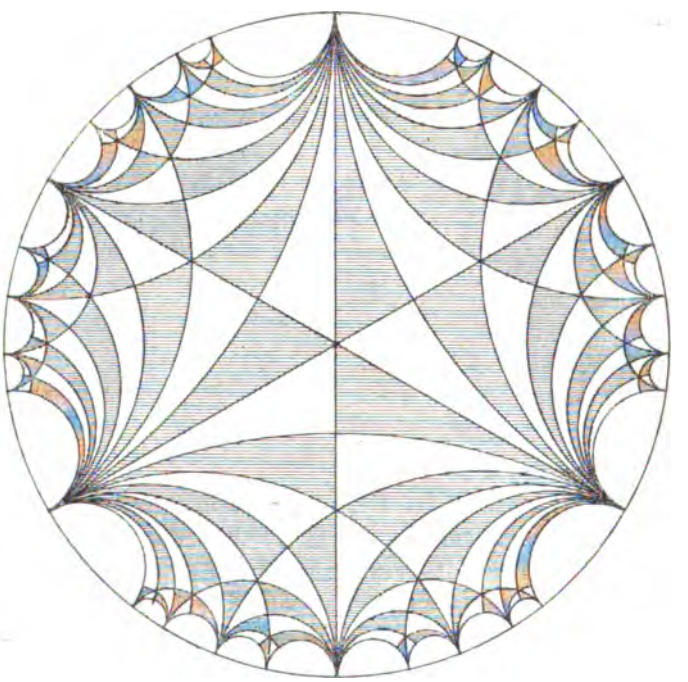


Fig. 35.

ziehen und haben dasselbe dann dergestalt in sechs Kreisbogendreiecke zerlegt, die gerade die beabsichtigten Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 aufweisen. Diese

---

*) Die insonderheit die reelle ω-Axe ist, wie sich sogleich zeigen wird.

**) Cf. Klein, Amtlicher Bericht der Naturforscherversammlung zu München, 1877 (p. 104), wo dieser Übergang zum ersten Male geschildert ist.

können dann thatsächlich nach dem Symmetriegesetz als aus einem einzigen derselben hervorgegangen gedacht werden, indem ja je zwei benachbarte ohne weiteres bezüglich ihrer gemeinsamen Seite symmetrisch sind. Der Vervielfältigungsprocess auf die neuen Dreiecke angewandt wird dann ersichtlich das Resultat haben, dass eine analoge Unterteilung in sechs Dreiecke für jedes Dreieck der Fig. 34 stattfindet, und wir werden dergestalt zur Fig. 35 geführt, deren weitere Eigenart nach den voraufgehenden Erörterungen wohl sofort verständlich ist.

Sicherlich ist nun wieder die zu $\omega(J)$ gehörige Figur mit der gezeichneten kreisverwandt und, um erstere selbst zu gewinnen, brauchen wir nur auf den in § 16 begründeten Satz zurückzugehen, dass der Ausgangszweig $\omega(J)$ die positive J-Halbebene auf ein Kreisbogendreieck abbildet, dessen $J = 0,\ 1,\ \infty$ entsprechende Ecken bez. nach $\omega = \varrho,\ i,\ \infty$ fallen. Gehen wir also von Fig. 35 zu einer kreisverwandten Figur, in der das Ausgangsdreieck die solchergestalt angezeigte

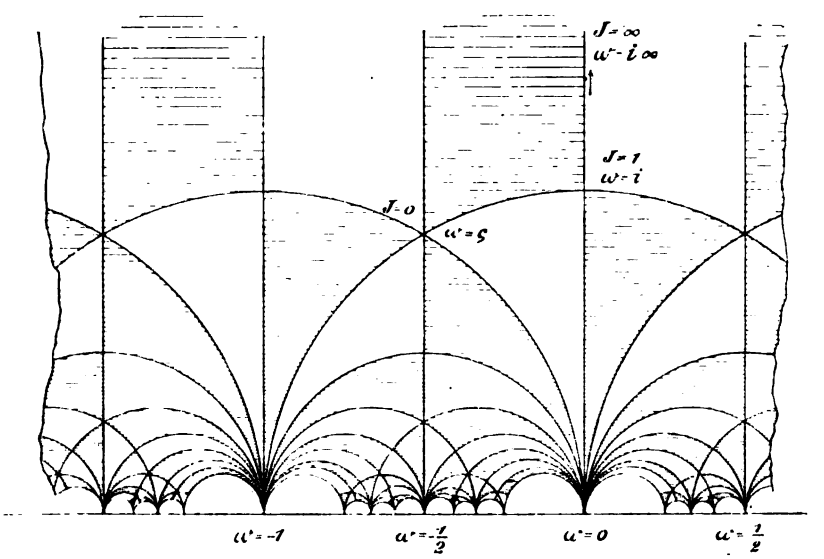


Fig. 36.

Lage hat, so kommt Fig. 36, *in der nun**) *der Orthogonalkreis zur reellen ω-Axe geworden ist, während die positive ω-Halbebene lückenlos und einfach von Kreisbogendreiecken bedeckt ist.* Da haben wir jetzt den Ersatz der Riemann'schen Fläche für $\omega(J)$ vor Augen, den wir zu Anfang dieses Kapitels in Aussicht nahmen, und sehen, wie sich die am Schlusse des vorigen Kapitels für diese Function gegebenen Sätze

*) In Übereinstimmung mit der soeben für $\lambda(\omega)$ gemachten Bemerkung.

anschaulich darlegen. Insonderheit aber haben wir dem vorigen Kapitel gegenüber die neuen Resultate: *Die inverse Function $J(\omega)$ ist eine eindeutige transcendente Function von ω, welche in der ganzen positiven ω-Halbebene, aber nirgendwo sonst existiert. Die reelle Axe ist natürliche Grenze für $J(\omega)$.* Irgend zwei neben einander liegende Dreiecke der Fig. 36 geben, wie wir wissen, ein vollständiges Abbild der J-Ebene. Ziehen wir dann noch vom vorigen Kapitel den Satz heran, dass es insbesondere *die ganzzahligen Substitutionen der Determinante* 1

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{1}$$

sein müssen, welche die Kreisverwandtschaft gleichartiger Dreiecke in Fig. 36 vermitteln, und dass gerade auch die Gesamtheit dieser Substitutionen in der Figur zur Geltung kommen muss, so entspringen die fundamentalen Resultate: *$J(\omega)$ ändert bei Ausführung der Substitutionen* (1) *seinen Wert nicht, und zwei Werte von ω, welche denselben Wert von J liefern, sind durch eine Substitution* (1) *verbunden.* Es sind das Sätze, auf die wir noch wiederholt zurückkommen werden.

Die vom zweiten Kapitel her bleibenden Fragen in Ansehung des Wesens der Function $\omega(J)$ und ihrer inversen Function $J(\omega)$ haben sich nun gelöst, und indem wir in allen während der bisherigen Entwicklung überhaupt betrachteten Grössen Dreiecksfunctionen specieller Art erkannten, haben wir mit deren gründlicher Beschreibung in diesem Kapitel einen ersten Abschluss unserer Untersuchung erreicht. Es gilt, nunmehr auf dem gewonnenen Grunde diejenigen Problemstellungen zu entwickeln, deren Erledigung der Inhalt aller noch folgenden Betrachtungen sein soll*).

*) Wir fügen hier nachträglich noch einige Bemerkungen für die Betrachtung der s-Functionen auf der Kugeloberfläche an (cf. Fussnote p. 93), da sich vermöge derselben die oben getroffene Arteinteilung dieser Functionen besonders einfach kennzeichnen lässt. Nach stereographischer Projection der zu einer einzelnen s-Function gehörigen Teilung auf die Kugelfläche erscheint letztere ganz oder teilweise mit einer Teilung in Kreisbogendreiecke überdeckt, deren Seiten wir uns durch Ebenen ausgeschnitten denken wollen. Die drei dem einzelnen Dreieck dabei zugehörigen Ebenen bilden eine dreiseitige Ecke und die zwei benachbarten Dreiecken entsprechenden Ecken haben eine Seite und den Scheitelpunkt gemein. Eben dieser Punkt wird dann ersichtlich für alle übrigen den Dreiecken der Teilung entsprechenden dreiseitigen Ecken den Scheitelpunkt abgeben, und nun haben wir den einfachen Satz: *Für die s-Functionen erster Art liegt dieser gemeinsame Scheitelpunkt im Innern der Kugel, für die zweite Art auf derselben, endlich für die dritte Art ausserhalb derselben.* Im letzten Falle ist der Berührungskreis des dem gedachten Punkte zugehörigen Tangentialkegels die natürliche Grenze. Für $\omega(J)$ kommen wir später auf diese Verhältnisse nochmals zurück.

Viertes Kapitel.

Entwicklung der Begriffsbestimmungen und Grundprobleme einer Theorie der elliptischen Modulfunctionen.

Unter den besonderen im vorigen Kapitel betrachteten Dreiecksfunctionen haben diejenigen der ersten Art als Irrationalitäten der regulären Körper in „Ikos." eine eingehende Behandlung erfahren, während diejenigen der zweiten Art als besondere elliptische Integrale erster Gattung sich in die allgemeine Theorie dieser letzteren einordnen lassen. Demgegenüber bieten die Dreiecksfunctionen dritter Art noch ein weites Feld eingehender Untersuchung, bei der man wiederum die Gesichtspunkte mit Erfolg heranzieht, welche bei der ersten Art massgeblich gewesen sind. Unter den Dreicksfunctionen dritter Art bietet aber $\omega(J)$ die mannigfachsten und am leichtesten zugänglichen Beziehungspunkte zu sonstigen ausgebildet vorliegenden Teilen der Mathematik. Die Aufgabe, die wir uns bei dieser Sachlage stellen, ist die, *für die Function*

$$\omega(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\infty}; J\right)$$

eine Behandlung zu versuchen, welche in Ansehung aller grundlegenden Gesichtspunkte an der in „Ikos." gegebenen Theorie der Irrationalitäten der regulären Körper ihr Modell finden soll. Als Prototyp dieser Irrationalitäten betrachten wir diejenige des *Ikosaeders*:

$$\xi(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; J\right),$$

und es ist die Absicht des vorliegenden Kapitels, aus den Vergleichpunkten der beiderlei Functionen $\omega(J)$ und $\xi(J)$ die Grundfragen zu entwickeln, um die es sich bei unserem Unternehmen handeln wird*).

Inzwischen müssen wir vorab eine Reihe analytischer Rechnungen durchführen, um auf Seiten der Function $\omega(J)$ insoweit Material zu schaffen, dass der in Aussicht stehende Vergleich ohne Unterbrechung

*) In der That ist dieser Gesichtspunkt des Vergleichs von ω und ξ für Klein bei Ausführung seiner ersten Untersuchungen über Modulfunctionen massgeblich gewesen.

durchgeführt werden kann. Diese Rechnungen versehen uns zugleich mit wichtigen Aufschlüssen über wechselseitige Beziehungen unter den Grössen g_2, g_3, ω_1, ω_2 u. a.

§ 1. Die Legendre'sche Relation.

Es handelt sich zuvörderst um die Ableitung der sogenannten Legendre'schen Relation, welche man bei einer grossen Zahl analytischer Entwicklungen zur Hand haben muss. Bezeichnet man durch Ω_1, Ω_2 irgend ein primitives Periodenpaar in normierter Form, und sind wieder $-\mathsf{H}_1$, $-\mathsf{H}_2$, gerade wie p. 33, die für die nämlichen Periodenwege berechneten Perioden des Integrals zweiter Gattung, so kennen wir aus (4) p. 34 für diese Grössen die Relationen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 36J(J-1)\frac{d\Omega_i}{dJ} &= 3(J+2)\Omega_i - 2(J-1)\mathsf{H}_i, \\ 24J(J-1)\frac{d\mathsf{H}_k}{dJ} &= 3J\Omega_k - 2(J+2)\mathsf{H}_k, \end{aligned}$$

in denen i, k die Zahlen 1, 2 in einer beliebigen der beiden Folgen sind. Multiplicieren wir die Gleichungen (1) bez. mit $2\mathsf{H}_k$ und $3\Omega_i$ und addieren, so kommt:

$$72J(J-1)\left(\Omega_i\frac{d\mathsf{H}_k}{dJ} + \mathsf{H}_k\frac{d\Omega_i}{dJ}\right) = 9J\Omega_1\Omega_2 - 4(J-1)\mathsf{H}_1\mathsf{H}_2.$$

Bei der Gestalt der rechten Seite bleibt auch die linke beim Wechsel von i und k unverändert, so dass

$$\frac{d\,\Omega_1\mathsf{H}_2}{dJ} = \frac{d\,\Omega_2\mathsf{H}_1}{dJ}$$

und daraus durch Integration

$$(2)\qquad \Omega_1\mathsf{H}_2 - \Omega_2\mathsf{H}_1 = \omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = c$$

folgt, unter c eine von J unabhängige, also numerische Grösse und unter η_i die den H_i entsprechenden nicht normierten Perioden verstanden.

Zur Bestimmung von c gehen wir nochmals auf die erste der Gleichungen (1) zurück und denken dieselbe sowohl für $i=1$ als für $i=2$ aufgeschrieben. Diese beiden Gleichungen vereinen wir zur Elimination der ersten auf ihren rechten Seiten stehenden Glieder, wodurch unter Benutzung von (2)

$$\Omega_2\frac{d\Omega_1}{dJ} - \Omega_1\frac{d\Omega_2}{dJ} = \frac{c}{18J}$$

erhalten wird. Hier kann die linke Seite durch $\Omega_2^2\frac{d\omega}{dJ}$ ersetzt werden, wodurch die Gleichung

$$18\Omega_2^2 d\omega = c \cdot \frac{dJ}{J} = c\, d\log J \tag{3}$$

entspringt, an die wir auch im folgenden Paragraphen wieder anknüpfen.

Um c zu bestimmen, dürfen wir ein beliebiges primitives Periodenpaar sowie einen beliebigen Wert von J heranziehen. Nehmen wir das Ausgangspaar und setzen $J = \infty$, so ist zufolge (2) p. 51 und (5) p. 61:

$$\Omega_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}, \quad 2\pi i\omega = -3\log 12 - \log J$$

und also $18\Omega_2^2 d\omega$ direct berechnet:

$$18\Omega_2^2 d\omega = 2\pi i d\log J.$$

Der Vergleich mit (3) ergiebt $c = 2i\pi$ und damit:

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2i\pi, \tag{4}$$

*welches die Legendre'sche Relation ist**).

§ 2. Die rationalen Invarianten g_2, g_3, Δ als Functionen der Perioden ω_1, ω_2.

Um die rationalen Invarianten in ihrer Abhängigkeit von ω_1, ω_2 zu studieren, gehen wir auf die Fundamentaleigenschaften von $J(\omega)$ zurück, wie sie im letzten Paragraphen des vorigen Kapitels erkannt wurden. Unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungsweise differentiieren wir die Gleichung $J\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = J(\omega)$ nach ω und bezeichnen mit J' die Ableitung von J nach seinem Argumente. Es kommt dergestalt:

$$J'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \frac{1}{(\gamma\omega+\delta)^2} J'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = J'(\omega).$$

Dividiert man durch ω_2^2, so kommt die wichtige Gleichung:

$$\frac{1}{(\gamma\omega_1+\delta\omega_2)^2} J'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \frac{1}{\omega_2^2} J'(\omega). \tag{1}$$

Eindeutige homogene Functionen der beiden Variabelen ω_1, ω_2 sollen hinfort Formen heissen, womit wir uns der Bezeichnung der Algebra nur anschliessen. Es ist dann also $\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega}$ eine Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension. *Dieselbe bleibt zufolge* (1) *bei allen ganzzahligen Substitutionen*:

---

*) Man zeigt diese Relation zumeist durch Ausführung eines gewissen bestimmten Integrals; man vgl. darüber die verbreiteten Lehrbücher über die Theorie der elliptischen Functionen. Die Ableitung des Textes findet sich wohl zuerst in Kummer's Arbeit über die hypergeometrische Reihe im 15ten Bande des Crelle'schen Journals.

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \tag{2}$$

der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ *unverändert**).

Jetzt schreibe man in (3) § 1 statt der normierten Periode Ω_2 ihren Wert $\omega_2\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}$, statt J den Quotienten $\frac{g_2^3}{\Delta}$, sowie endlich statt c den inzwischen bekannt gewordenen Wert dieser Grösse. Jene Gleichung heisst dann:

$$\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega} = \frac{9 g_2^2 g_3}{\pi i \Delta}. \tag{3}$$

Erinnern wir uns überdies an die von (4) p. 15 her bekannte Relation:

$$J : J - 1 : 1 = g_2^3 : 27 g_3^2 : \Delta, \tag{4}$$

so berechnen sich durch zweckmässige Combinationen von (3) und (4) für die rationalen Invarianten g_2, g_3, Δ die Darstellungen:

$$\begin{aligned} g_2 &= \left(\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega}\right)^2 \frac{\pi^2}{3J(1-J)}, \\ g_3 &= \left(\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega}\right)^3 \frac{\pi^3 i}{27 J^2 (1-J)}, \\ \Delta &= \left(\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega}\right)^6 \frac{\pi^6}{27 J^4 (1-J)^3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Grössen g_2, g_3, Δ *sind demnach eindeutige homogene Functionen oder, wie wir kurz sagen, Formen der* $(-4)^{\text{ten}}$ *bez.* $(-6)^{\text{ten}}$ *und* $(-12)^{\text{ten}}$ *Dimension in* ω_1, ω_2, *welche die Eigenschaft haben in sich überzugehen, wenn man* ω_1, ω_2 *einer ganzzahligen linearen Substitution* (2) *der Determinante* 1 *unterwirft:*

$$\begin{aligned} g_2(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) &= g_2(\omega_1, \omega_2), \\ g_3(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) &= g_3(\omega_1, \omega_2), \\ \Delta(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) &= \Delta(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{6}$$

§ 3. Functionaldeterminanten der Formen g_2, g_3, Δ.

Bei dem Verhalten der g_2, g_3, Δ gegenüber den ω-Substitutionen (2) kann man diese Grössen auch als transcendente Functionen von ω_1, ω_2 mit der Benennung von *Invarianten* belegen. Wir wollen dies Sach-

---

*) Der eigentümliche Differentiationsprocess, der hier von $J(\omega)$ zur Form führte und bei ähnlichen Übergängen später ganz allgemein zur Verwendung kommt, ist von Hrn. Hurwitz angegeben; vgl. dessen noch oft zu nennende Arbeit: *„Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe"*, Math. Annalen Bd. XVIII p. 559 (1881).

verhältnis geradezu dadurch verwerten, dass wir auf unsere Formen g_2, g_3, Δ solche Processe anwenden, welche die Invariantentheorie für die Bildung von Covarianten gegebener Formen an die Hand giebt. Wir werden solchergestalt entweder zu neuen Formen gelangen, die gleichfalls gegenüber den ω-Substitutionen invariant sind, oder wir werden doch, wofern wir wieder auf g_2, g_3, Δ geführt werden sollten, neue Relationen zwischen diesen Grössen gewinnen. Mögen in diesem Sinne zunächst *Functionaldeterminanten* irgend zweier unserer drei Formen untersucht werden.

Wir merken uns vorab für die nächsten Rechnungen die drei aus dem Euler'schen Satze von den homogenen Functionen entspringenden Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \omega_1 \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} &= -4g_2, \\ \omega_1 \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} &= -6g_3, \\ \omega_1 \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} &= -12, \end{aligned}$$

wobei die in der letzten Gleichung gewählte abweichende Schreibart (die Einführung von $\log \Delta$ an Stelle von Δ) sich weiterhin als zweckmässig erweisen wird. Aus $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ entnehmen wir durch logarithmische Differentiation noch ω_1 bez. ω_2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J}\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega}\cdot\omega_2 &= \frac{3}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}, \\ -\frac{1}{J}\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega}\cdot\omega_1 &= \frac{3}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}, \end{aligned}$$

welche Gleichungen wir zur Elimination ihrer ersten Glieder rechter Hand vereinen. Indem wir dabei die Functionaldeterminante von g_2 und $\log \Delta$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix}$$

abkürzend durch $T(g_2, \log \Delta)$ bezeichnen, kommt unter Benutzung von (1):

$$-\frac{4g_2}{J}\cdot\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega} = T(g_2, \log \Delta).$$

Ersetzt man jetzt die linke Seite auf Grund von (3) § 2, so kommt als *Darstellung von g_3 durch g_2 und* $\log \Delta$:

$$(2) \qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = -\frac{\pi i}{36} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix},$$

so dass sich in der That die Einführung von $\log \Delta$ an Stelle von Δ als nützlich erwiesen hat.

Dass die Dimension von $T(g_2, \log \Delta)$ die $(-6)^{\text{te}}$ ist, konnte man von vornherein angeben, wie sich denn auch sofort $T(g_3, \log \Delta)$ und $T(g_2, g_3)$ als Invarianten $(-8)^{\text{ter}}$ und $(-12)^{\text{ter}}$ Dimension erweisen. Formel (2) regt die Vermutung an, dass auch diese Invarianten nicht neu sind, sondern vielleicht auf g_2^3 und Δ zurückkommen, die in der That gerade die richtige Dimension besitzen. Das trifft auch wirklich zu, wie folgende Rechnung beweist.

Durch logarithmische Differentiation von $J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta}$ folgt:

$$\frac{1}{J-1} \frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega} \cdot \omega_2 = \frac{2}{g_3} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1},$$

$$-\frac{1}{J-1} \frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega} \cdot \omega_1 = \frac{2}{g_3} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2},$$

welche Gleichungen wir erstlich zur Elimination ihrer beiden ersten Glieder rechter Hand verbinden. Es kommt

$$-\frac{6 g_3}{J-1} \frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega} = -\frac{2}{\pi i} g_2^2 = T(g_3, \log \Delta)$$

oder:

$$(3) \qquad g_2^2 = -\frac{\pi i}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix}.$$

In ähnlicher Weise findet sich gleichfalls aus den beiden soeben durch logarithmische Differentiation von $J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta}$ gewonnenen Gleichungen:

$$\frac{4 g_2}{J-1} \frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega} = \frac{2}{g_3} T(g_2, g_3) - T(g_2, \log \Delta)$$

und daraus nach kurzer Rechnung:

$$(4) \qquad \Delta = \frac{3\pi i}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2}, & \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} \end{vmatrix},$$

so dass in der That alle drei Functionaldeterminanten auf unsere Formen selbst wieder zurückführen.

§ 4. Die Perioden des Integrals zweiter Gattung als Functionen von ω_1, ω_2.

Bevor wir die Betrachtung des vorigen Paragraphen durch Hereinnahme weiterer, Covarianten bildender Processe fortführen, schalten wir hier eine gleichfalls sehr wichtige Entwicklung ein, welche uns die Perioden η_1, η_2 als Functionen von ω_1, ω_2 kennen lehrt. Die erste der Differentialgleichungen (1) § 1 dividieren wir durch Ω_1 und schreiben zugleich ω als unabhängige Variabele:

$$36J(J-1)\frac{d\log\Omega_1}{d\omega} = \frac{dJ}{d\omega}\left\{3(J+2) - 2(J-1)\frac{H_1}{\Omega_1}\right\}.$$

Hieraus wollen wir η_1 berechnen und ersetzen zu dem Ende die normierten Perioden in bekannter Weise durch die ursprünglichen und zugleich J und $\frac{dJ}{d\omega}$ durch ihre Ausdrücke in g_2 und g_3:

$$12\pi i\frac{d\log\Omega_1}{\omega_2{}^2 d\omega} = \frac{g_2{}^3}{g_3} - 18\frac{g_3}{g_2} - 6\frac{\eta_1}{\omega_1}.$$

Man kann nun die Änderung $d\omega$ von ω dadurch herstellen, dass man ω_2 allein ändert unter constantem ω_1. Dabei ist dann

$$\frac{d\log\Omega_1}{d\omega} = -\frac{\omega_2{}^2}{\omega_1}\frac{\partial}{\partial\omega_2}\log\left(\omega_1\sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\right) = \frac{\omega_2{}^2}{2\omega_1}\left(\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\omega_2} - \frac{1}{g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\omega_2}\right),$$

so dass wir

$$(1)\qquad 6\pi i\left(\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\omega_2} - \frac{1}{g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\omega_2}\right) = \omega_1\frac{g_2{}^2}{g_3} - 18\omega_1\frac{g_3}{g_2} - 6\eta_1$$

erhalten.

Um den Wert der linken Seite dieser Gleichung noch in anderer Form zu erlangen, lösen wir die Gleichungen (1) § 3 paarweise nach ω_1 auf:

$$\omega_1 T(g_2, \log\Delta) = -\frac{36}{\pi i}\omega_1 g_3 = 12\frac{\partial g_2}{\partial\omega_2} - 4g_2\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_2},$$

$$\omega_1 T(g_3, \log\Delta) = -\frac{2}{\pi i}\omega_1 g_2{}^2 = 12\frac{\partial g_3}{\partial\omega_2} - 6g_3\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_2},$$

oder anders geschrieben

$$6\pi i\frac{\partial g_2}{\partial\omega_2} = -18g_3\omega_1 + 2\pi i g_2\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_2},$$

$$6\pi i\frac{\partial g_3}{\partial\omega_2} = -g_2{}^2\omega_1 + 3\pi i g_3\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_2}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort

$$6\pi i\left(\frac{1}{g_2}\frac{\partial g_2}{\partial\omega_2} - \frac{1}{g_3}\frac{\partial g_3}{\partial\omega_2}\right) = \omega_1\frac{g_2{}^2}{g_3} - 18\omega_1\frac{g_3}{g_2} - \pi i\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_2},$$

so dass der Vergleich mit (1)

$$6\eta_1 = \pi i\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_2}$$

liefert. In völlig analoger Weise entwickelt man den Ausdruck für η_2 und *hat dadurch als Darstellung der* η_1, η_2 *in Abhängigkeit von* ω_1, ω_2:

$$(2) \qquad 6\eta_1 = \pi i \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}, \quad 6\eta_2 = -\pi i \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}\text{*)}.$$

Auf Grund dieses Ergebnisses wollen wir untersuchen, wie sich η_1, η_2 ändern, wenn wir ω_1, ω_2 einer ihrer ganzzahligen Substitutionen

$$(3) \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

unterwerfen. Möge η_1, η_2 in η_1', η_2' übergehen, so ist, da doch Δ bei Ausführung von (3) unverändert bleibt:

$$6\eta_1' = \pi i \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2'}, \quad 6\eta_2' = -\pi i \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1'}.$$

Sehen wir jetzt ω_1', ω_2' als unabhängige Variabele an, so ist

$$\omega_1 = \delta\omega_1' - \beta\omega_2', \quad \omega_2 = -\gamma\omega_1' + \alpha\omega_2',$$

und man hat:

$$6\eta_1' = \pi i \left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega_2'} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \omega_2'}\right)$$

d. i.

$$\eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2.$$

In derselben Weise findet sich η_2'; man hat zusammenfassend:

$$(4) \qquad \eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2, \quad \eta_2' = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2.$$

Die Perioden η_1, η_2 *erfahren bei Anwendung von* (3) *genau die nämliche Substitution wie die* ω_1, ω_2, *was man dahin ausdrückt, dass man sie mit* ω_1, ω_2 *cogredient nennt***).

§ 5. Berechnung der Hesse'schen Determinante $H(\log \Delta)$.

Als Fortsetzung der Betrachtungen von § 4 wollen wir jetzt noch die Hesse'sche Determinante

$$H(\log \Delta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1^2}, & \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \\ \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}, & \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_2^2} \end{vmatrix}$$

berechnen. Wir gehen zu dem Ende auf (1) § 1 zurück:

---

*) Von hier aus gewinnt man durch (1) § 3 sofort die Legendre'sche Relation wieder.

**) Man vgl. auch die Definition der Cogredienz in „Ikos." p. 211. Dass übrigens die beiderlei Periodenpaare cogredient sind, wäre von vornherein selbstverständlich gewesen, wenn wir in Kap. 2 statt mit analytischen Entwicklungen mit den Periodenwegen direct gearbeitet hätten. Die Substitutionen der ω_1, ω_2 hätten dann nicht eigentlich Eigenschaften von ω_1, ω_2 ausgesprochen, sondern vielmehr solche der Periodenwege. Diese aber waren für die η_i gerade die nämlichen wie für ω_i.

$$24J(J-1)\frac{dH_1}{dJ} = 3J\Omega_1 - 2(J+2)H_1,$$

$$24J(J-1)\frac{dH_2}{dJ} = 3J\Omega_2 - 2(J+2)H_2,$$

aus welchen Gleichungen wir die zweiten Glieder rechts eliminieren. Es kommt unter Benutzung der Legendre'schen Relation

$$4(J-1)\frac{d}{dJ}\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = \frac{\pi i}{H_2^2}.$$

Macht man hier ω zur unabhängigen Variabelen und ersetzt J und die H_i auf Grund der schon gewonnenen Formeln, so ist:

$$\frac{3g_2}{\pi^2} = \left(\frac{\partial \log \Delta}{\omega_2 \partial \omega_1}\right)^2 \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}}{\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}}\right)$$

die Folge der letzten Gleichung.

Jetzt werde die Änderung $d\omega$ einerseits durch partielle Änderung von ω_1, das andere Mal durch ebensolche von ω_2 hervorgerufen. Dann spaltet sich die letzte Gleichung in die beiden:

$$\frac{3g_2\omega_2}{\pi^2} = -\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1^2} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2},$$

$$\frac{3g_2\omega_1}{\pi^2} = +\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_2^2},$$

woraus nun durch Auflösung etwa nach $\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}$

$$-\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \cdot H(\log \Delta) = \frac{3g_2}{\pi^2}\left(\omega_1 \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} + \omega_2 \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_2^2}\right)$$

entspringt. Aber $\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}$ ist homogen von $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension in ω_1, ω_2, so dass nach dem Euler'schen Satze die rechts stehende Klammer gerade mit dem Factor $-\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2}$ der linken Seite übereinstimmt. Indem wir durch diesen Betrag heben, kommt:

$$g_2 = \frac{\pi^2}{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1^2}, & \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \\ \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}, & \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_2^2} \end{vmatrix},$$

so dass auch $H(\log \Delta)$ wieder eine schon bekannte Form ist.

Als wichtigstes Resultat der letztdurchlaufenen Entwicklungen fassen wir nochmals zusammen: *Von numerischen Factoren abgesehen ist* g_2 *die Hesse'sche Determinante von* $\log \Delta$, g_3 *aber die Functionaldeterminante von* g_2 *und* $\log \Delta$*).

*) Dieser Satz wurde zuerst von Klein in einem Briefe an Brioschi über Multiplicatorgleichungen (vom 30. Dec. 1878) ausgesprochen; der betreffende Brief

§ 6. Abbildungen, durch $\omega(J)$ und $\xi(J)$ vermittelt. Ikosaeder- und Modulgleichung.

Indem wir nun beginnen, die beiden Functionen $\omega(J)$ und $\xi(J)$ mit einander zu vergleichen, gehen wir zuvörderst nochmals auf die conformen Abbildungen des vorigen Kapitels zurück; denn bereits in diesem Betracht zeigte sich die grösste Analogie zwischen den beiden in Rede stehenden Functionen. *Beide Male, sowohl in der ω- wie in der ξ-Ebene, war ein von Kreisbogen begrenztes Dreieck conformes Abbild der einzelnen, etwa der positiven Halbebene J.* Die Ecken der Dreiecke waren in beiden Fällen die Bildpunkte von $J = 1, 0, \infty$; nur dass für das Dreieck der ξ-Ebene an diesen Stellen bez. die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ stattfanden, während im Dreieck der ω-Ebene an den entsprechenden Stellen sich die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$ einstellten, so dass der dritte Winkel geändert erscheint.

Bei den soeben gekennzeichneten Abbildungen ist aber nur je ein einzelner Zweig der vieldeutigen Functionen $\xi(J)$, $\omega(J)$ zur Verwendung gekommen. Den Übergang zu den Abbildern, wie sie durch die übrigen Zweige entstehen, gab uns beide Male das Gesetz der Symmetrie. Dadurch kam die Teilung der ξ-Ebene in 120 Dreiecke zu Tage, während sich in der ω-Ebene die reelle Axe als natürliche Grenze für $J(\omega)$ dem weiteren Fortschritt der Spiegelungen entgegensetzte, nun aber die positive ω-Halbebene mit unendlich vielen Dreiecken überdeckt erschien. Hatten wir somit in $\xi(J)$ eine 60-wertige algebraische Function ihres Argumentes, *so ist im Gegensatze dazu $\omega(J)$ unendlich vieldeutig*, ein Umstand, der die Theorie dieser Function zu einer sehr viel beziehungsreicheren macht, als diejenige von $\xi(J)$ ist.

In beiden Fällen sind aber die vieldeutigen Functionen solche, *deren inverse Functionen eindeutig sind.* Dabei ist $J(\xi)$ eine rationale Function sechzigsten Grades, während $J(\omega)$ eine eindeutige transcendente Function von ω ist, die auf Grund der bei uns gewählten Festsetzungen nur in der positiven ω-Halbebene existiert. Wir bezeichnen durch $R(\xi)$ den Ausdruck jener rationalen Function sechzigsten Grades von ξ. Dann haben wir als Gleichung sechzigsten Grades für ξ mit dem Parameter J die *Ikosaedergleichung*:

$$R(\xi) - J = 0.$$

---

wurde in den Rendiconti del Istituto Lombardo (2. Jan. 1879) und später Math. Ann. Bd. 15 p. 86 gedruckt (Über Multiplicatorgleichungen). Die analytischen Entwicklungen der drei letzten Paragraphen sind zuerst vom Herausgeber durchgeführt.

Entsprechend sei $F(\omega)$ der Ausdruck der fraglichen transcendenten Function von ω (den wir im folgenden Kapitel thatsächlich herstellen), *so bilden wir für ω die transcendente Gleichung mit dem Parameter J*:

$$F(\omega) - J = 0$$

und stellen diese als *„Modulgleichung"* der Ikosaedergleichung parallel. An diese beiden Gleichungen knüpfen wir nun die Fortsetzung unseres Vergleiches an.

§ 7. Formentheoretischer Vergleich der Ikosaeder- und der Modulgleichung.

Die Ikosaedergleichung bekam in „Ikos." I Kap. 2 die Gestalt:

$$J : J - 1 : 1 = H^3(\xi_1, \xi_2) : -T^2(\xi_1, \xi_2) : 1728 f^5(\xi_1, \xi_2). \tag{1}$$

Es waren dabei f, H, T die drei *Ikosaederformen*, die wir in nichthomogener Form p. 105 reproduciert haben. Diese Formen stellen ganze rationale homogene Functionen der Variabelen ξ_1, ξ_2 dar, in welche $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ gespalten wurde. Die Ikosaederformen hatten die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn ξ_1, ξ_2 einer der 120 homogenen Ikosaedersubstitutionen von der Determinante 1 unterworfen wurden. Zwischen den drei Ikosaederformen bestanden neben der selbstverständlichen Relation

$$1728 f^5 = T^2 + H^3 \tag{2}$$

überdies noch die beiden anderen:

$$H(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{121} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} \end{vmatrix},$$

$$T(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{20} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial H}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial H}{\partial \xi_2} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

was man alles in Kap. 2 von „Ikos." I nachsehen kann.

Auf der anderen Seite kennen wir, der Gleichung (1) entsprechend, als Gestalt der Modulgleichung:

$$J : J - 1 : 1 = g_2^3(\omega_1, \omega_2) : 27 g_3^2(\omega_1, \omega_2) : \Delta(\omega_1, \omega_2), \tag{4}$$

wo nun g_2, g_3, Δ die in § 2 betrachteten eindeutigen homogenen Functionen von ω_1, ω_2 sind, die wir fortan als *„Modulformen"* den Ikosaederformen gegenüberstellen. Dabei ist die Fundamentaleigenschaft

dieser Modulformen, dass sie ihren Wert nicht ändern bei Anwendung ganzzahliger linearer Substitutionen der Determinante 1 auf die Variabelen ω_1, ω_2, Substitutionen, die wir den Ikosaedersubstitutionen entsprechend als *die homogenen Modulsubstitutionen* bezeichnen werden.

Zwischen den Modulformen bestehen ausser der selbstverständlichen Relation

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta,$$

die (2) entspricht, noch eine Reihe weiterer, die in den voraufgehenden Paragraphen gewonnen wurden. Unter ihnen ziehen wir als (3) analog gebildet insonderheit diese heran

$$(5)\qquad \begin{aligned} g_2(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\pi^2}{3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1^2}, & \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \\ \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}, & \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial \omega_2^2} \end{vmatrix}, \\ g_3(\omega_1, \omega_2) &= -\frac{\pi i}{36} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} \\ \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, würde die Analogie hier eine durchgängige sein, brächte nicht doch das dritte Glied auf der rechten Seite der Modulgleichung eine Abweichung. Inzwischen ist auch diese nur scheinbar, wie folgende Überlegung zeigt. Die Ikosaederformen tragen in (1) solche Potenzexponenten, welche je mit der halben Anzahl der ihre Verschwindungsstellen umkränzenden Dreiecke übereinstimmen, oder welche, kurz gesagt, mit den Zahlen ν in

$$\zeta(J) = s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; J\right)$$

identisch sind. Für die Modulgleichung, bei welcher wir diese Verhältnisse sogleich noch weiter verfolgen, sollte man aus

$$\omega(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\infty}, J\right)$$

nach Analogie schliessen, dass in (4) rechter Hand die Exponenten $3, 2, \infty$ sich zeigen müssten, was doch nur für die beiden ersten Glieder der Proportion zutrifft. Inzwischen hindert nichts die Modulgleichung in der Form zu schreiben:

$$(6)\qquad J : J - 1 : 1 = g_2^3 : 27 g_3^2 : \left(1 + \frac{\log \Delta}{n}\right)^n_{(\lim n = \infty)},$$

und in der That erreichen wir dergestalt durchgängiges Entsprechen mit der Ikosaedergleichung. *Wirklich ist es ja auch, wenn wir* (3) *und*

(5) *vergleichen, gar nicht* Δ, *welches der Ikosaederform f entspricht, sondern vielmehr* $\log \Delta$. Auf die Weise haben wir zugleich eine Begründung für die bereits in § 3 zu Tage getretene Erscheinung, dass unsere Formeln beim Gebrauch von $\log \Delta$ an Stelle von Δ einfacher ausfielen.

§ 8. Weiterer Vergleich der Ikosaeder- und Modulformen.

Wir führen den Vergleich der beiderseitigen Formen noch um einige Schritte weiter aus und ziehen dabei insonderheit die Art des Verschwindens der Ikosaederformen in Betracht*). Die Form $H(\xi_1, \xi_2)$ verschwand je *einfach* in den zwanzig Seitenmitten des Ikosaeders, welche von je sechs Dreiecken der Teilung umlagert waren. Es entspricht dem H jetzt die Modulform $g_2(\omega_1, \omega_2)$, für welche wir die Darstellung kennen:

$$\omega_2^4 g_2 = \left(\frac{dJ}{d\omega}\right)^2 \frac{\pi^2}{3J(1-J)}. \tag{1}$$

Auf Grund derselben wollen wir die Nullstellen von g_2 in der ω-Halbebene bestimmen.

Der Ausdruck (1) zeigt, dass bei endlich und nicht verschwindend gedachtem ω_2 die Form g_2 jedenfalls für alle solche Stellen der positiven ω-Halbebene endlich und von Null verschieden ist, die nicht Dreiecksecken der „Modulteilung" (Fig. 36) darstellen. Aber in den drei Arten solcher Ecken bedarf g_2 der besonderen Untersuchung.

Hier bereiten die Ecken mit verschwindender Winkelgrösse einige Schwierigkeit, weil sich jedes Dreieck der Teilung mit der so gemeinten Spitze an die reelle Axe heranzieht (cf. Fig. 36), die doch gleichmässig wie für J auch für die Modulformen eine ununterbrochene Folge wesentlich singulärer Punkte darbietet. *Wir können aber gleichwohl auch in einem solchen Punkte noch von einem bestimmten Werte von* g_2 *reden, insofern wir uns nämlich jenem Punkte ein für alle Mal auf bestimmter Bahn nähern wollen* (vorausgesetzt natürlich, dass g_2 bei dieser Annäherung einem bestimmten Grenzwerte zustrebt). Nähern wir uns z. B. dem wesentlich singulären Punkte $\omega = \infty$ auf der imaginären Axe der positiven ω-Halbebene, so gilt nach dem Schlussparagraphen des vorigen Kapitels annähernd:

$$\log J + 3 \log 12 = -2\pi i\omega.$$

Demgemäss wird in der Grenze

$$\omega_2^4 g_2 = -\left(\frac{d \log J}{d\omega}\right)^2 \frac{\pi^2 J}{3(J-1)} = \frac{4\pi^4}{3}, \tag{2}$$

*) Das Nähere darüber ist in „Ikos." I Kap. 2 § 13 entwickelt.

so dass bei diesem Grenzübergang $\omega_2^4 g_2$ endlich und von Null verschieden bleibt.

Bei unserer eben geschehenen Annäherung haben wir uns auf der Seite eines Dreiecks der Teilung der ω-Halbebene bewegt. Da aber alle Dreiecke dieser Teilung kreisverwandt sind, so können wir zu jeder auf der reellen Axe gelegenen Dreiecksspitze auf einer der oben gedachten kreisverwandten Bahn gelangen und finden dann *mit Rücksicht auf das invariante Verhalten von g_2 gegenüber den Modulsubstitutionen in der so erreichten Spitze für diese Form denselben Charakter wie bei $\omega = i\infty$.*

Sehr viel einfacher gestaltet sich die Überlegung für die beiden anderen Arten von Ecken. Stossen im Punkte ω_0 vier Dreiecke der Teilung zusammen, so ist dort unter endlicher, von Null verschiedener Constanten a in erster Annäherung*)

$$J - 1 = a(\omega - \omega_0)^2 + \cdots,$$

woraus sich nach (1) berechnet

$$\omega_2^4 g_2 = -\frac{4a\pi^2}{3} + \cdots \tag{3}$$

Endlich mögen im Punkte ω_0' sechs Dreiecke zusammenstossen, so gilt dort

$$J = a'(\omega - \omega_0')^3 + \cdots$$

und also wird

$$\omega_2^4 g_2 = 3a'\pi^2(\omega - \omega_0') + \cdots \tag{4}$$

Wir finden so den Satz: *Die Modulform g_2 ist im Innern der positiven ω-Halbebene bei endlichen Werten der ω_1, ω_2 durchaus endlich und besitzt dortselbst unendlich viele einfache algebraische Nullpunkte, nämlich alle die Stellen, die von je sechs Dreiecken der Teilung umlagert sind.*

Vermöge der Gleichung

$$27 g_3^2 = g_2^3 \cdot \frac{J-1}{J}$$

dehnen wir jetzt diesen Satz sofort auf g_3 aus, nur dass die *einfachen* Nullstellen dieser Form in den Ecken der Teilung liegen, die von je *vier* Dreiecken umringt sind.

Schliesslich ist $\Delta = \frac{g_2^3}{J}$ eben infolge dieser Gestalt *im Innern der ω-Halbebene bei endlichen ω_1, ω_2 allenthalben endlich und von Null verschieden,* und es erweist sich $\omega_2^{12}\Delta$ bei der oben zu Grunde gelegten Annäherung an eine Spitze der Teilung mit J^{-1} proportional:

*) Inversion von (1) pag. 100.

$$(5) \qquad \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} \Delta = \frac{1}{1728 \cdot J} = e^{2\pi i \omega},$$

so dass Δ dort in demselben Grade verschwindet, wie J unendlich wird.

Man erkennt in diesen Resultaten immer die entsprechenden Sätze über das Verschwinden der Ikosaederformen H, T, f wieder, wobei freilich die Analogie durch den Umstand getrübt wird, dass sich die Dreiecke der Modulteilung mit ihren Spitzen an die natürliche Grenze heranziehen. Diese Complication fällt bei den s-Functionen

$$s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; J\right)$$

mit durchgehends endlichen ν hinweg, und wir bemerken bei dieser Gelegenheit nebenher, dass man die zuletzt gegebenen Entwicklungen ohne Ausnahme auf jede solche s-Function ausdehnen kann. In der That sind von Halphen*) für jeden Fall jeweils drei Functionen aufgestellt worden, welche insofern unseren hier discutierten Formentripeln parallel gehen, als die einzelne derselben nur je einfach in der einen Art von Ecken der bezüglichen Teilung verschwindet.

Am glattesten führen sich diese Untersuchungen durch, wenn man, den homogenen ω_1, ω_2 entsprechend, s als den Quotienten zweier Grössen s_1, s_2 auffasst und nun mit den Variabelen s_1, s_2 operiert. Der Differentiationsprocess des § 2 ergiebt dann $\frac{dJ}{s_2^2 ds}$ als Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, welche genau die Rolle übernimmt, die oben $\frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega}$ spielte. Wir erwähnen dabei noch als allgemeinen Satz, *dass sich J als Quotient zweier Formen der Dimension*

$$\frac{2}{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} - 1}$$

darstellt, und in der That ist für ξ bez. ω

$$\frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1} = 60, \qquad \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\infty} - 1} = -12$$

in Übereinstimmung mit der bekannten Gestalt der Ikosaeder- bez. Modulgleichung.

Wir müssen leider darauf verzichten, diesen interessanten Vergleichspunkten noch weiter nachzugehen.

*) Cf. Comptes Rendus t. 92 (1881, I) p. 856.

§ 9. Analogie in der functionentheoretischen Behandlung der beiderseitigen Formenprobleme.

In „Ikos." I Kap. 3 wurde als Fundamentalaufgabe der weiteren Theorie diese aufgestellt: *Es ist der Wert von J numerisch gegeben, man verlangt aus der Ikosaedergleichung die zugehörigen Lösungen ζ zu bestimmen.* Diese Aufgabe konnte dann auch in formentheoretische Gestalt umgesetzt werden, wo sie als *Formenproblem* in nachstehender Weise zu fixieren war: *Gegeben sind die numerischen Werte der Ikosaederformen, ihrer Relation* (2) § 7 *entsprechend, man verlangt daraus die zugehörigen Lösungssysteme ζ_1, ζ_2 zu bestimmen.*

Diese Aufgabe sprechen wir sofort auch für die Modulgleichung aus. *Das eine Mal ist J gegeben und die zugehörigen Lösungen ω der Modulgleichung sind gesucht; beim entsprechenden Formenproblem haben wir die Modulformen g_2, g_3, Δ, ihrer Relation $g_2^3 - 27\, g_3^2 = \Delta$ entsprechend, als gegeben anzusehen und suchen die zugehörigen Lösungssysteme ω_1, ω_2.*

Die Ikosaederaufgabe wurde im weiteren Verlauf des eben citierten Kap. 3 mit functionentheoretischen Hülfsmitteln in Discussion gezogen. Da galt es zuvörderst, eine *Reduction des Formenproblems* vorzunehmen, darin bestehend, dass man ζ_1, ζ_2 nicht direct in Abhängigkeit von den f, H, T des Ikosaeders untersucht, vielmehr an Stelle dieser drei Grössen zwei andere setzt. Das war einerseits die Form zweiter Dimension

$$X(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{H \cdot f}{T}$$

und zweitens J selbst. In der That konnten f, H, T in X und J rational dargestellt werden*), und nun war die Abhängigkeit der ζ_1, ζ_2 von X so einfach, dass sie sich direct mit $\sqrt{X}$ proportional erwiesen. Demgemäss waren $\zeta_1 X^{-\frac{1}{2}}$, $\zeta_2 X^{-\frac{1}{2}}$ Functionen von J allein, für deren Studium des weiteren die Thatsache massgeblich wurde, dass sie Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung waren, von der aus wir zu convergenten Potenzreihen etc. gelangen konnten.

Man wird bei dieser kurzen Skizze sich sofort aller analogen Sätze aus dem vorletzten Kapitel erinnern, das in der That die functionentheoretische Discussion unserer „Modulaufgabe" in einer Gestalt darstellt, die den bezüglichen Ikosaederentwicklungen in allen wesentlichen Punkten gleicht. So hatten wir, um nur einen Punkt

*) „Ikos." p. 66 Formel (16).

herauszugreifen, auch oben eine Reduction des auf die ω_i bezüglichen Formenproblems vorgenommen, indem wir ω_1, ω_2 statt auf g_2, g_3, Δ vielmehr auf J und

$$X = \frac{g_2}{g_3}$$

als unabhängige Variabele bezogen. Dabei erweist sich jetzt nachträglich dieses X genau analog dem X des Ikosaeders als eindeutig und homogen von zweiter Dimension in ω_1, ω_2. Die Modulformen selbst aber stellen sich durch X und J in der rationalen Gestalt dar:

$$g_2 = \frac{3^3 J}{X^3(J-1)}, \quad g_3 = \frac{3^3 J}{X^3(J-1)}, \quad \Delta = \frac{3^9 J^2}{X^6(J-1)^3}.$$

Im übrigen haben wir ja auch schon oben in Kap. 2 wiederholt auf die entsprechenden Entwicklungen in „Ikos." Bezug genommen.

§ 10. Über algebraische Gleichungen mit einem variabelen Parameter.

Überaus folgenreich wird es, wenn wir nunmehr den Vergleich der beiden oft genannten Gleichungen auch für das Gebiet der Galois'schen Theorie durchführen*). Es bedarf dabei jedoch einer vorläufigen Untersuchung, in welchem Sinne die Begriffsbestimmungen der genannten Theorie von den algebraischen Gleichungen, auf die sie sich zunächst bezieht, auf die transcendente Modulgleichung übertragen werden können. In erster Linie handelt es sich in dieser Hinsicht um die Begriffe des *Rational-Bekanntseins* und der *Gruppe der Gleichung*, wobei wir vorab auf deren zwiefache Bedeutung für solche Gleichungen aufmerksam machen müssen, die neben constanten Coefficienten noch *variabele Parameter* enthalten. Wir mögen uns auf den Fall beschränken, dass nur ein solcher Parameter vorliegt. In der That besitzen ja unsere beiden Gleichungen nur einen veränderlichen Parameter, die Grösse J.

Der Rationalitätsbereich einer gerade vorliegenden „algebraischen" Gleichung dieser Art wird, abgesehen von etwaigen numerischen Grössen, jedenfalls noch den Parameter enthalten. Demgemäss muss eine rational-bekannte Grösse, wofern sie nicht constant ist, den variabelen Parameter in rationaler Weise enthalten. Und hier ist es nun, wo die in der freien Veränderlichkeit begründete Sonderstellung des Parameters gegenüber constanten Grössen eine verschiedenartige Festlegung des Wortes Rationalitätsbereich zur Folge hat. Entweder man lässt es mit der Forderung, den Parameter rational zu enthalten, genug sein

*) Wir müssen hierbei die grundlegenden Erörterungen in „Ikos." I Kap. 4 als bekannt voraussetzen.

und erklärt für *rational-bekannt jede im Sinne der Functionentheorie rationale Function des Parameters, gleichviel ob numerische Irrationalitäten im Ausdruck dieser Function enthalten sind oder nicht;* oder aber man nennt rational-bekannt eine rationale Function des Parameters nur dann, wenn deren Coefficienten *in arithmetischer Hinsicht rational aus einem ganz bestimmten Kreise numerisch gegebener Zahlen zusammengesetzt* sind, welche letztere dann im Verein mit dem Parameter den *Rationalitätsbereich* darstellen. Wir nennen den ersten Standpunkt seiner Natur nach den *functionentheoretischen*, letzteren, welcher der umfassendere ist, den *arithmetischen*.

Diese Unterscheidung wird bei Aufstellung der Gruppe der Gleichung fundamental. Im ersten Falle bewegen wir uns ausschliesslich im Gebiet der algebraischen *Functionen*. Wir werden, wofern unsere Gleichung vom n^{ten} Grade ist, über der complexen Ebene des Parameters eine zugehörige n-blättrige Riemann'sche Fläche construieren. Ein Wert des Parameters bedeutet dann im allgemeinen n getrennte, über einander liegende Punkte dieser Fläche, welche die Träger der n zugehörigen Wurzeln unserer Gleichung sind. In einfachster Weise können wir hier angeben, welches die Gruppe der Gleichung für den functionentheoretischen Standpunkt sein wird.

Wir denken zu dem Zwecke die zu jenem Werte des Parameters gehörigen Wurzeln in eine erste Anordnung gebracht. Sodann lassen wir den Parameter *in seiner complexen Ebene* von jenem fixierten Punkte aus eine geschlossene Bahn zu ihm zurück beschreiben, die jedoch die Verzweigungsstellen der gedachten Fläche meiden soll. Bei Durchlaufung dieser Bahn haben sich die n Wurzeln in durchaus eindeutiger Weise geändert und werden von der Reihenfolge abgesehen wieder dasselbe Wertsystem wie am Anfang darstellen. Aber gerade die solchergestalt erzielte Permutation der Wurzeln aus der ersten Anordnung in die zweite ziehen wir heran und wollen alle durch solche geschlossene Wege des Parameters überhaupt zu gewinnenden Permutationen sammeln. *Sie werden eine Permutationsgruppe bilden müssen, und diese ist in dem hier gemeinten functionentheoretischen Sinne die gesuchte Gruppe der Gleichung**). In der That wird jede rationale Function der Wurzeln, die ihren Wert nicht ändert, wenn man den Parameter über einen beliebigen geschlossenen Weg beschriebener Art führt, eine rationale Function des Parameters darstellen.

*) Nach Camille Jordan nennt man diese Gruppe die Monodromiegruppe der vorgelegten Gleichung (man vgl. C. Jordan's Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870, p. 277). Diese Gruppe ist übrigens bereits sehr viel früher von Hermite u. a. gelegentlich in Betracht gezogen worden.

Wollen wir jetzt den arithmetischen Standpunkt einnehmen, so ist selbstverständlich das Erste, dass wir nur solche rationale Verbindungen der Wurzeln in Betracht ziehen, welche auch numerisch rational sind. Gesetzt nun, eine solche Function hinge nach den erforderlichen Umsetzungen rational von dem Parameter ab, so muss man doch immer der Möglichkeit Raum geben, dass dieselbe in der so gewonnenen Gestalt noch *numerische Irrationalitäten* enthalten kann, deren Eigenart im Einzelfall durch die Natur der Gleichung bestimmt sein wird. Sind diese Irrationalitäten noch nicht adjungiert, so haben wir für den arithmetischen Standpunkt in der obbeschriebenen Gruppe noch nicht die Galois'sche Gruppe der Gleichung vor uns. *Diese letztere wird vielmehr umfassender sein und jene als Untergruppe in sich enthalten.*

Sind dagegen die in Rede stehenden Irrationalitäten adjungiert, so wird der arithmetische Standpunkt insofern auf den functionentheoretischen zurücksinken, *als dann die in beiden Fällen in Betracht kommenden Gruppen identisch werden**). Immer bleibt es uns aber für den allein functionentheoretischen Standpunkt unbenommen, schon in die rationalen Functionen, die wir aus den Wurzeln zusammensetzen, numerische Irrationalitäten irgend welcher Art aufzunehmen.

§ 11. Übertragung algebraischer Begriffe auf transcendente Gleichungen.

Versuchen wir nunmehr die angedeuteten Überlegungen für eine einen Parameter enthaltende transcendente Gleichung durchzuführen, wie eine solche z. B. unsere Modulgleichung ist, so ergiebt sich zunächst eine völlig zwanglose Ausdehnung des functionentheoretischen Standpunkts auf diesen Fall. Nichts hindert, über der complexen Ebene des Parameters die freilich ∞-blättrige Riemann'sche Fläche construiert zu denken, welche der transcendenten Gleichung zugehört**). Gerade wie oben lassen wir jetzt den Parameter in seiner Ebene geschlossene Wege beschreiben und gewinnen durch jeden derselben eine völlig bestimmt charakterisierte Permutation der Wurzeln, wobei freilich jetzt die Anzahl dieser verschiedenen so erzielbaren Permutationen, wie leicht ersichtlich, über alle Grenzen wachsen muss.

---

*) Man verfolge diese Verhältnisse insbesondere an der Ikosaedergleichung (vgl. namentlich „Ikos." I Kap. 4 § 5), wo die beiderlei Gruppen solche der 60sten bez. 240sten Ordnung sind, während die letztere auf die erstere nach Adjunction von $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ zurücksinkt.

**) Vgl. oben Kap. 2 § 15.

*Immer bilden sie doch eine durchaus fest charakterisierte Permutationsgruppe unendlich hoher Ordnung, und diese wird die Gruppe unserer Gleichung sein**).

Vereinen wir jetzt die unendlich vielen Wurzeln unserer Gleichung in convergente Processe und nehmen dabei jede einzelne Wurzel in functionentheoretisch rationaler Weise auf**). Sei ferner der Wert einer derartigen Verbindung der Wurzeln unveränderlich gegenüber den Permutationen der eben definierten Gruppe; *ersichtlich ist dann und nur dann diese Function der Wurzeln eine eindeutige Function des Parameters.* Als solche aber wird sie für bekannt gelten, indem wir in der That an Stelle der rationalen Functionen unter Anpassung an die Verhältnisse hier überhaupt *die eindeutigen Functionen des Parameters für rational-bekannt oder, besser gesagt, für bekannt erklären.*

Versuchen wir jetzt der Betrachtung noch die arithmetische Verschärfung zu geben, so werden wir von vornherein in die convergenten Processe die einzelne Wurzel auch numerisch rational einführen. Aber man muss beachten, dass gleichwohl mit der Zulassung „unendlicher" Processe principiell der Unterschied zwischen numerisch Rationalem und Irrationalem verwischt wird. In der That möge man, um auf diese Verhältnisse etwas näher einzugehen, sich eine Function der Wurzeln von geforderter Eigenschaft in $f = r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$ gebildet haben, wobei also das einzelne Glied dieser, als absolut convergent vorausgesetzten Entwicklung von f eine functionentheoretisch und arithmetisch rational gebaute Function einer oder auch einiger Wurzeln unserer transcendenten Gleichung ist. Diese Function f der Wurzeln soll zudem so gebildet sein, dass sie unverändert bleibt bei allen Permutationen der Wurzeln, die eine bestimmte, noch nicht näher definierte Gruppe G bilden; die so gewonnene Function f wird uns dann als bekannt gelten. Ist ferner α eine ganz willkürlich gewählte numerische Irrationalität, so können wir dieselbe bekanntermassen in eine absolut convergente Reihe $\alpha = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ rationaler Zahlen $a_0, a_1 \cdots$ entwickeln. Wir denken uns jetzt, wofern die oben durch f bezeichnete Reihe mehrfach unendlich ist, an erster Stelle solche Glieder $r_0, r_1, r_2 \cdots$ angeordnet, die für sich genommen eine einfach unendliche Reihe bilden. Diesen Gliedern wollen wir dann, um mit festen Vorstellungen zu thun

---

*) Diese Gruppe werden wir sogleich bei der Modulgleichung in einer durchaus zugänglichen Form wieder finden.

**) Wir bemerken, dass in Poincaré's Behandlung der Functionen mit unendlichen Gruppen linearer Transformationen in sich derartige Verbindungen unendlich vieler Wurzeln eine principielle Rolle spielen.

zu haben, die entsprechenden Glieder der für α angegebenen Entwicklung hinzufügen und haben nun in

$$f' = (a_0 + r_0) + (a_1 + r_1) + (a_2 + r_2) + \cdots$$

eine neue Function der Wurzeln, die alle hier in Betracht kommenden Eigenschaften von f gleichfalls besitzt. Aber nun gilt mit f und f' eo ipso auch die Differenz $f' - f = \alpha$ für bekannt; es ist also von vornherein jede beliebige numerische Irrationalität α als bekannt anzusehen, und wir können dieserhalb nur eine solche Gruppe G unserer Gleichung bilden, welche dem functionentheoretischen Standpunkt entspricht. Wir haben demgemäss das Resultat: *Bei transcendenten Gleichungen mit einem Parameter bleibt der functionentheoretische Standpunkt wesentlich unverändert bestehen, während der arithmetische principiell in Wegfall kommt.*

Wir handeln endlich noch unter Festhaltung allein des functionentheoretischen Standpunktes von einem weiteren sehr wichtigen Begriffe der Algebra, nämlich dem der *Irreducibilität.* Die Ikosaedergleichung ist functionentheoretisch irreducibel, insofern ihre linke Seite, wenn wir sie in der Form einer rationalen ganzen Function von ξ und J schreiben

$$G_1(\xi) - JG_2(\xi) = 0,$$

sich nicht in das Product zweier eben solchen Functionen spalten lässt. Aber das ist nur die äussere Erscheinung der Thatsache, dass die bezügliche 60-blättrige Fläche über der J-Ebene zusammenhängend ist und nicht in getrennte Stücke zerfällt, oder, was dasselbe sagt, dass wir durch geschlossene Wege des J in seiner Ebene jede Wurzel ξ stetig in jede andere überführen können, oder endlich, um es noch anders auszudrücken, dass die Monodromiegruppe der Ikosaedergleichung transitiv ist. Wir werden sofort sagen: *Auch die Modulgleichung ist irreducibel,* wie denn in der That die ihr zugehörige unendlich-blättrige Fläche über der J-Ebene, bez. die Gebietsteilung in der Halbebene ω vermöge der von uns von vornherein eingeführten Definitionen notwendig je ein untrennbares Ganze bilden.

§ 12. Gruppentheoretischer Vergleich der Ikosaeder- und Modulgleichung.

Bei der Behandlung der Ikosaedergleichung, wie dieselbe in den „Vorlesungen" vorliegt, wird die arithmetische Seite des Problems nur einmal ganz vorübergehend*) in Betracht gezogen. Der herrschende

*) Am Schluss von § 5 in I Kap. 4.

Standpunkt ist durchaus der functionentheoretische, d. i. gerade der, welchen wir auch gegenüber der Modulgleichung einnehmen können. In der That findet denn auch hier wieder völlige Analogie zwischen beiden Gleichungen statt. Erinnern wir uns zuvörderst kurz an die bezüglichen Verhältnisse, wie sie sich beim Ikosaeder gestalten.

Die Ikosaedergleichung hatte eine Gruppe sechzigster Ordnung, deren bündigste Form wir in der Gruppe der sechzig Ikosaedersubstitutionen fanden*). Bezeichnen wir dieselben kurz durch $S_0(\xi) = \xi$, $S_1(\xi) \cdots S_{59}(\xi)$, so ist die Gruppeneigenschaft dieser sechzig Substitutionen ausgedrückt durch

$$S_k(S_i(\xi)) = S_l(\xi),$$

was wir kurz in symbolischer Form schreiben wollen:

$$S_k S_i = S_l.$$

In dieser Substitutionsgruppe hatten wir nun freilich nicht den sonst gewohnten Ausdruck für die Gruppe einer Gleichung, die man doch in der Regel als Permutationsgruppe aufstellt. Aber es gelang leicht, den Übergang zu dieser letzteren Form zu finden. Bezeichnet ξ eine Wurzel, so sind die sämtlichen Wurzeln durch

$$\xi, \quad S_1(\xi), \quad S_2(\xi), \quad \cdots S_{59}(\xi) \tag{1}$$

dargestellt, wodurch zugleich eine bestimmte Reihenfolge unter ihnen festgesetzt ist. Wir ordnen die Folge (1) jetzt in

$$S_i(\xi), \quad S_1 S_i(\xi), \quad \cdots S_{59} S_i(\xi) \tag{2}$$

um, wobei S_i eine der sechzig Substitutionen ist, und haben dergestalt sechzig verschiedene Permutationen von (1) in (2) gewonnen, welche die Gruppe in gewohnter Form darstellen.

In der That konnten die beiderlei Gruppen holoedrisch isomorph auf einander bezogen werden, wenn man der Permutation von (1) in (2) die zu S_i inverse Substitution S_i^{-1} entsprechend setzte. Wenn man nämlich nach S_i jetzt S_k auf (2) anwendet, so erhalten wir als Resultat der Anwendung beider Operationen in dieser bestimmten Reihenfolge die Permutation von (1) in

$$S_i S_k(\xi), \quad S_1(S_i S_k(\xi)), \quad \cdots S_{59}(S_i S_k(\xi)). \tag{3}$$

Üben wir auf der anderen Seite auf ξ zuerst S_i^{-1} und dann S_k^{-1} aus, so kommt als Resultat die Substitution

$$S_k^{-1}(S_i^{-1}(\xi)) = (S_i S_k)^{-1}(\xi),$$

welche der durch (3) angezeigten Permutation in demselben Sinne zugeordnet ist, wie S_i^{-1} der durch (2) gegebenen.

*) Die Formenprobleme bleiben im Texte zuvörderst ausser Betracht.

Alle diese Betrachtungen übertragen sich jetzt sofort auf die Modulgleichung. Wir haben schon in Kap. 2 durch Rechnung gezeigt, dass die Gesamtheit der Modulsubstitutionen:

$$V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{4}$$

eine Gruppe darstellt, die wir nun auch kurz die „Modulgruppe" nennen. *Sie ist mit der Permutationsgruppe der Modulgleichung holoedrisch isomorph.*

Bringen wir nämlich die Wurzeln der Modulgleichung in die Anordnung:

$$\omega, \quad V_1(\omega), \quad V_2(\omega) \cdots \tag{5}$$

und lassen V_i der Reihe nach alle Modulsubstitutionen durchlaufen, so bildet die Gesamtheit der Permutationen von (5) in

$$V_i(\omega), \quad V_1 V_i(\omega), \quad V_2 V_i(\omega) \cdots \tag{6}$$

früheren Erörterungen zufolge die Gruppe der Modulgleichung. Denn in der That können wir durch einen zweckmässigen geschlossenen Weg des J in seiner Ebene infolge der Irreducibilität der Gleichung die erste Wurzel ω in irgend eine vorgeschriebene andere $V_i(\omega)$ stetig überführen; und andrerseits müssen die Änderungen der übrigen Wurzeln durch Angabe dieser $V_i(\omega)$ bereits mit bestimmt sein, da alle übrigen Wurzeln lineare Functionen einer ersten ω sind. Die geschilderte Permutationsgruppe lässt sich aber analog wie beim Ikosaeder dadurch holoedrisch isomorph auf die Modulgruppe beziehen, dass man die besondere durch den Übergang von (5) zu (6) dargestellte Permutation der Substitution V_i^{-1} zuordnet. *Wir können demgemäss in übertragenem Sinne die Modulgruppe d. i. die Gruppe der Substitutionen*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

geradezu als die Gruppe der Modulgleichung bezeichnen.

§ 13. Formulierung der allgemeinen Fundamentalaufgabe.

Es ist ein Hauptgewinn von Galois' Theorie der Gleichungen, dass eine einzelne vorgegebene Gleichung $F(x) = 0$ nicht mehr isoliert untersucht wird, sondern eingeordnet erscheint *als ein Glied in die Kette ihrer Resolventen.* Erinnern wir uns kurz an die hier eintretenden Gesichtspunkte*). Der vorgegebenen Gleichung $F(x) = 0$ kommt eine Gruppe zu, die wir kurz G nennen wollen, und in ihr sei eine Untergruppe g enthalten. Dieser Untergruppe g gehört in einer Weise, die

*) Wie sie ausführlicher in „Ikos." I Kap. 4 §§ 3, 4 zur Entwicklung gelangen.

wir hier nicht näher erläutern wollen, eine Resolvente $f(y) = 0$ von $F(x) = 0$ zu, und zwar nur *eine* solche Resolvente, wofern wir rational in einander transformierbare Gleichungen als wesentlich verschieden nicht ansehen. Da ist es nun ein Hauptpunkt, dass die Gruppe dieser Resolvente Isomorphismus zur Gruppe G der Gleichung $F(x)$ aufweist, wobei dann die wichtige Fallunterscheidung Platz greift, ob dieser Isomorphismus holoedrisch oder meroedrisch ist.

Immer sind die Wurzeln y der Resolvente rationale Functionen der Wurzeln x der ursprünglichen Gleichung. Trifft dann der erste der beiden soeben unterschiedenen Fälle zu, d. i. besteht holoedrischer Isomorphismus zwischen den Gruppen von $F(x) = 0$ und $f(y) = 0$, so lässt sich auch umgekehrt jede Wurzel x der ursprünglichen Gleichung rational in den Wurzeln y der Resolvente und den bekannten Grössen darstellen. Die Auflösung von $F(x) = 0$ und die von $f(y) = 0$ sind dann, wie man sich ausdrückt, *äquivalente Probleme.*

Ganz verschieden davon ist der andere Fall des meroedrischen Isomorphismus der beiderlei Gruppen, wo dann Gruppe G diejenige von höherer Ordnung ist. Bleibt immer die einzelne Wurzel y rational in den x und den bekannten Grössen — denn solcherweise wurde ja die Resolvente $f(y) = 0$ überhaupt eingeführt —, so ist nun keineswegs auch die einzelne Wurzel x rational in den y mit Hilfe der bekannten Grössen darstellbar. *Jetzt also ist die Lösung von* $f(y) = 0$ *ein Problem von einfacherem Charakter gegenüber der Lösung von* $F(x) = 0$, und die Lösung von $f(y) = 0$ wird das Problem der Lösung von $F(x) = 0$ nur vereinfachen, nicht erschöpfen.

Wollen wir nun auch ferner unter den Resolventen, welche im Einzelfall „äquivalente Probleme" darbieten, diejenige insbesondere charakterisieren, welche man mit dem Namen der zugehörigen *Galois'schen Resolvente* belegt hat. Alle gemeinten Resolventen haben abstract genommen dieselbe Gruppe; aber es ist das Besondere, dass diese Gruppe genau einfach transitiv ausfällt, wenn wir sie als Permutationsgruppe aus den Wurzeln der betreffenden Galois'schen Resolvente aufbauen. Das hat denn zur Folge, dass mit *einer* Wurzel dieser Resolvente zugleich alle übrigen bekannt sind, indem sie alle rationale Functionen jener einen werden, ein Umstand, der gleichfalls charakteristisch für die Galois'sche Resolvente ist. Der Grad der Galois'schen Resolvente ist freilich höher als der Grad irgend einer ihr zugehörigen Resolvente und sie könnte also unter allen Resolventen als die complicierteste erscheinen; dafür aber werden diese Resolventen alle von jener insofern beherrscht, als jede Wurzel einer niederen Resolvente eine rationale Function einer einzelnen Wurzel der Galois'schen ist.

Wir mussten an diese letzten Sätze erinnern, um nun sogleich den Schluss zu ziehen: *Wie die Ikosaedergleichung ist auch die Modulgleichung ihre eigene Galois'sche Resolvente.* Ihre Permutationsgruppe erwies sich ja in der That als einfach transitiv, wie sich denn auch jede ihrer Wurzeln als rationale, nämlich lineare Function einer einzigen unter ihnen ω darstellte.

Wenn man es weiter als den Ausbau der Ikosaedertheorie bezeichnen darf, dass die Resolventen der Ikosaedergleichung und unter ihnen namentlich diejenigen der niedersten Grade aufgestellt und untersucht wurden, so wird sich für uns als Fundamentalaufgabe für alle folgenden Erörterungen in entsprechender Weise diese aufdrängen: *Wir wollen die Resolventen der Modulgleichung namhaft machen und untersuchen.* Dabei wollen wir aber nicht etwa besonders diejenigen herausgreifen, welche mit der Modulgleichung äquivalente Probleme definieren und demnach gleichfalls transcendent sind, *sondern es soll sich möglichst um die Gesamtheit solcher Resolventen handeln.* Vornehmlich muss es interessieren, wie wir hier sogleich zum voraus ankündigen, *dass es unter den gemeinten Resolventen auch solche von endlichem Grade giebt.* Sie sind *algebraische Gleichungen mit dem Parameter J* und ihre Gruppe, die selbstverständlich von endlicher Ordnung ist, wird zur Modulgruppe jedenfalls *Isomorphismus von unendlich hoher Meroedrie* zeigen müssen. Dass wir solchen Resolventen endlichen Grades, wenn sie wirklich existieren, in erster Linie unsere Erörterungen widmen werden, brauchen wir kaum noch zu versichern.

Alle diese Resolventen, mögen sie endlichen oder unendlichen hohen Grades sein, werden von der Modulgleichung insofern beherrscht, als jede Wurzel von einer der ersteren, wie wir nun sagen müssen, eine „eindeutige" Function einer beliebigen einzelnen Wurzel ω der Modulgleichung ist. Wir können in diesem Sinne unsere Fundamentalaufgabe auch dahin formulieren, *dass wir diejenigen Gleichungen mit einem variabelen Parameter J kennen lernen wollen, die sich durch eindeutige Functionen der Wurzel ω der Modulgleichung lösen lassen.* In der That ist es ja auch sofort zu sehen, dass jede solche Gleichung dem System unserer Resolventen angehören wird.

§ 14. Das gruppentheoretische Grundproblem.

Das Mittel, die Gesamtheit der Resolventen einer gegebenen Gleichung aufzufinden, gewinnt die Galois'sche Theorie in der Zerlegung der zur Gleichung gehörigen Gruppe in ihre Untergruppen. Formulieren wir daher als Zielpunkt unserer weiteren Unternehmungen ein erstes

Grundproblem, dem wir den Namen des *gruppentheoretischen* verleihen: *Es ist die Gruppe der Modulsubstitutionen:*

$$V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

gegeben; man soll ihre Untergruppen aufzählen und nach sachgemässen Grundsätzen classificieren.

Aber während das entsprechende Problem der Ikosaedertheorie, die Zerlegung der endlichen Gruppe 60ster Ordnung in ihre Untergruppen, leicht gelöst war, stehen wir hier vor einem Problem von ausserordentlicher Tiefe, darum freilich auch von ungleich höherem Interesse. Bei späterer Untersuchung zeigt sich von Untergruppen der Modulgruppe eine Mannigfaltigkeit, die wir im einzelnen gar nicht übersehen werden können; und wir werden uns bald genug genötigt sehen, eine sehr specielle Gattung, die an sich betrachtet auch bereits mannigfaltig genug ist, zur eingehenden Untersuchung auszusondern.

Überhaupt teilen sich, was wir hier sogleich vorweg bemerken, alle Untergruppen der Modulgruppe nach folgendem Gesichtspunkte in *zwei* Classen. Seien die Substitutionen irgend einer gerade vorliegenden Untergruppe durch $1, v_1, v_2 \cdots$ bezeichnet*), deren Zahl gleichfalls unendlich gross sein kann, so kann man nach den Elementen der Gruppentheorie die Gesamtgruppe in dem Schema anordnen:

$$\begin{array}{cccc} 1, & v_1, & v_2, & v_3 \cdots \\ V_1, & v_1V_1, & v_2V_1, & v_3V_1 \cdots \\ V_2, & v_1V_2, & v_2V_2, & v_3V_2 \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Dasselbe ist so gebaut, dass in der ersten Reihe die Substitutionen der Untergruppe Platz finden, während die in jeder neuen Reihe hinzukommende Substitution V in keiner vorhergehenden Reihe vorkommen soll. Hier sondern wir nun den Fall, dass unser Schema nur erst mit einer *unendlichen* Zahl von Horizontalreihen die gesamte Gruppe der Modulsubstitutionen zu erschöpfen vermag vom anderen, wo zu diesem Ende eine endliche Zahl von Reihen genügt. Diese Zahl, welche sich leicht als von der besonderen Auswahl der Substitutionen V_i unabhängig erweist und demnach *der Untergruppe eigentümlich ist,* nennen wir deren *Index in Bezug auf die Gesamtheit der Modulsubstitutionen.* Der Index giebt also gewissermassen an, welcher Bruchteil aller Substitutionen auf die Untergruppe entfällt. Wir werden später zumeist

*) Man bezeichnet bekanntlich bei dieser abgekürzten Schreibweise die identische Substitution durch 1.

mit Untergruppen von endlichem Index zu thun haben. Eben diese sind es, die zu den algebraischen Resolventen der Modulgleichung hinführen, von denen bereits im vorigen Paragraphen die Rede war.

§ 15. Das functionentheoretische Grundproblem.

Jedem System gleichberechtigter Untergruppen, das der Problemstellung des vorigen Paragraphen entspricht, gehört eine Resolvente der Modulgleichung zu*). Die Aufstellung einer solchen Resolvente unserer transcendenten Modulgleichung weicht in keiner Weise principiell von den bezüglichen Vorschriften für algebraische Gleichungen ab. Wir werden uns durch einen convergenten Process mit einer eindeutigen Function der Wurzeln der Modulgleichung versehen, welche unverändert ihren Wert behält, wenn wir diese Wurzeln den Permutationen einer gerade vorliegenden Untergruppe unterwerfen, die aber bei allen übrigen Permutationen ihren Wert wechselt; diese Function ist Wurzel der Resolvente.

Hier kommen wir nun ausführlich auf die bereits am Schlusse von § 13 berührten Verhältnisse zurück, die darin begründet waren, dass die Modulgleichung ihre eigene Galois'sche Resolvente ist. Jede Wurzel der Modulgleichung ist, wie wir wissen, eine lineare Function einer einzelnen ω; der unbestimmte Begriff einer durch convergenten Process zu gewinnenden eindeutigen Function der unendlich vielen Wurzeln geht in den Begriff der *eindeutigen (analytischen) Function der einzigen Grösse* ω über; und wenn jene bei den Permutationen einer vorliegenden Untergruppe und nur bei ihnen ihren Wert unverändert erhielt, *so wird diese unverändert bleiben, wenn man ihr Argument* ω *einer Modulsubstitution* $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ *derjenigen Untergruppe unterwirft, die in bekannter Weise mit jener Permutationsuntergruppe holoedrisch isomorph ist; sie wird indessen sich ändern, so oft wir auf* ω *eine andere Modulsubstitution ausüben.*

Eine solche *eindeutige* Function von ω nennen wir hinfort eine *Modulfunction* oder aus naheliegendem Grunde eine *elliptische Modulfunction***) und sagen von der eben gedachten Modulfunction, *sie gehöre zu der in Rede stehenden Untergruppe von Modulsubstitutionen.* Sie wird dann einer Gleichung mit dem variabelen Parameter J genügen, welche eine zu jener Untergruppe gehörende Resolvente der Modul-

*) Vgl. über die zu Grunde liegende Auffassung „Ikos." I Kap. 4 § 8.

**) Diese Benennung ist zuerst von Hrn. Dedekind in der sogleich zu nennenden fundamentalen Arbeit in Cr. J. Bd. 83 gebraucht.

gleichung abgiebt. Aber ohne schon dieser Resolventen selbst zu gedenken, wollen wir unser *zweites, functionentheoretisches Grundproblem* dahin formulieren, *dass wir für die Untergruppen aus Modulsubstitutionen zugehörige Modulfunctionen gewinnen sollen.* Während der Lösung dieser Aufgabe hat ω den Charakter als Wurzel der Modulgleichung vorübergehend völlig abgestreift *und ist dann selbst zur unabhängig veränderlichen Grösse geworden.* Haben wir dann einmal für eine vorgelegte Untergruppe eine zugehörige Modulfunction gefunden, so fügen wir als einen zweiten Teil des functionentheoretischen Grundproblems nun weiter noch die Aufgabe an, *dass wir den Zusammenhang dieser Modulfunction mit dem Parameter J explicite kennen lernen wollen.* Solcherart würden wir dann die in Betracht kommende Resolvente auch ihrer äusseren Gestalt nach wirklich in Erfahrung gebracht haben.

Die Mittel, welche uns zur Lösung unseres Problems zur Verfügung stehen, sind verschiedener Art. Wir werden uns, wie schon angedeutet, namentlich für solche Modulfunctionen interessieren, welche algebraische Functionen von J sind. Und hier ist nun das besonders Wichtige, dass es durch *sachgemässen Gebrauch der Modulteilung der ω-Halbebene gelingt*, auf geometrischem Wege die Mittel und Ansatzpunkte zur erfolgreichen Anwendung von *Riemann's Theorie der algebraischen Functionen* zu gewinnen*). Über die Theorie der algebraischen Functionen hinaus werden wir späterhin zumal diejenige der *doppeltperiodischen* Functionen als nutzbringend für die Auflösung des functionentheoretischen Problems heranziehen; der Inhalt des folgenden Kapitels mit seinen der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen entnommenen Entwicklungen ist wesentlich mit Rücksicht hierauf gewählt.

Einige Modulfunctionen haben wir bereits in den voraufgehenden Kapiteln kennen gelernt. In der That werden wir den Satz beweisen lernen**), dass alle s-Functionen mit $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$ und beliebigem $\nu_3 = n$ elliptische Modulfunctionen werden, wenn wir sie in der Form schreiben:

$$s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J(\omega)\right). \tag{1}$$

*) Näher diesen Satz zu erläutern, müssen wir selbstverständlich hinausschieben und führen nur an, dass die bahnbrechenden Arbeiten in diesem Betracht die folgenden sind: Dedekind, *Schreiben an Hrn. Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Crelle's Journ. Bd. 83 (1877); Klein, *Über die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen 5ten Grades, Über die Erniedrigung der Modulgleichungen, Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*, Math. Ann. Bd. 14 (1878).

**) „Ikos." p. 132 u. f.

Da geben dann insbesondere die Irrationalitäten der regulären Körper die Modulfunctionen

$$\lambda(J(\omega)),\quad \xi(J(\omega)),\quad \mu(J(\omega)),\quad \zeta(J(\omega)), \tag{2}$$

die wir späterhin kurzweg als $\lambda(\omega)$, $\xi(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\zeta(\omega)$ bezeichnen. Die Gleichungen der regulären Körper repräsentieren also Resolventen endlichen Grades der Modulgleichung und definieren dementsprechend Untergruppen der Modulgruppe von endlichem Index. Alle Functionen (1) für $n > 5$ liefern uns demgegenüber Beispiele solcher Modulfunctionen, die zu Untergruppen mit unendlichem Index gehören. Vor allem muss uns aber *als Typus der elliptischen Modulfunctionen die Function $J(\omega)$ selbst dastehen*; nur werden für sie alle in den letzten Paragraphen entwickelten allgemeinen gruppentheoretisch-algebraischen Erörterungen bedeutungslos, insofern sie ja zur Gesamtgruppe der Modulsubstitutionen gehört. $J(\omega)$ ist von vornherein rational bekannt, und es wäre in der That trivial, wollten wir auch noch $x - J = 0$ eine Resolvente der Modulgleichung nennen.

§ 16. Die elliptischen Modulformen.

Die Modulsubstitutionen hatten wir ursprünglich in der homogenen Form

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \tag{1}$$

kennen gelernt und waren erst hernach zur nicht homogenen Gestalt

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \tag{2}$$

vorgeschritten. Bemerken wir jetzt, dass nicht nur die Substitution (1), sondern auch noch die andere

$$\omega_1' = -\alpha\omega_1 - \beta\omega_2,\quad \omega_2' = -\gamma\omega_1 - \delta\omega_2$$

beim Fortgang zur nichthomogenen Schreibweise (2) liefert; denn in der Substitution (2) ist ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der vier Coefficienten α, β, γ, δ völlig bedeutungslos. Wir müssen demnach sagen, dass einer nichthomogenen Modulsubstitution immer *zwei* homogene entsprechen und, indem wir die Gruppe der letzteren kurz als *„homogene Modulgruppe"* bezeichnen, *wird zwischen dieser und der nichthomogenen Modulgruppe hemiedrischer Isomorphismus bestehen.*

Im Anfang dieses Kapitels traten die homogenen Substitutionen in den Vordergrund, als wir vermittelst des Differentiationsprocesses aus der Modulfunction $J(\omega)$ die Modulformen $g_2(\omega_1, \omega_2)$, $g_3(\omega_1, \omega_2)$, $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ herstellten. Aber jetzt ist uns $J(\omega)$ nur eine erste unter einer unendlichen Folge von Modulfunctionen, die den unendlich vielen

Untergruppen aus Modulsubstitutionen entsprechen. Da wird sich nun zeigen, dass wir von ihnen allen aus vermöge des Differentiationsprocesses zu homogenen Functionen von ω_1, ω_2 gelangen können, die zu den Untergruppen aus homogenen Substitutionen gerade so gehören, wie die Modulfunctionen zu den nichthomogenen Untergruppen. Doch definieren wir diese homogenen Functionen von ω_1, ω_2, die wir nun allgemein „Modulformen" nennen wollen, besser in unabhängiger Weise: *Eine elliptische Modulform soll eine eindeutige homogene Function positiver oder negativer ganzzahliger Dimension von ω_1, ω_2 sein, welche unverändert bleibt, wenn wir auf ihre Argumente die Substitutionen einer Untergruppe der homogenen Modulgruppe anwenden.* Wir sagen dann wieder, *die Modulform gehöre zu dieser Untergruppe.*

Wenn wir späterhin, namentlich im vierten Abschnitt, in erster Linie mit den Modulformen operieren, so ist dies jedenfalls der umfassendere Ansatz, indem sich von ihm aus der Rückgang zu den Modulfunctionen in der einfachsten Weise gestaltet. In der That werden zwei Modulformen gleicher Dimension, die zu einer und derselben Untergruppe gehören, in ihrem Quotienten eine Modulfunction liefern, die zur bezüglichen nichthomogenen Untergruppe gehört. So hatten wir ja schon für die Gesamtgruppe als Modulformen der gleichen, nämlich der $(-12)^{\text{ten}}$, Dimension g_2^3 und Δ erkannt, und die Modulfunction J als deren Quotienten dargestellt. Zuvörderst freilich (im dritten Abschnitt) werden wir an erster Stelle Modulfunctionen construieren und von ihnen erst hinterher zu den Modulformen aufsteigen. Eine solche Art zu operieren wird den im zweiten und dritten Abschnitte zur Geltung kommenden geometrischen Methoden durchaus entsprechen.

Wir haben hiermit alle wichtigen Begriffe unserer späteren Überlegungen zur Definition gebracht, soweit dies überhaupt auf Grund der voraufgehenden Kapitel geschehen konnte. Das nächstfolgende Kapitel bringt, wie schon in Aussicht gestellt, vorab solche Entwicklungen aus der Theorie der doppeltperiodischen Functionen, die uns später zur Hand sein müssen. Wir werden dann, in den folgenden Abschnitten, daran gehen, die beiden formulierten Grundprobleme nach einander aufzulösen.

Fünftes Kapitel.

Analytische Darstellungen für doppeltperiodische Functionen und Modulformen.

Nachdem in den voraufgehenden Kapiteln die grundlegenden Eigenschaften der Functionen $J(\omega)$, $g_2(\omega_1, \omega_2)$ u. s. w. zur Ableitung kamen, wird man nun auch wünschen, analytische Darstellungen für dieselben zu besitzen, gültig in dem Bereiche, für welche diese Functionen überhaupt definiert sind. Solche gewinnen wir auf die einfachste Weise aus den analytischen Darstellungen doppeltperiodischer Functionen, auf welche wir ohnedies hier zurückkommen wollten. Der wiederholte Gebrauch dieser Functionen im Laufe der beiden letzten Abschnitte des vorliegenden Werkes lässt es zur bequemen Rückbeziehung wünschenswert erscheinen, dass wir eine Reihe von Formeln über doppeltperiodische Functionen hier zusammenstellen. Sie werden dann auch hinreichen, um die versprochenen Darstellungen für J, g_2 u. s. w. zu gewinnen.

Von jeder systematischen Entwicklung müssen wir fast durchgehends absehen; es muss in diesem Betracht genügen, jeweils auf die bezüglichen Entwicklungen in den schon in der Einleitung p. 1 genannten Schriften von Schwarz und Halphen hinzuweisen. Wir citieren dieselben kurz als S. und H. unter Angabe der Seitenzahl.

§ 1. Abweichungen in der Bezeichnungsweise.

Um einen bequemen Gebrauch der soeben genannten Schriften zu ermöglichen, machen wir vorab auf einige wenige Abweichungen unserer eigenen Bezeichnungsweise von derjenigen aufmerksam, welche von Weierstrass in der Theorie der elliptischen Functionen gebraucht wurde. Ein erster Unterschied liegt bei der Bezeichnung der *Perioden* vor. Ist u das Integral erster Gattung, so gewinnt Weierstrass die beiden von ihm durch ω und ω' bezeichneten Grössen, indem du auf zwei verschiedene Weisen von einem Verzweigungspunkt zu einem anderen integriert wird, eine durchaus auch in der älteren Theorie

übliche Massnahme. Inzwischen entstehen auf dem Wege nur erst Periodenhälften, wie wir oben im zweiten Kapitel gelernt haben. Der eingehendere Vergleich zeigt dabei des näheren, dass die Beziehung zwischen den beiderlei Bezeichnungsweisen diese ist

$$\omega_1 = 2\omega', \quad \omega_2 = 2\omega. \tag{1}$$

Eine ganz entsprechende Abweichung findet bei der Bezeichnung der Perioden des Integrals zweiter Gattung statt. Wir haben hier die Beziehung

$$\eta_1 = 2\eta', \quad \eta_2 = 2\eta, \tag{2}$$

wo η_1, η_2 die bereits im vorigen Kapitel (p. 116 u. f.) gebrauchte Bezeichnung, η, η' aber die Benennung der Perioden des Integrals zweiter Gattung nach Weierstrass ist.

Für den *Quotienten der Perioden* ω_1, ω_2 hat sich in den älteren Arbeiten über Modulfunctionen die Hermite'sche Bezeichnung

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{3}$$

eingebürgert. Wir halten hier an derselben um so lieber fest, als sie der bezüglichen Bezeichnung der Ikosaeder-Irrationalität genau nachgebildet ist. In Weierstrass' Theorie ist

$$\frac{\omega'}{\omega} = \tau,$$

so dass unser ω und das Weierstrass'sche τ geradezu die nämliche Grösse bezeichnen.

Weiterhin spielt die Exponentialgrösse

$$r = e^{2\pi i\omega} \tag{4}$$

als *Entwicklungsgrösse* eine wichtige Rolle. Auch sie findet sich bei Weierstrass nicht in dieser Form; vielmehr ist dort geschrieben:

$$e^{\pi i\tau} = h,$$

welche Grösse man sonst im Anschluss an Jacobi mit q bezeichnet. Man hat also einfach

$$r = h^2 = q^2, \tag{5}$$

so dass neben der Bezeichnung Jacobi's und Weierstrass' hier noch eine dritte eingeführt wird. Aber man wird alsbald erkennen, dass die analytischen Darstellungen gerade derjenigen Grössen, welche Weierstrass gegenüber Jacobi in die Theorie eingeführt hat, durchaus in *ganzen* Potenzen von r geschehen. Es liegt also von vornherein gar keine Nötigung vor, für die in Rede stehenden Entwicklungen statt des r etwa dessen Quadratwurzel einzuführen. Im Gegenteil wird man später sehen, dass in gewissem Sinne für einen Teil von Weierstrass'

Theorie der Gebrauch der Entwicklungsgrösse r der allein consequente ist, gerade wie alsdann für Jacobi's Theorie die Verwendung der Grösse q als den Verhältnissen am meisten angepasst erscheint.

Abgesehen von den hiermit namhaft gemachten Punkten konnten wir an allen Bezeichnungsweisen und Voraussetzungen der Schwarz'schen Schrift festhalten.

§ 2. Die Functionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$. Doppeltperiodische Functionen.

Das Weierstrass'sche Normalintegral erster Gattung (I, 1, § 15) wollen wir auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche des Kap. 2 dadurch des näheren fixieren, dass wir als untere Grenze $y = \infty$ ansetzen:

$$u = \int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}. \tag{1}$$

Bei Abänderung des Weges zwischen ∞ und einer bestimmten oberen Grenze y kann dieser Integralwert zufolge der Entwicklungen des Kap. 2 um jedes ganzzahlige Multiplum der Perioden etwa $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ modificiert werden.

Die algebraischen Functionen der zweiblättrigen Fläche sind rational in y und $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$, d. i. in der Form darstellbar:

$$R\left(y, \sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}\right), \tag{2}$$

und es entspringt nun die Theorie der doppeltperiodischen Functionen aus der Aufgabe, die gedachten Functionen (2) in ihrer Abhängigkeit von u zu untersuchen. Sollen wir diese Aufgabe im Riemann'schen Sinne interpretieren, so bedeutet sie, dass wir für das Studium der Functionen (2) an Stelle der zweiblättrigen y-Fläche die complexe u-Ebene zu Grunde legen, und es ist alsdann zu allererst festzustellen, in welcher Weise sich jene Fläche vermöge (1) conform auf die u-Ebene abbildet.

Um solches zu untersuchen, hat man die Fläche durch zwei Querschnitte, die wir etwa längs der Periodenwege unserer Ausgangszweige ω_1, ω_2 ausgeführt denken, in eine einfach zusammenhängende zu zerlegen, welche sich alsdann auf einen gleichfalls einfach zusammenhängenden überall im Endlichen gelegenen Bereich der u-Ebene überträgt. Durch zweckmässige Wahl für die „Gestalt" der Querschnitte kann man erreichen, *dass dieser Bereich das Innere eines geradlinigen Parallelogramms ist, dessen Ecken bei* u_0, $u_0 + \omega_1$, $u_0 + \omega_2$, $u_0 + \omega_1 + \omega_2$ *gelegen sind**).

*) Man findet diese Abbildung in ausführlicher Weise entwickelt in Thomae, *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Ver-*

Das Integral u ist als Function des Ortes in der unzerschnittenen Riemann'schen Fläche unendlich vieldeutig und jeder „Zweig" u' dieser Function ist in einem ersten u, wie wir schon bemerkten, in der Form:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \tag{3}$$

darstellbar. Wir gewinnen den Satz: *Die unendlich vielen Zweige von* $u(y, \sqrt{4y^3 - g_2y - g_3})$ *bilden die Riemann'sche Fläche auf unendlich viele congruente Parallelogramme ab, welche in ihrer Gesamtheit die* u*-Ebene lückenlos und vollständig bedecken.* Wir wollen diese Parallelogrammteilung der u-Ebene noch so verschieben, dass u_0 insbesondere der Nullpunkt $u = 0$ wird (cf. Fig. 37). Auch dann können wir noch sagen: *Jedes einzelne dieser Parallelogramme, die wir fortan Periodenparallelogramme nennen, ist wechselweise eindeutig auf die Riemann'sche Fläche bezogen.* Von je zwei gegenüberliegenden Seiten des einzelnen Parallelogramms muss man indessen dabei immer nur eine als demselben zugehörig betrachten*).

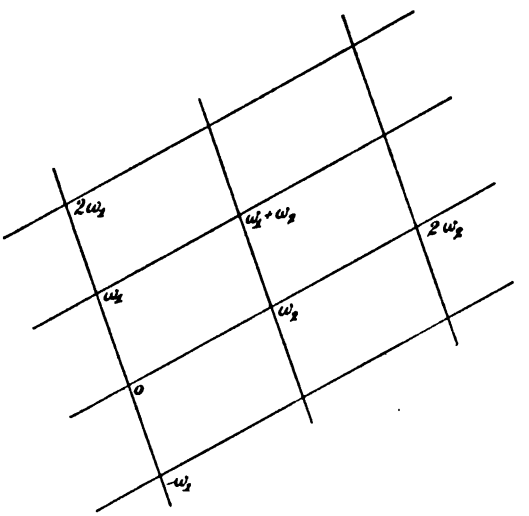


Fig. 37.

Aus der *einfachen* Bedeckung der u-Ebene mit Periodenparallelogrammen entspringt jetzt durch einen schon in Kap. 3 geübten Schluss der Satz, dass die Functionen (2), in Abhängigkeit von u gedeutet, *zu eindeutigen Functionen dieses Argumentes werden.* Sie bleiben unverändert, falls man u um ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von ω_1 und ω_2 vermehrt; eben darum nennt man die in Rede stehenden Grössen *doppeltperiodische Functionen von* u. Im einzelnen Periodenparallelogramm nimmt eine doppeltperiodische Function *jeden complexen Wert eine gleiche Anzahl von Malen an, weil* (2) *dies auf der Riemann'schen*

änderlichen (Halle 1873) pag. 104 u. f. oder auch in Königsberger, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen* (Sechzehnte Vorles.) (Leipzig 1874).

*) Man überlege sich, wie sich hier die Ebenenteilungen der s-Functionen zweiter Art einordnen (p. 106, 107). Überhaupt ist es eine sehr nützliche Übung, die hier in Rede stehende conforme Abbildung mit den in Kap. 3 discutierten in Vergleich zu ziehen.

Fläche thut. Ist diese Anzahl n, so sprechen wir von einer *doppeltperiodischen Function n^{ten} Grades.*

Eine doppeltperiodische Function ersten Grades giebt es nicht; eine solche vom zweiten Grade ist z. B. y, eine solche vom dritten endlich $\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$, welche beiden Functionen wir in Abhängigkeit von u so schreiben:

$$(4) \qquad \begin{aligned} y &= \wp(u), \\ \sqrt{4y^2 - g_2 y - g_3} &= \wp'(u). \end{aligned}$$

Zwischen $\wp$ und $\wp'$ bestehen dann die Relationen

$$(5) \qquad \frac{d\wp(u)}{du} = \wp'(u), \quad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

Zufolge (2) *ist jede doppeltperiodische Function rational in $\wp(u)$ und $\wp'(u)$.*

§ 3. Analytische Darstellungen für die Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$.

Man besitzt für die doppeltperiodischen Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ eine Reihe analytischer Darstellungen, die hier mitzuteilen sind. Wir beginnen mit den Entwicklungen nach ansteigenden Potenzen von u*):

$$(1) \qquad \begin{aligned} \wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \cdots \\ \wp'(u) &= -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2 \cdot 5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \frac{g_2^2}{2^3 \cdot 5^2} \cdot u^5 + \frac{3 g_2 g_3}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^7 + \cdots, \end{aligned}$$

deren Coefficienten durchgehends *ganze rationale Functionen von g_2 und g_3* sind. Aus (1) schliessen wir unter Benutzung der Sätze des § 2, dass $\wp(u)$ für $u = 0$ und also überhaupt in allen Punkten $u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, die wir die Gitterpunkte der Parallelogrammteilung nennen wollen, in zweiter Ordnung algebraisch unendlich wird. An denselben Stellen wird $\wp'(u)$ von dritter Ordnung algebraisch unendlich. Die Unstetigkeitspunkte von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ sind hiermit erschöpft. Der Convergenzkreis von (1) hat $u = 0$ zum Mittelpunkte und reicht bis an den nächsten Unstetigkeitspunkt gerade heran. Merken wir uns insbesondere noch, *dass $\wp(u)$ eine gerade, $\wp'(u)$ eine ungerade Function von u ist.*

Noch deutlicher treten die Eigenschaften von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ an deren Partialbruchentwicklungen**) zu Tage:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} \right\}, \\ \wp'(u) &= -2 \sum \frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^3}. \end{aligned}$$

*) Vgl. S. p. 10 und 11, H. p. 93.

**) Vgl. S. p. 10 und 11, H. p. 378.

Die Summen sind hier auszudehnen über alle Combinationen zweier ganzen Zahlen m_1, m_2, nur dass in der ersten Summe die Combination $m_1 = m_2 = 0$ auszulassen ist, was durch den oberen Index am Summenzeichen angedeutet sein soll. Diese Reihen convergieren für jeden endlichen Wert u unbedingt*), wobei wir freilich für einen Gitterpunkt jeweils von einem dortselbst unendlich werdenden Gliede der einzelnen Entwicklung (2) absehen müssen. Wir folgern weiter aus (2), *dass $\wp$ und $\wp'$ homogene Functionen* $(-2)^{\text{ter}}$ *bez.* $(-3)^{\text{ter}}$ *Dimension der drei Argumente u, ω_1, ω_2 sind,* was man selbstverständlich ebenso gut auch aus der ursprünglichen Definition unserer Functionen hätte ablesen können. Schreiben wir, um die Abhängigkeit auch von ω_1, ω_2 hervorzuheben, ausführlich

$$\wp(u \mid \omega_1, \omega_2), \quad \wp'(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

so können doch diese Grössen wegen (1) nur insoweit von den Perioden abhängen, als sie durch die Modulformen g_2, g_3 bereits völlig bestimmt sind. Sie werden also insofern das Verhalten dieser Modulformen teilen, *als auch sie unverändert bleiben, falls man auf die Perioden eine homogene Modulsubstitution ausübt.* Wir haben also unter α, β, γ, δ irgend vier ganze Zahlen der Determinante 1 verstanden:

$$\wp(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \wp(u \mid \omega_1, \omega_2) \tag{3}$$

und entsprechend für $\wp'$. Übrigens folgen diese Formeln auch aus (2).

Letzten Endes führen wir noch die trigonometrischen Reihen **) an:

$$\begin{aligned}
\wp(u) &= -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{\omega_2}} - \frac{8\pi^2}{\omega_2^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m r^m}{1 - r^m} \cos \frac{2m\pi u}{\omega_2}, \\
\wp'(u) &= -2\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^3 \cdot \frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi u}{\omega_2}}{\sin^2 \frac{\pi u}{\omega_2}} + \frac{16\pi^3}{\omega_2^3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 r^m}{1 - r^m} \sin \frac{2m\pi u}{\omega_2},
\end{aligned} \tag{4}$$

in welchen Ausdrücken die Perioden nicht mehr symmetrisch enthalten sind.

---

*) Man vgl. darüber Eisenstein's bereits p. 24 genannte Abhandlung, die für die Einführung der doppeltperiodischen Functionen vermittelst der Partialbruchentwicklungen fundamental ist. Dortselbst finden sich in der That bereits die Grössen $\wp$, $\wp'$, g_2, g_3, e_1, e_2, e_3 der Weierstrass'schen Theorie durch ihre doppelt unendlichen Reihen definiert vor. Formel (5) p. 285 in Eisenstein's Mathematischen Abhandlungen ist geradezu identisch mit der algebraischen Relation (5) § 2 des Textes.

**) Vgl. H. p. 426.

§ 4. Doppelt unendliche Reihen für g_2 und g_3.

Durch elementare Rechnung gelingt es, die soeben mitgeteilte Entwicklung (2) von $\wp(u)$ in eine Reihe nach ansteigenden Potenzen von u umzusetzen*). Dieselbe heisst:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 2u\sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^3} + 3u^2 \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4} + \cdots$$
$$+ (n+1)u^n \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{n+2}} + \cdots .$$

Der Vergleich der Coefficienten von u^2 und u^4 mit den entsprechenden in (1) § 3 ergiebt jetzt *für die Modulformen* g_2, g_3 *die nachfolgenden doppelt unendlichen Reihen:*

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{60} g_2(\omega_1, \omega_2) &= \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4}, \\ \frac{1}{140} g_3(\omega_1, \omega_2) &= \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}, \end{aligned}$$

in welchen die Summenzeichen dieselbe Bedeutung haben, wie in (2) § 3. Nach Eisenstein's Untersuchungen convergieren diese Entwicklungen unbedingt für alle diejenigen Werte der Perioden ω_1, ω_2, deren Quotient ω nicht reell ist. Sie convergieren also insbesondere für solche ω_1, ω_2, welche einen dem Innern der positiven Halbebene angehörenden Quotienten ω geben, und allein für diesen Bereich ist es uns ja um Darstellungen der Modulformen g_2, g_3 zu thun.

Einige der Haupteigenschaften von g_2 und g_3 treten in (1) unmittelbar in Evidenz, so z. B. dass sie homogen in der $(-4)^{\text{ten}}$ bez. $(-6)^{\text{ten}}$ Dimension in ω_1, ω_2 sind, ferner dass sie gegenüber allen homogenen Modulsubstitutionen invariant sind; denn in der That bewirkt die Ausübung einer solchen nur eine Umänderung in der Reihenfolge der Glieder in (1).

Bei der Leichtigkeit, mit welcher die Reihen (1) und ähnlich gebildete Entwicklungen ihren Charakter als Modulformen offenbaren, lag es nahe, von ihnen aus den Eingang in die Betrachtung von g_2 und g_3 zu suchen, indem man diese Grössen geradezu durch (1) definierte. Es ist damit der Ansatz zu einer von der Theorie der doppeltperiodischen Functionen unabhängigen Entwicklung der Modulformen gegeben, der in der That durch Hrn. Hurwitz zur Durchbildung gelangt ist**). Es wird an genannter Stelle auf dieser Grund-

*) Vgl. H. p. 366.

**) Man sehe Hurwitz, *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe*, Math. Ann. Bd. 18 p. 528 (1881).

lage zuvörderst eine Theorie derjenigen Modulformen entwickelt, die zur Gesamtgruppe der Modulsubstitutionen gehören. Aber auch die directe Bildung von Modulformen für Untergruppen aus Modulsubstitutionen erscheint möglich, worüber eine Andeutung in Hurwitz' Arbeit p. 560 gegeben ist*). Wir müssen uns hier mit dieser Andeutung begnügen; auch die späteren Entwicklungen führen uns leider nicht zur Wiederaufnahme dieses Gedankens zurück.

§ 5. Einfach unendliche Reihen für g_2, g_3 und die Perioden η_1, η_2.

Andere Darstellungen von g_2 und g_3 gewinnt man von (4) § 3 aus, wobei zugleich Entwicklungen für die Perioden η_1, η_2 entspringen. Entwickeln wir das in der citierten Darstellung von $\wp(u)$ auftretende Glied $\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{\omega_2}}$ in eine Reihe nach Potenzen von u, so haben wir für $\wp(u)$ die Darstellung:

$$\wp(u) - \frac{1}{u^2} = -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 + \frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4 u^2 + \frac{2}{3\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^6 u^4 + \cdots$$
$$- 8\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m r^m}{1-r^m} \cos \frac{2m\pi u}{\omega_2}.$$

Hier bilde man auch noch die zweite und vierte Ableitung und setze in den drei so entspringenden Formeln $u = 0$. Wir haben dann:

$$\left\{\wp(u) - \frac{1}{u^2}\right\}_{u=0} = -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 - 8\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m r^m}{1-r^m},$$

$$\left\{\wp''(u) - \frac{6}{u^4}\right\}_{u=0} = \frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4 + 32\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 r^m}{1-r^m},$$

$$\left\{\wp''''(u) - \frac{120}{u^6}\right\}_{u=0} = \frac{16}{7\cdot 9}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^6 - 128\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^6 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5 r^m}{1-r^m}.$$

Die nämlichen Nullwerte berechne man jetzt andrerseits von den Darstellungen (1) § 3 aus, wo sie bez. die Werte 0, $\frac{g_2}{10}$, $\frac{6g_3}{7}$ bekommen. Durch Identischsetzen der beiderseits gefundenen Werte kommen zunächst *für g_2 und g_3 die neuen Entwicklungen***)

---

*) Noch in allgemeinerer Weise ist diese „Methode der directen Bildungsweise" von Hrn. Poincaré in Anwendung gebracht worden, der sie dann überhaupt zum Fundament seiner Behandlung der Functionen mit linearen Transformationen in sich machte. Man sehe die zahlreichen seit 1881 erschienenen Abhandlungen Poincaré's in den Comptes Rendus, den Math. Ann. Bd. 19 und den Acta mathematica.

**) Cf. H. p. 446. Die Überleitung der Formeln (1) § 4 in die obigen Dar-

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 g_2 &= \frac{1}{12} + 20 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 r^m}{1-r^m}, \\ \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^6 g_3 &= \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5 r^m}{1-r^m}. \end{aligned}$$

Ferner findet sich durch Vergeich der beiden Werte für $\left\{\wp(u) - \frac{1}{u^2}\right\}_{u=0}$ eine Darstellung der Periode η_2 des Integrals zweiter Gattung, aus welcher man hernach unter Gebrauch der Legendre'schen Relation eine ebensolche für η_1 erlangt. Man kommt dabei auf:

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} \frac{3\eta_2\omega_2}{\pi^2} &= 1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m r^m}{1-r^m}, \\ \frac{3\eta_1\omega_1}{\pi^2} &= -\frac{6i\omega}{\pi} + \omega^2 - 24\omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m r^m}{1-r^m}. \end{aligned}$$

Der Convergenzbezirk aller dieser Entwicklungen (1), (2) ist der Einheitskreis der r-Ebene. Thatsächlich wird aber für jedes der positiven Halbebene angehörige ω der absolute Betrag von $r = e^{2\pi i\omega}$ kleiner als 1, während dieser Betrag für reelles ω gleich 1 ist. Für den uns allein interessierenden Bereich der positiven ω-Halbebene sind somit die Entwicklungen (1), (2) unmittelbar brauchbar. In der negativen ω-Halbebene convergieren die Reihenentwicklungen (1), (2) nicht mehr.

Der unendlich ferne Punkt der imaginären ω-Axe giebt $r = 0$ und entspricht also dem Nullpunkt der r-Ebene. Dabei giebt (1) als Grenzwert von g_2:

$$g_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^4,$$

was in der That mit (2) p. 127 in Ubereinstimmung ist.

§ 6. Productdarstellung der Discriminante Δ. Die Modulgleichung in explicirter Form.

Mit Hilfe der Relationen (2) pag. 122 können wir von den eben mitgeteilten Darstellungen der η_1, η_2 zu einer sehr wichtigen Productdarstellung für die Discriminante Δ gelangen. Formeln (2) des vorigen Paragraphen gestatten die Schreibweise:

$$\frac{6i}{\pi}\eta_2 = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1} = \frac{\partial}{\partial \omega_1}\left\{2i\pi\omega + 24\sum_{m=1}^{\infty}\log(1-r^m)\right\},$$

$$-\frac{6i}{\pi}\eta_1 = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} = \frac{\partial}{\partial \omega_2}\left\{\log \omega_2^{-12} + 2\pi i\omega + 24\sum_{m=1}^{\infty}\log(1-r^m)\right\}.$$

---

stellungen von g_2, g_3 hat Hr. Hurwitz in seiner soeben genannten Arbeit ohne Zuhilfenahme doppeltperiodischer Functionen geleistet.

Integrieren wir beide Gleichungen und combinieren sie behufs Bestimmung der Integrationsconstanten, so kommt:

$$\log \Delta = \text{const.} + \log \omega_2^{-12} + 2\pi i\omega + \sum_{m=1}^{\infty} \log (1 - r^m)^{24}.$$

Unter c einen numerischen Factor verstanden, haben wir sonach:

$$\Delta = \frac{c}{\omega_2^{12}} r \prod_{m=1}^{\infty} (1 - r^m)^{24}.$$

Die Bestimmung des Factors c geschieht durch Rückgang auf (5) pag. 129, welche Formel für $r = 0$ in erster Annäherung $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \cdot r$ als Wert von Δ ergiebt. Es ist demnach $c = (2\pi)^{12}$, und *man gewinnt als Productdarstellung der Discriminante**):

$$(1) \qquad \Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} r \prod_{m=1}^{\infty} (1 - r^m)^{24}.$$

Dieses Product giebt den Wert von Δ für jeden im Innern der positiven ω-Halbebene gelegenen Punkt ω. Dass Δ für jeden rationalen Punkt der reellen ω-Axe d. i. in den Spitzen der Moduldreiecke verschwindet, tritt in (1) ebenso unmittelbar in Evidenz, wie dass im Innern der positiven Halbebene ein Nullpunkt von Δ nicht mehr gelegen sein kann.

Aus den gewonnenen Darstellungen von g_2, g_3, Δ ergiebt sich nun auch endlich *die explicite Darstellung der Modulgleichung*, nämlich in der Form:

$$(2) \qquad J : J - 1 : 1 = \left(\frac{1}{12} + 20 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 e^{2m\pi i\omega}}{1 - e^{2m\pi i\omega}}\right)^3 : 27 \left(\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5 e^{2m\pi i\omega}}{1 - e^{2m\pi i\omega}}\right)^2 : e^{2\pi i\omega} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2m\pi i\omega})^{24}.$$

---

*) Zur Entwicklung von (1) vgl. man namentlich noch Hurwitz in Math. Ann. Bd. 18 p. 551, 552. Die fundamentale Function $\eta(\omega)$ in Dedekind's Arbeiten über elliptische Modulfunctionen (vgl. ausser der schon genannten Abhandlung in Crelle's Journ. Bd. 83 noch die *Erläuterungen zu Riemann's Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen* in Riemann's Werken p. 438) ist identisch mit $\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}} \cdot \sqrt[24]{\Delta}$.

§ 7. Die Function $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$.

Nachdem durch die vorangehenden Mitteilungen die Entwicklungen des vierten Kapitels ergänzt wurden, kommen die nun folgenden Sätze über die σ- und ϑ-Functionen erst unten im vierten Abschnitt zur Verwendung. Doch schliessen wir sie bereits hier an, um nicht späterhin noch einmal zu einem Excurse genötigt zu sein.

Wir bilden uns zuvörderst das Integral*)

$$(1)\quad Z(u) = \int \wp(u)du = -\frac{1}{u} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} \cdot u^3 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} u^5 + \cdots,$$

das sich durch die Substitution

$$\wp(u) = y, \quad du = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

sogleich als *Integral zweiter Gattung* zu erkennen giebt (cf. p. 33). Man hat demgemäss die Formeln

$$(2)\qquad Z(u + \omega_1) = Z(u) - \eta_1, \quad Z(u + \omega_2) = Z(u) - \eta_2,$$

sowie den Satz, dass $Z(u)$ in den Gitterpunkten $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ unendlich wird wie

$$-\frac{1}{u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2}.$$

Integrieren wir nochmals

$$(3)\qquad \int Z(u)du = -\log u + \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} \cdot u^4 + \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^6 + \cdots$$

und gehen dann zu

$$(4)\qquad \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = e^{-\int Z(u)\,du} = u - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u^5 - \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^7 - \cdots,$$

so haben wir eine Function erlangt, *die in den Gitterpunkten einfach verschwindet und im übrigen in der ganzen endlichen u-Ebene endlich und von Null verschieden ist.*

Die solchergestalt erhaltene Weierstrass'sche σ-Function erweist sich für die ganze Theorie der doppeltperiodischen Functionen als fundamental. Ihre wesentlichsten Eigenschaften sind die folgenden. Sie ist eine *ungerade Function ihres ersten Argumentes*:

$$(5)\qquad \sigma(-u) = -\sigma(u),$$

sie ist in ihren *drei* Argumenten u, ω_1, ω_2 *homogen in erster Dimension*:

$$(6)\qquad \sigma(vu \mid v\omega_1, v\omega_2) = v\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

*) Man beachte, dass hier, wie sogleich in (3), durch die angehängte Reihenentwicklung die Integrationsconstante jedesmal mitbestimmt ist.

sie zeigt gegenüber Modulsubstitutionen das Verhalten einer *zur Gesamtgruppe gehörenden Modulform*:

$$(7) \qquad \sigma(u \mid \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

sie nimmt endlich bei Vermehrung von u um Perioden *eine Exponentialgrösse als Factor* an, indem man in der That von (2) aus leicht die Formeln gewinnt:

$$(8) \quad \sigma(u + \omega_1) = -e^{\eta_1\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)} \cdot \sigma(u), \quad \sigma(u + \omega_2) = -e^{\eta_2\left(u + \frac{\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u),$$

von denen man unter Anwendung der Legendre'schen Relation zu der allgemeineren aufsteigt*):

$$(9) \qquad \sigma(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) =$$
$$(-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} \cdot e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u).$$

§ 8. Productdarstellung der σ-Function.

An analytischen Darstellungen der σ-Function haben wir soeben bereits in (4) § 7 die Reihe nach positiven Potenzen von u kennen gelernt. Dieselbe convergiert für alle endlichen Werte von u, sofern der Quotient ω der Perioden eine nicht-reelle Grösse ist. Eine fundamentale Darstellung in Gestalt eines doppelt-unendlichen Productes sehe man in S. p. 5 Formel (1) nach. Wir überspringen dieselbe, da sie weiterhin nicht zur Verwendung kommt. Dagegen ist für uns die folgende Productdarstellung**) wichtig:

$$(1) \qquad \sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_2}{\pi} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(m\omega - \frac{u}{\omega_2}\right)\pi \cdot \sin\left(m\omega + \frac{u}{\omega_2}\right)\pi}{\sin^2 m\omega\pi}.$$

Unter Gebrauch der Bezeichnungen

$$e^{2\pi i\omega} = r, \quad e^{\frac{2\pi i u}{\omega_2}} = z$$

nimmt diese Entwicklung auch noch die anderen Formen an:

$$(2) \qquad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - 2r^m \cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + r^{2m}}{(1 - r^m)^2},$$

$$(3) \qquad \sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}{2i} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - r^m z^{-1}}{1 - r^m} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - r^m z}{1 - r^m}.$$

*) Man vgl. hierzu durchweg S. p. 5 u. f., H. Kap. 6.

**) Cf. S. p. 8, H. p. 400.

§ 9. Darstellung doppeltperiodischer Functionen durch $\sigma(u)$.

Eine wichtige Verwendung findet die σ-Function bei der Darstellung doppeltperiodischer Functionen n^{ten} Grades*). Sei $\varphi(u)$ eine solche, deren n Nullpunkte in einem ersten Periodenparallelogramme bei $u = a_1, a_2, \cdots a_n$ gelegen sind, während die n Unstetigkeitspunkte in dem nämlichen Parallelogramm $u = b_1, b_2, \cdots b_n$ sind. Es gilt alsdann zufolge des Abel'schen Theorems**) zwischen diesen Werten von u die Relation

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 , \tag{1}$$

wo m_1, m_2 zwei bestimmte ganze Zahlen sind. Um jetzt eine Darstellung von $\varphi(u)$ durch die σ-Function zu leisten, bilde man den Quotienten

$$\frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}.$$

Derselbe stellt eine eindeutige Function von u dar, welche die Null- und Unstetigkeitspunkte genau mit $\varphi(u)$ gemein hat. Bei Vermehrung des u um Perioden verhält sich der Quotient gerade so, wie die Exponentialgrösse

$$e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)u},$$

wie aus (8) § 7 folgt. Aber diese Exponentialgrösse wird in der ganzen endlichen u-Ebene nirgends Null oder unendlich. *Deshalb stellt uns die Verbindung*

$$e^{-(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)u} \cdot \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}$$

eine doppeltperiodische Function mit den Null- und Unstetigkeitsstellen von $\varphi(u)$ vor. Nach bekannten Sätzen kann dieselbe von $\varphi(u)$ nur mehr um einen von u unabhängigen Factor abweichen, so dass wir für $\varphi(u)$ die Darstellung gewinnen:

$$\varphi(u) = C \cdot e^{-(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)u} \cdot \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}. \tag{2}$$

Beispiele für diese allgemeine Formel sind die Darstellungen***) von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$. Verschwindet $\wp(u)$ für $u = a$, so hat man

$$\wp(u) = -\frac{\sigma(u-a)\cdot\sigma(u+a)}{\sigma^2(a)\cdot\sigma^2(u)},$$

$$\wp'(u) = -\frac{2\,\sigma\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\sigma\left(u-\frac{\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma\left(u+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cdot\sigma^3(u)}, \tag{3}$$

*) Cf. S. p. 15, H. p. 209 u. f. **) Man sehe z. B. H. p. 215.
***) Cf. H. p. 196.

wie man auch auf Grund der nämlichen Schlussweise leicht

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u-v)\cdot\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(v)} \tag{4}$$

nachweist*).

§ 10. Die Functionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2)$.

Besonders folgenreich wird für uns die Betrachtung desjenigen Falles der Formel (2) § 9, dass alle n Nullpunkte von $\varphi(u)$ in einen einzigen $u = a$ und gleichfalls alle n Unstetigkeitspunkte in einen $u = b$ concidieren. Wir setzen dann insbesondere noch voraus, dass $u = b$ der Nullpunkt der u-Ebene sei, so dass zufolge (1) § 9

$$a = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \tag{1}$$

wird, mit *ganzen* Zahlen λ, μ. Wir können hier λ und μ auf die Werte $\lambda, \mu = 0, 1, 2, \cdots (n-1)$ eingeschränkt denken. Da überdies noch die Combination $\lambda = \mu = 0$ $\varphi(u)$ zu einer von u unabhängigen Constanten macht und also nicht weiter in Betracht kommt, so bleiben noch (n^2-1) brauchbare Combinationen λ, μ über. Ihnen entsprechen ebenso viele Functionen, die wir

$$\varphi_{\lambda,\mu}(u) = C_{\lambda,\mu}\, e^{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)u}\cdot\frac{\sigma^n\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)}{\sigma^n(u)}$$

schreiben.

Hier ist es nun sehr wichtig, *dass auch die n^{te} Wurzel aus einer beliebigen dieser Grössen noch eine eindeutige Function von u ist:*

$$\tau_{\lambda,\mu}(u) = \sqrt[n]{\varphi_{\lambda,\mu}(u)} = c_{\lambda,\mu}\cdot e^{\frac{\lambda\eta_1+\mu\eta_2}{n}\cdot u}\cdot\frac{\sigma\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)}{\sigma(u)}. \tag{2}$$

Diese Function wird im Parallelogramme nur einmal Null und einmal unendlich, aber sie ändert sich bei Vermehrung von u um Perioden, allgemein gesagt, um eine multiplicative n^{te} Einheitswurzel. *Es findet sich nämlich ohne Mühe auf Grund von* (9) § 7:

$$\tau_{\lambda,\mu}(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = e^{\frac{2i\pi}{n}(m_1\mu - m_2\lambda)}\cdot\tau_{\lambda,\mu}(u). \tag{3}$$

Die Constante $c_{\lambda,\mu}$, welche für jede unserer (n^2-1) Functionen in besonderer Weise gewählt werden kann, bleibt hier völlig ausser Betracht. Immerhin wollen wir doch schon beiläufig mitteilen, dass sie in einem späteren Abschnitt in eigentümlicher Weise bestimmt wird. Sie ist nur von u unabhängig, kann aber ganz wohl noch eine Function der Perioden sein. Um späterhin ein möglichst einfaches

*) Aus (3) folgert man leicht $e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$.

Verhalten unserer Functionen gegenüber den Modulsubstitutionen zu erzwingen, wird sich die Einführung der folgenden Grösse als zweckmässig erweisen*):

$$(4) \qquad \sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2) = e^{\frac{\lambda\eta_1 + \mu\eta_2}{n}\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2n}\right)} \sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right).$$

Es ist dann insbesondere $\sigma_{0,0}(u) = \sigma(u)$ und man hat:

$$(5) \qquad \tau_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2)}{\sigma(u \mid \omega_1 \omega_2)}.$$

Ohne irgend auf die Bedeutung dieser Wahl für $c_{\lambda,\mu}$ hier einzugehen, wollen wir doch die durch (4) definierten Grössen im besonderen Falle $n = 2$ noch näher verfolgen, um auf die Weise den Übergang zu den Jacobi'schen ϑ-Functionen zu finden.

§ 11. Übergang zu den ϑ-Functionen.

Für $n = 2$ haben wir unter Einschluss von $\sigma_{0,0}(u) = \sigma(u)$ im ganzen vier Functionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$, für welche wir aus (2) § 8 die nachstehenden Productdarstellungen gewinnen**):

$$(1) \qquad \begin{aligned}
\sigma(u) &= \frac{\omega_2}{\pi} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \sin\frac{\pi u}{\omega_2} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - 2r^m \cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + r^{2m}\right)}{\prod_{m=1}^{\infty}(1 - r^m)^2}, \\
\sigma_{10}(u) &= \frac{\omega_2}{2i\pi} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - 2r^{\frac{2m-1}{2}} \cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + r^{2m-1}\right)}{r^{\frac{1}{8}}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - r^m)^2}, \\
\sigma_{01}(u) &= \frac{\omega_2}{\pi} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \cos\frac{\pi u}{\omega_2} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + 2r^m \cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + r^{2m}\right)}{\prod_{m=1}^{\infty}(1 - r^m)^2}, \\
\sigma_{11}(u) &= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega_2}{2\pi} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + 2r^{\frac{2m-1}{2}} \cos\frac{2\pi u}{\omega_2} + r^{2m-1}\right)}{r^{\frac{1}{8}}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - r^m)^2}.
\end{aligned}$$

*) In dieser Form hat Klein die $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ im ersten Abschnitt der Abhandlung: *Über die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der n^{ten} Stufe* (Abh. der Kgl. Sächs. Ges. d. W. Bd. 13 Nr. 4, 1885) gegeben.

**) Die von Weierstrass aufgestellten Functionen $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$, $\sigma_3(u)$ sind

Die hier auftretenden Producte lassen jetzt eine elegante Reihenentwicklung zu, wenn wir auf eine von Jacobi*) aufgestellte identische Gleichung zurückgehen:

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+r^{\frac{2m-1}{2}}z\right)\left(1+r^{\frac{2m-1}{2}}z^{-1}\right)=\frac{1+\sum_{m=1}^{\infty}r^{\frac{m^2}{2}}(z^m+z^{-m})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-r^m)}.$$

In der That setzen sich die bei $\sigma_{10}(u)$ und $\sigma_{11}(u)$ auftretenden Producte auf Grund dieser Gleichung direct in Reihen um und aus diesen leiten wir dann für die beiden anderen Producte entsprechende Reihen ab. *Die dergestalt zu Tage tretenden Reihen sind nun direct die Jacobi'schen ϑ-Functionen:*

$$\begin{aligned}
\vartheta_0\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=1-2r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{2u\pi}{\omega_2}+2r^{\frac{4}{2}}\cos\frac{4u\pi}{\omega_2}-2r^{\frac{9}{2}}\cos\frac{6u\pi}{\omega_2}+\cdots,\\
\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=2r^{\frac{1}{8}}\sin\frac{\pi u}{\omega_2}-2r^{\frac{9}{8}}\sin\frac{3\pi u}{\omega_2}+2r^{\frac{25}{8}}\sin\frac{5\pi u}{\omega_2}-\cdots,\\
\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=2r^{\frac{1}{8}}\cos\frac{\pi u}{\omega_2}+2r^{\frac{9}{8}}\cos\frac{3\pi u}{\omega_2}+2r^{\frac{25}{8}}\cos\frac{5\pi u}{\omega_2}+\cdots,\\
\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=1+2r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{2u\pi}{\omega_2}+2r^{\frac{4}{2}}\cos\frac{4u\pi}{\omega_2}+2r^{\frac{9}{2}}\cos\frac{6u\pi}{\omega_2}+\cdots.
\end{aligned}\tag{2}$$

Indem man die in diesen Reihen auftretenden trigonometrischen Functionen durch ihre bezüglichen Ausdrücke in der Exponentialgrösse ersetzt, nehmen diese Reihenentwicklungen die andere vielfach zur Verwendung kommende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{m^2\omega\pi i+m\left(\frac{2u}{\omega_2}-1\right)\pi i},\\
\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\omega\pi i+\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2u}{\omega_2}-1\right)\pi i},\\
\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\omega\pi i+\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{2u}{\omega_2}\pi i},\\
\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{m^2\omega\pi i+m\cdot\frac{2u}{\omega_2}\pi i}.
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\sigma_1(u)=\frac{\sigma_{01}(u)}{\sigma_{01}},\quad \sigma_2(u)=\frac{\sigma_{11}(u)}{\sigma_{11}},\quad \sigma_3(u)=\frac{\sigma_{10}(u)}{\sigma_{10}},$$

wenn wir allgemein mit $\sigma_{\lambda,\mu}$ den Wert von $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ für $u=0$ verstehen. Man vgl. übrigens S. p. 36 und H. p. 188.

*) Man sehe „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" (Königsberg, 1829) Artikel 64.

Indem wir hier die auf den linken Seiten der letzten Formeln für die Reihen eingeführte Bezeichnungsweise benutzen, kommt unter Gebrauch der p. 154 für die Discriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ aufgestellten Productentwicklung aus (1) folgende *Beziehung zwischen Jacobi's ϑ-Functionen und den zu $n = 2$ gehörenden* $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$:

$$
\begin{aligned}
\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2) &= \frac{e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\sigma_{10}(u \mid \omega_1, \omega_2) &= \frac{-ie^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_0\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\sigma_{01}(u \mid \omega_1, \omega_2) &= \frac{-e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_2\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\sigma_{11}(u \mid \omega_1, \omega_2) &= \frac{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Die ϑ-Functionen sind entgegen den $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ von nullter Dimension in u, ω_1, ω_2; sie enthalten auch die Perioden nicht mehr wie diese symmetrisch, verhalten sich vielmehr besonders einfach gegen ω_2, indem sie entweder geradezu um ω_2 periodisch sind oder bei Vermehrung von u um ω_2 nur das Zeichen wechseln. Im einzelnen ist das Verhalten der ϑ bei Vermehrung von u um ω_1 und ω_2 durch das Formelsystem zum Ausdruck gebracht*):

$$
\begin{aligned}
\vartheta_0\left(\frac{\pi u}{\omega_2} + \omega, r\right) &= -e^{-\left(\frac{2u}{\omega_2} + \omega\right)\pi i} \vartheta_0\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2} + \omega, r\right) &= -e^{-\left(\frac{2u}{\omega_2} + \omega\right)\pi i} \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{\omega_2} + \omega, r\right) &= e^{-\left(\frac{2u}{\omega_2} + \omega\right)\pi i} \vartheta_2\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2} + \omega, r\right) &= e^{-\left(\frac{2u}{\omega_2} + \omega\right)\pi i} \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right),
\end{aligned} \tag{5}
$$

*) Cf. S. p. 44, 45 und H. p. 254.

$$
\begin{aligned}
\vartheta_0\left(\frac{\pi u}{\omega_2}+1, r\right) &= \quad \vartheta_0\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}+1, r\right) &= -\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{\omega_2}+1, r\right) &= -\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right), \\
\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2}+1, r\right) &= \quad \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{\omega_2}, r\right).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Die grosse Bedeutung der ϑ-Functionen ist in der ausserordentlichen Eleganz ihrer Reihenentwicklungen (2) begründet, welche eben dieser ihrer Einfachheit wegen künftighin bei den verschiedensten Gelegenheiten zu brauchen sind. Solches wird insbesondere im vierten Abschnitte der Fall sein.

Zweiter Abschnitt.

Behandlung des gruppentheoretischen Grundproblems.

Erstes Kapitel.

Von den linearen Substitutionen einer Variabelen und ihrer geometrischen Deutung.

Im vierten Kapitel des voraufgehenden Abschnitts hatten wir die beiden Probleme angekündigt, deren Behandlung die nun folgenden Abschnitte gewidmet sein sollen. Unter diesen beiden Problemen verlangt das zweite, functionentheoretische die voraufgehende Erledigung des ersten, gruppentheoretischen. Beginnen wir also mit diesem und versuchen, *die Untergruppen der Modulgruppe aufzufinden und zu untersuchen.*

Die Modulsubstitutionen waren specielle Beispiele linear-gebrochener Substitutionen einer Variabelen. Wir haben schon oben gesehen, dass alle solche Substitutionen geometrisch zu den als *Kreisverwandtschaften* bezeichneten conformen Abbildungen hinführen. Für die künftigen Zwecke ist indes mit dieser Angabe die Lehre von der geometrischen Bedeutung der linear-gebrochenen Substitutionen noch nicht hinreichend durchgebildet, und wir gehen daher vorerst daran, in diesem Betracht die nötige Ergänzung zu schaffen. Unsere Betrachtung wird leicht verständlicher Weise zu den Entwicklungen im dritten Kapitel des vorigen Abschnitts mannigfache Beziehungspunkte darbieten.

§ 1. Arteinteilung der linearen Substitutionen einer Veränderlichen.

Indem wir unter z eine complexe Variabele verstehen, sei uns in

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

eine allgemeine lineare Substitution vorgelegt. Wir werden dabei fortan z und z' (und dadurch werden unsere neuen Betrachtungen ihr Charakte-

ristisches erhalten) stets *in derselben complexen Ebene* deuten. Diese Ebene ist dann vermöge (1) ein-eindeutig auf sich selbst bezogen. Es lassen sich dabei *zwei* Lagen von z ausfindig machen, für welche der zugeordnete Punkt z' eben wieder mit z zusammenfällt; setzt man nämlich in (1) $z' = z$, so kommt für z die quadratische Gleichung:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

deren beide Wurzeln die gemeinten beiden Werte von z ergeben. Nennen wir diese sich selbst entsprechenden Punkte Fixpunkte, so folgt der Satz: *Die Substitution* (1) *besitzt zwei Fixpunkte, nämlich:*

$$z_1, z_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}. \tag{2}$$

Jetzt sondern wir die Substitutionen (1) in *zwei Arten*, deren erste die Substitutionen *mit getrennt liegenden Fixpunkten*, deren zweite diejenigen *mit zusammenfallenden Fixpunkten* umfasst. Eine Substitution der zweiten Art, durch die Bedingung

$$(a - d)^2 + 4bc = 0$$

charakterisiert, soll auch eine *parabolische* Substitution heissen.

Die Substitutionen der ersten Art d. i. diejenigen mit getrennt liegenden Fixpunkten verteilen wir noch auf Unterarten. Es ist $\frac{z' - z_1}{z' - z_2}$ eine lineare Function von z, die für $z = z_1$ verschwindet und für $z = z_2$ unendlich wird. Demgemäss muss sich Substitution (1) auf die Form bringen lassen:

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = k \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{3}$$

und man berechnet in der That sehr leicht für den hier auftretenden Factor k die Form:

$$k = \frac{(a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc})^2}{4(ad - bc)}.$$

Sei jetzt der absolute Betrag von k mit $\varkappa$ bezeichnet, so schreiben wir $k = \varkappa \cdot e^{\vartheta i}$ und sondern unsere Substitutionen mit getrennt liegenden Fixpunkten noch weiter in folgende drei Unterarten:

I. In eine erste Unterart fassen wir die Substitutionen mit $\vartheta = 0$ zusammen und benennen sie als *hyperbolische* Substitutionen. Bei ihnen ist sonach $k = \varkappa$ eine reelle positive Zahl:

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = \varkappa \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

II. Die zweite Unterart bestehe aus den Substitutionen mit $\varkappa = 1$, für welche demnach k eine complexe Zahl vom absoluten Betrage 1 ist:

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = e^{\vartheta i} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Substitutionen dieser Form nennen wir weiterhin *elliptische**).

III. Endlich sollen Substitutionen, für welche zugleich $\varkappa \gtrless 1$ und ϑ von Null verschieden ist, *loxodromische* heissen. Es ist ersichtlich, dass sich jede loxodromische Substitution durch Combination einer gewissen hyperbolischen mit einer gewissen elliptischen Substitution erzielen lässt**).

§ 2. Geometrische Deutung der Substitutionen mit getrennt liegenden Fixpunkten für besondere Lage der letzteren.

Indem wir hier vorerst die Substitutionen mit getrennt liegenden Fixpunkten des näheren verfolgen, wollen wir eine geometrische Deutung derselben benutzen, welche den verschiedenen Charakter der drei soeben namhaft gemachten Unterarten sehr anschaulich macht. Den einzelnen Punkt z, dem vermöge (3) § 1 der Punkt z' entspricht, denken wir zu dem Zwecke auf einer in der complexen Ebene *continuierlich verlaufenden Bahn* in z' übergeführt. Den so von z nach z' wandernden Punkt nennen wir ζ, und zwar wollen wir seine Bahn durch die Gleichung festlegen:

$$\frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} = k^{\eta} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{1}$$

in welcher η als *reelle* Zahl von 0 bis 1 wachsen soll. Die ganze z-Ebene wird bei der durch (1) geregelten Überführung des einzelnen Punktes z in z', allgemein zu reden, eine continuierliche Formänderung erleiden, bei der ihre einzelnen Teile unter Verschiebung von ihrer Stelle sich entweder zusammenziehen oder dehnen. Immerhin wollen

---

*) Die Namen „elliptische", „parabolische", „hyperbolische" Substitutionen sind von Klein in der p. 142 genannten Arbeit über elliptische Functionen und Gleichungen fünften Grades, Math. Ann. Bd. 14 (1878), eingeführt. Es sind das übrigens Benennungen, die einer verbreiteten Ausdrucksweise der Geometrie nachgebildet sind. So z. B. spricht Steiner von elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Involutionen auf einer Geraden, je nachdem die beiden Doppelpunkte der Involution conjugiert imaginär, zusammenfallend oder drittens reell getrennt liegend sind. Des ferneren benennt man den einzelnen Punkt einer krummen Fläche als einen elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen, je nachdem die beiden in ihm an die Fläche zu legenden Haupttangenten imaginär, zusammenfallend oder reell getrennt sind. U. s. w.

**) Der Name „loxodromische Substitution", dessen Bedeutung sogleich (§ 3) mitgeteilt wird, ist von Klein in der Abhandlung *„Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie"* Math. Ann. Bd. 21 (1882) benutzt. Die loxodromischen Substitutionen kommen übrigens nur noch in den nächsten Paragraphen beiläufig in Betracht; späterhin treten sie bei den von uns anzustellenden Untersuchungen nicht mehr auf.

wir doch sagen, die Ebene *bewege* sich in sich selbst, und das Ganze unserer durch (1) festgelegten Bewegung soll uns ein Bild für die Eigenart der gerade vorliegenden Substitution (3) § 1 sein.

Um nun die „Bewegungen" der Ebene, wie sie der getroffenen Verabredung zufolge unseren drei Unterarten von Substitutionen zukommen, in einfachster Weise zu charakterisieren, gehen wir vorerst durch die Substitution $\bar{z} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ zur kreisverwandten $\bar{z}$-Ebene. Indem wir sogleich wieder den oberen Index in der Bezeichnung der complexen Variabelen fortlassen, heisst das nichts anderes, als dass wir zuvörderst die Substitutionen $z' = kz$ mit den speciell gelegenen Fixpunkten $z = 0$ und $z = \infty$ betrachten sollen. An Stelle der Gleichung (1) tritt alsdann die andere

$$\zeta = k^{\eta} \cdot z, \tag{2}$$

wobei die einzelnen Bestandteile dieser Gleichung ihre obige Bedeutung bewahrt haben.

Mögen wir nun in (2) sogleich eine *hyperbolische* Substitution vor uns haben, so ist k eine reelle positive Zahl, die wir wie oben $\varkappa$ nennen. Man sieht, dass unter dieser Voraussetzung der einzelne Punkt ζ sich auf der Geraden bewegt, die durch den Nullpunkt der z-Ebene und den bezüglichen Punkt z bestimmt ist. Auf dieser Geraden wandert ζ vom Punkte z aus entweder gegen den Nullpunkt hin oder von ihm fort, je nachdem $\varkappa < 1$ oder > 1 ist. *Das Geradenbüschel der z-Ebene durch den Nullpunkt derselben wollen wir in diesem Sinne als das System der Bahncurven für die vorliegende Bewegung bezeichnen.*

Wir geben nun noch der besonderen Vorstellung Raum, dass η in gleichmässiger Zunahme von 0 bis 1 wächst. Alsdann wird der einzelne Punkt ζ sich mit einer Geschwindigkeit auf seiner Bahncurve bewegen, die durch den absoluten Betrag von

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \zeta \cdot \log \varkappa$$

gemessen wird *und sich sonach mit dem Abstande des Punktes ζ vom Nullpunkte $z = 0$ als proportional erweist.* Nun ist also die Geschwindigkeit, mit der die wandernden Punkte die einzelne Stelle der z-Ebene passieren, für diese Stelle eine gleichbleibende; wir haben eine gleichförmige Bewegung der z-Ebene in sich vor uns, die in dem Momente angehalten wird, in welchem der von z auslaufende Punkt ζ die Endlage $\zeta = z'$ erreicht.

Neben dem System der Bahncurven führen wir jetzt noch ein zweites System von Curven ein, die einzeln überall orthogonal zu den Bahncurven verlaufen sollen. Dieses System, das wir als *das System der Niveaulinien unserer Bewegung* benennen wollen, besteht im vorliegenden Falle offenbar *aus den concentrischen Kreisen der z-Ebene*

um $z = 0$ *als Mittelpunkt.* Nach dem, was wir soeben über die Geschwindigkeit der wandernden Punkte ζ sagten, werden diese Niveaulinien ersichtlich beim Fortgang der Bewegung in einander übergehen, indem sie sich alle verengern oder erweitern, je nachdem $\varkappa < 1$ oder > 1 ist. In der durch Fig. 38 gegebenen Zeichnung ist (für den besonderen Fall $\varkappa = \frac{4}{3}$) die Anordnung so getroffen, dass die einzelne Niveaulinie

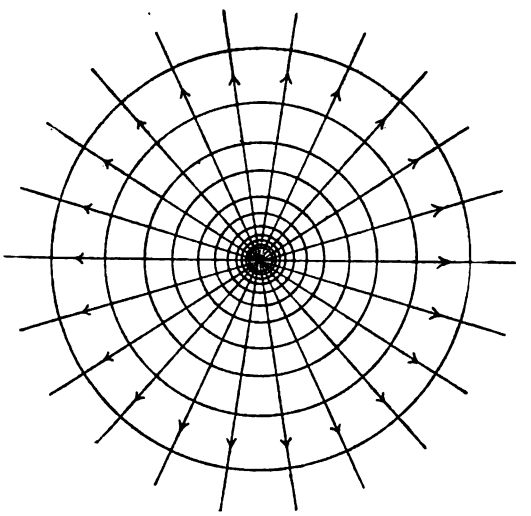


Fig. 38.

durch Ausübung der Substitution, welche wir hier betrachten, gerade in die nächstfolgende übergeführt wird. Es werden dann die Intervalle zwischen den Niveaulinien für die ganze z-Ebene ein Mass der an der einzelnen Stelle stattfindenden Geschwindigkeit der wandernden Punkte abgeben, und es müssen die Radien der in die Figur aufzunehmenden Kreise gegen den Nullpunkt hin wie die Glieder einer convergenten geometrischen Reihe abnehmen, so dass bei Annäherung an den Nullpunkt die Kreise immer näher an einander rücken und solchergestalt zu unendlich vielen den Nullpunkt umringen.

Gehen wir zur *elliptischen* Substitution $z' = e^{\vartheta i} \cdot z$, so bedeutet dieselbe in einfachster Weise *eine Drehung der z-Ebene um ihren Nullpunkt durch den Winkel ϑ.* Die beiden Curvensysteme der Fig. 38 haben ihre Rolle gerade gewechselt. *Die concentrischen Kreise um $z = 0$ sind die Bahncurven geworden, das zu diesen orthogonale Geradenbüschel durch $z = 0$ giebt die Niveaulinien, welche bei der Bewegung in einander übergehen.*

Endlich folgt für eine *loxodromische* Substitution aus (2) durch Differentiation nach η:

$$d\zeta = \zeta d\eta \cdot (\log \varkappa + \vartheta i).$$

Das Element $d\zeta$ der Bahncurve wird also gegen die Richtung des Strahles von $z = 0$ nach $z = \zeta$ um denjenigen Winkel Θ gedreht erscheinen, den wir unter positiv gerechneter Quadratwurzel aus

$$\cos\Theta = \frac{\log\varkappa}{\sqrt{\log^2\varkappa + \vartheta^2}}, \quad \sin\Theta = \frac{\vartheta}{\sqrt{\log^2\varkappa + \vartheta^2}}$$

berechnen. Die einzelne Bahncurve ist hiernach dadurch definiert, dass sie das Büschel der Geraden durch den Nullpunkt $z = 0$ unter einem constanten Winkel Θ schneidet, der ersichtlich weder 0 noch ein anderes Multiplum von $\frac{\pi}{2}$ ist. *Die Bahncurven einer loxodromischen Substitution stellen sonach ein System congruenter logarithmischer Spiralen*

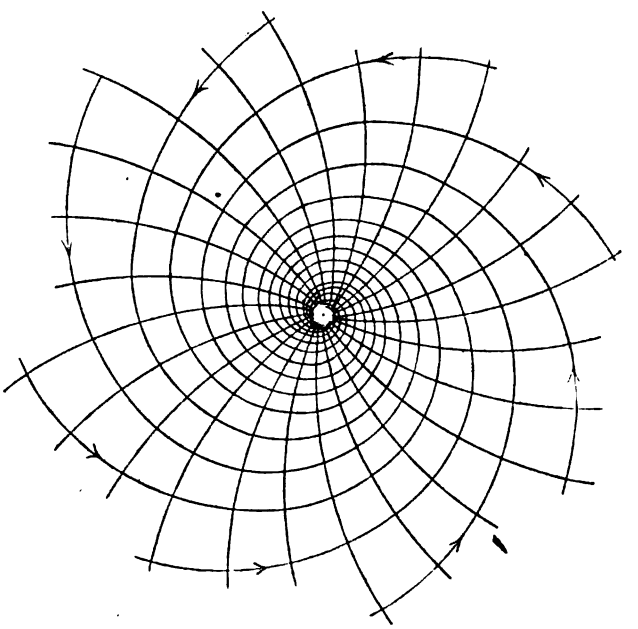


Fig. 39.

dar, wie sie in Fig. 39 für den Specialfall $\varkappa = \frac{8}{9}$, $\vartheta = \frac{\pi}{12}$ durch die mit Pfeilen versehenen Curven zur Anschauung gebracht werden*). Zum System der Bahncurven verläuft ein zweites System von logarithmischen Spiralen orthogonal. *Diese letzteren liefern uns die Niveaulinien der vorliegenden Ebenenbewegung*, und es sind insonderheit in Fig. 39 die Niveau-

*) Man vgl. über logarithmische Spiralen, sowie insbesondere über die hier in Betracht kommende Figur Holzmüller, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften u. s. w.* (Leipzig 1882) namentlich § 93 und Fig. 58.

linien wieder in solchem Abstande von einander aufgenommen, dass die einzelne unter ihnen bei Ausführung der Substitution gerade in die benachbarte übergeht.

§ 3. Projection der erhaltenen Figuren auf die Kugeloberfläche*).

In den Erörterungen des vorigen Paragraphen, die an Formel (2) p. 166 anknüpften, lag der eine Fixpunkt der Substitution im unendlich fernen Punkte der z-Ebene, was den Nachteil hat, dass die Bewegung der z-Ebene in seiner Umgebung der directen Anschauung unzugänglich bleibt. Zur Ergänzung werden wir eine stereographische Projection der z-Ebene auf die Kugeloberfläche vornehmen, ein Hilfsmittel, das wir auch für die Folge zu wiederholtem Gebrauche in Bereitschaft halten müssen. Wir lassen die Kugel im Nullpunkte die z-Ebene berühren. Alsdann kommen die beiden Fixpunkte der Substitution auf der Kugeloberfläche in diametrale Lage, und wir wollen sie als die beiden *Pole* der Kugel bezeichnen. Das Geradenbüschel durch den Nullpunkt der Ebene geht in das zu diesen Polen gehörende System der *Meridiankreise* über, während die concentrischen Kreise der Ebene um $z = 0$ die *Parallelkreise* der Kugel ergeben. Wir wählen ferner den Durchmesser der Kugel gleich Eins. Charakterisieren wir dann den einzelnen Parallelkreis durch den Winkel φ, den seine Kugelradien mit dem Radius zum Pole $z = 0$ bilden, so entfällt ein Punkt ζ der Ebene mit der Entfernung $|\zeta|$ von deren Nullpunkte auf den Parallelkreis vom Winkel

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} |\zeta|.$$

Sehen wir uns nunmehr die „Bewegungen" der Kugel in sich an, wie sie den drei Unterarten von Substitutionen entsprechen. Überaus einfach erledigt sich die *elliptische* Substitution $z' = e^{\vartheta i} \cdot z$ des vorigen Paragraphen; *sie hat die elementare Bedeutung einer Drehung der Kugel durch den Winkel ϑ um ihre die beiden Pole verbindende Axe.* Andrerseits entspricht der oben betrachteten *hyperbolischen* Substitution eine solche Bewegung der Kugel in sich, *bei der die einzelnen Punkte über die Meridiane hinwandern.* Sämtliche Punkte, die einmal einem Parallelkreise angehören, werden dabei im Fortgang der Bewegung stets wieder einen Parallelkreis bilden. Als Mass der Geschwindigkeit haben wir dabei

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{2 \log \varkappa}{|\xi| + \frac{1}{|\xi|}},$$

so dass dieselbe am „Äquator" der Kugel am grössten wird und gegen die beiden Pole hin *in gleicher Weise* bis 0 abnimmt. Wollen wir demnach

*) Cf. „Ikos." p. 29.

z. B. Fig. 38 auf die Kugeloberfläche projicieren, so werden sich gegen den Pol $z = \infty$ hin die Kreise ebenso häufen müssen, wie wir dies oben für die Umgebung von $z = 0$ geschildert haben. Für die beiderlei jetzt besprochenen Arten von Substitutionen erkennt man, dass die Rollen, die im Einzelfalle den beiden Polen der Kugel zugewiesen sind, mit einander gleichwertig sind*), so dass in der That nun dem Fixpunkte $z = \infty$ die Besonderheit genommen ist, die ihm in der z-„Ebene" anhaftete.

Man dehnt diese Bemerkungen sofort auch auf die loxodromischen Substitutionen aus, bei denen wir nicht mehr ausführlich verweilen. Bemerken wir nur noch, dass die einzelne Bahncurve in eine Linie der Kugeloberfläche übergeht, welche die Meridiane allenthalben unter dem constanten Winkel ω schneidet. Eine so definierte Linie, die sich dann gleichmässig um beide Pole unendlich oft windet, heisst eben eine *Loxodrome*. Diese Linien gaben also zur Benennung der bezüglichen Substitutionen Anlass**).

§ 4. Bahncurven und Niveaulinien bei allgemeiner Lage der Fixpunkte.

Es ist nun sehr leicht die Betrachtung der letzten Paragraphen auch für den Fall zweier beliebig im Endlichen liegenden Fixpunkte z_1, z_2 durchzuführen. Man wird entweder die im vorigen Paragraphen beschriebene Kugeloberfläche mit ihren Bahncurven und Niveaulinien derart stereographisch auf die Ebene beziehen, dass die beiden Pole gerade nach z_1 und z_2 projiciert werden, oder man kann noch einfacher an die in § 2 geschilderten ebenen Figuren anknüpfen und von dort aus auf Grund der Eigenschaft der Kreisverwandtschaft sofort zur allgemeinen Lage der Fixpunkte übergehen.

Die Bahncurven der *hyperbolischen* Substitution, welche auf der Kugel durch die Meridiane gebildet wurden, sind dabei ersichtlich in

*) Nur dass die „Richtung" der Bewegung beim einen immer gerade die entgegengesetzte ist, als beim anderen.

**) Noch erwähnen wir, dass durch Centralprojection der Kugel auf einen längs des Aquators berührenden Cylinder die z-Ebene auf dieser Cylinderfläche in einer Gestalt wiedergefunden ist, für welche *alle* in den beiden letzten Paragraphen betrachteten Substitutionen den Charakter elementarer Verschiebungen des Cylinders in sich erhalten. Den elliptischen Substitutionen entsprechen Drehungen des Cylinders um seine Axe, den hyperbolischen aber Verschiebungen desselben in Richtung der Axe, während die loxodromischen nach wie vor aus jenen zusammenzusetzen sind, so dass ihnen die Schraubenbewegungen des Cylinders in sich entsprechen.

dem Büschel der durch z_1 und z_2 hindurchlaufenden Kreise gegeben. Ein zweites Büschel von Kreisen, zum eben gemeinten allenthalben *orthogonal* verlaufend, entspringt aus den Parallelkreisen der Kugel und giebt uns die *Niveaulinien* der hyperbolischen Substitution mit den Fixpunkten z_1, z_2. In Fig. 40 ist dies zur Anschauung gebracht,

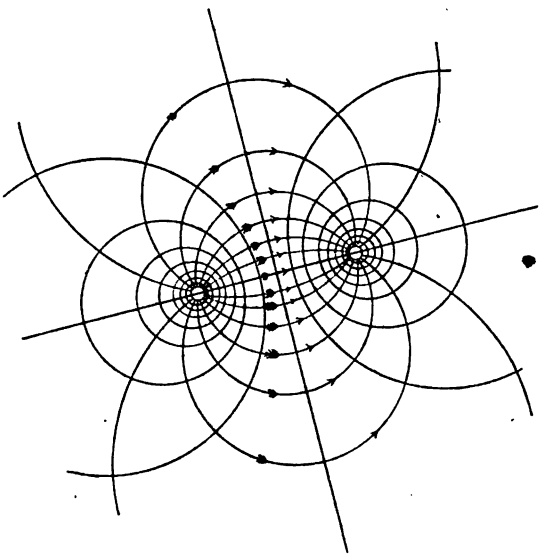


Fig. 40.

und man mag sich wieder vorstellen, dass durch einmalige Ausübung der zu Grunde liegenden hyperbolischen Substitution die einzelne in der Figur gezeichnete Niveaulinie in die nächstfolgende übergeführt wird. Der Abstand der Niveaulinien von einander ist alsdann ein Mass für die Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle, und es müssten sich die Niveaulinien der Figur, wenn man ein Gesamtbild der Bewegung haben wollte, in der nächsten Umgebung der Fixpunkte z_1, z_2 immer dichter an einander drängen.

Für die *elliptischen* Substitutionen mit den Fixpunkten z_1, z_2 haben die beiden Kreissysteme der Fig. 40 ihre Rollen gerade wieder gewechselt. Nun sind die durch z_1, z_2 hindurchlaufenden Kreise zu Niveaulinien geworden, und es müssten die in die Figur aufzunehmenden Linien dieser Art bei gewisser Reihenfolge sich in z_1 und z_2 immer unter dem Winkel ϑ treffen, wenn wir die Zeichnung wieder so einrichten wollten, dass die einzelne Niveaulinie durch einmalige Anwendung der gemeinten elliptischen Substitution in die bei der festgesetzten Reihenfolge nächstfolgende übergeht.

Endlich übertragen sich die beiden in Fig. 39 gegebenen, gegen

einander orthogonalen Spiralensysteme einer *loxodromischen* Substitution in zwei gleichfalls *gegen einander orthogonale Systeme von Doppelspiralen**), deren einzelne sich um jeden der beiden Fixpunkte z_1, z_2 unendlich oft

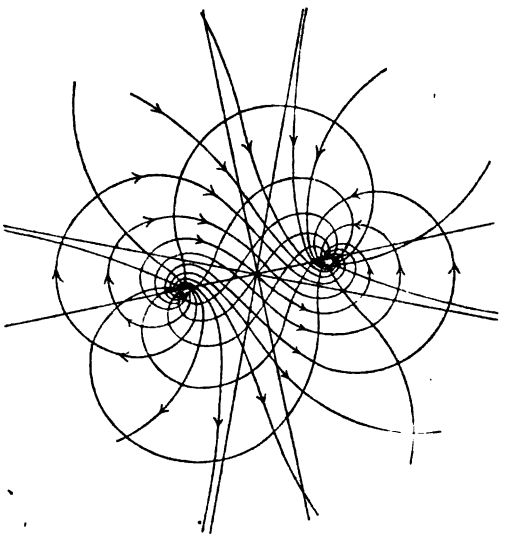


Fig. 41.

windet. Das System der Bahncurven ist in Fig. 41 wieder durch Pfeile ausgezeichnet, welche die Richtung der Bewegung anzeigen sollen. Die einzelne dieser Bahncurven schneidet die Kreise durch z_1 und z_2 allenthalben unter dem gleichen Winkel Θ.

§ 5. Erledigung der parabolischen Substitutionen.

Wir haben nun letzten Endes noch von den Substitutionen mit zusammenfallenden Fixpunkten zu handeln, die wir oben als *parabolische* Substitutionen bezeichneten. Sei

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

eine solche, so erfüllen die vier Coefficienten die Bedingung

$$(a - d)^2 + 4bc = 0,$$

und man erhält als Stelle der z-Ebene, in welcher die beiden Fixpunkte coincidieren:

$$z_0 = \frac{a - d}{2c}.$$

Gehen wir durch Ausführung der Transformation $\bar{z} = \frac{1}{z - z_0}$ zur

*) Man vgl. hier überall Holzmüller's schon unter Seite 168 genanntes Buch, namentlich für die Doppelspiralen § 19 desselben.

kreisverwandten $\bar{z}$-Ebene, so muss sich Substitution (1) in eine solche parabolische Substitution für $\bar{z}$ transformieren, deren beide Fixpunkte bei $\bar{z} = \infty$ coincidieren. Eine Substitution dieser Art muss, wie ein Blick auf die in § 1 allgemein für die Fixpunkte z_1, z_2 aufgestellte quadratische Gleichung lehrt, die Bedingungen $z = 0$, $a = d$ erfüllen, und also haben wir es hier insbesondere mit den Substitutionen

$$\bar{z}' = \bar{z} + A \tag{2}$$

zu thun. Gehen wir zur Variabelen z zurück, so entspringt der Satz, *dass sich die parabolische Substitution* (1) *auf folgende Form bringen lässt*:

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + A. \tag{3}$$

Eine geometrische Deutung bringen wir zuvörderst für die Substitution (2) in Vorschlag. Die Bezeichnungen ξ und η in der alten Bedeutung gebrauchend, wollen wir der die Substitution (2) repräsentierenden Ebenenbewegung die Gleichung

$$\bar{\xi} = \bar{z} + A \cdot \bar{\eta}$$

zu Grunde legen. Dadurch ist nichts anderes, *als eine Parallelverschiebung der Ebene in sich* dargestellt, bei welcher der einzelne Punkt $\bar{z}$ auf *gerader Linie* zum zugeordneten Punkte $\bar{z}'$ hinwandert. Durch die Richtung dieser Bewegung ist ein System *paralleler Geraden* der z-Ebene festgelegt, *und dieses giebt uns ersichtlich die Bahncurven für die vorliegende Substitution. Das zu den Bahncurven orthogonale System paralleler Geraden stellt die Niveaulinien dar*, die wir *äquidistant* nehmen müssen, falls die einzelne unter ihnen durch einmalige Anwendung der Substitution in die nächstfolgende übergehen soll.

Für den allgemeineren Fall einer parabolischen Substitution mit endlich gelegenem Fixpunkt z_0 legen wir der repräsentierenden Ebenenbewegung entsprechend die Gleichung zu Grunde:

$$\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + A \cdot \eta.$$

Der Übergang von dem soeben beschriebenen Specialfalle zur jetzt vorliegenden Gestalt der Bahncurven und Niveaulinien geschieht dann in einfachster Weise auf Grund der Sätze über die Kreisverwandtschaft. Das einzelne System paralleler Geraden erscheint in der z-Ebene als *ein System durch z_0 hindurchlaufender Kreise, die einander alle in diesem Punkte z_0 berühren.* Ein solches System von Kreisen wird also zuvörderst das System unserer Bahncurven sein, und wir können auch sofort die Orientierung dieses Kreissystems in der z-Ebene angeben, indem wir darauf Bezug nehmen, dass wir unter den Bahncurven

eine geradlinige besitzen, die demgemäss als gemeinsame Tangente aller übrigen fungiert. Auf dieser Bahncurve ist nämlich der Punkt $\varepsilon = \infty$ gelegen und eben deshalb auch der Punkt $\varepsilon = \frac{a}{c}$, welcher jenem vermöge (1) zugewiesen ist; die gemeinsame Tangente aller unserer Bahncurven ist sonach die Gerade durch $\varepsilon_0 = \frac{a-d}{2c}$ und $\varepsilon = \frac{a}{c}$. Ein anderes eben solches Kreissystem durch ε_0 giebt die Niveaulinien unserer para-

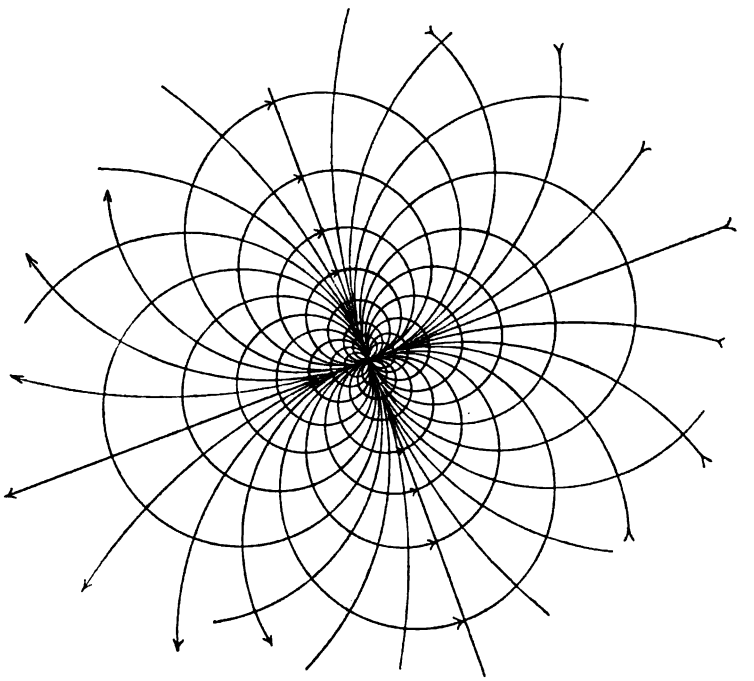


Fig. 42.

bolischen Substitution ab. Es entsteht aus dem System der Bahnlinien einfach durch Drehung der ε-Ebene um ε_0 durch den Winkel $\frac{\pi}{2}$, wie solches des näheren Fig. 42 andeutet.

Auf Grund von Fig. 42 stellt sich eine parabolische Substitution als Grenzfall sowohl der hyperbolischen wie der elliptischen dar, *so dass wir jene geradezu als Übergangsfall zwischen diesen beiden Arten von Substitutionen ansehen können.* In der That, lässt man in der Fig. 40 die beiden Fixpunkte bis zur Coincidenz sich einander annähern, so kommt Fig. 42 zum Vorschein, gleichgültig, welches der beiden Kreissysteme in Fig. 40 die Bahncurven, welches die Niveaulinien lieferte.

Es lässt sich sogar allgemein eine parabolische Substitution als Grenzfall einer loxodromischen ansehen, falls sich die Fixpunkte der

letzteren bis zur Coincidenz einander genähert haben. Der Übergang ist freilich von Fig. 41 aus nicht so evident, wie von Fig. 40 aus; doch können wir hier an die Stelle der geometrischen Vergleichung eine analytische Entwicklung setzen, welche gar nicht auf die besondere Unterart der Substitution Bezug nimmt, von der wir beim Grenzübergang ausgehen mögen. Wir werden in (3) § 1 die besonderen Werte $z_2 = z_0$, $z_1 = z_0 + dz_0$ eintragen, und müssen alsdann nur Sorge tragen, dass der Factor k mit verschwindendem dz_0 sich der Einheit nähert. Das erreichen wir durch den Wert $k = 1 - A \cdot dz_0$, wo A eine Constante ist. Substitution (3) § 1 hat dann die Form

$$1 - \frac{dz_0}{z' - z_0} = (1 - A \cdot dz_0)\left(1 - \frac{dz_0}{z - z_0}\right)$$

oder nach kurzer Rechnung, für limes $dz_0 = 0$:

$$\frac{1}{z' - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + A,$$

womit in der That Formel (3) wiedergewonnen ist.

§ 6. Über die bei den s-Functionen erster und zweiter Art auftretenden Substitutionen.

Die voraufgehenden Entwicklungen sollen jetzt eine erste Verwendung erfahren, welche sich auf die im dritten Kapitel des ersten Abschnitts untersuchten s-Functionen bezieht. In der Dreiecksteilung, welche für die einzelne s-Function aus dem Symmetriegesetz entsprang, waren immer die Dreiecke der einzelnen Art (d. i. entweder die schraffierten Dreiecke oder die freien) mit einander direct kreisverwandt und gingen dementsprechend in einander über durch gewisse linear-gebrochene Substitutionen von s. Da können wir nun die Frage aufwerfen, wie diese für die einzelne s-Function auftretenden Substitutionen sich in das Schema einordnen, welches wir für linear-gebrochene Substitutionen überhaupt in den voraufgehenden Paragraphen gewonnen haben. Wir betrachten in diesem Sinne zuvörderst die s-Functionen erster und zweiter Art, für welche die bezüglichen Dreiecksteilungen oben vollzählig mitgeteilt wurden.

Wenn wir die Dreiecksteilungen für die s-Functionen erster Art in geeigneter Weise auf die Kugeloberfläche projicierten, so entsprangen gerade die viererlei verschiedenen den regulären Körpern entsprechenden Kugelteilungen (man vgl. die Fig. 13, 15, p. 72, 76 u. s. w.). Die Operationen, welche die einzelne Kugelteilung mit sich zur Deckung brachten, waren ausnahmslos *Drehungen der Kugel um gewisse Durchmesser*. Wir gewinnen somit den Satz: *Die bei den s-Functionen erster Art auftretenden Substitutionen sind durchweg elliptische.*

Analytisch bestätigt man dies sofort. In „Ikos." p. 34 giebt Formel (14) den allgemeinsten Ausdruck für eine Substitution, die eine „Drehung der Kugel um ihren Mittelpunkt" bedeutet und die also alle hier in Frage kommenden Substitutionen umfasst. Die gemeinte Formel ist:

$$z' = \frac{(d + ic)z - (b - ia)}{(b + ia)z + (d - ic)},$$

wobei a, b, c, d reelle der Bedingung

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

genügende Zahlen sind. Hier berechne man nun nach Vorschrift von § 1 die dort mit k bezeichnete Grösse. Man findet für dieselbe:

$$k = (2d^2 - 1) - i \cdot 2d\sqrt{1 - d^2},$$

welches in der That eine complexe Zahl vom absoluten Betrage 1 ist.

Bei den s-Functionen zweiter Art legen wir die in Fig. 32 (p. 107) gegebenen geradlinigen Dreiecksteilungen zu Grunde. Dann werden die direct kreisverwandten Dreiecke der einzelnen Teilung mit einander congruent, und die bezüglichen Bewegungen der Ebene in sich gewinnen den elementaren Charakter congruenter Verschiebungen derselben in sich. Aber unter dieser Form traten die Ebenenbewegungen oben nur an zwei Stellen auf, nämlich bei den *elliptischen Substitutionen, deren einer Fixpunkt nach dem unendlich fernen Punkte der Ebene fällt,* und bei den *parabolischen Substitutionen wieder mit festbleibendem unendlich fernen Punkte.* Wir hatten dabei entweder Drehungen der Ebene um den einen im Endlichen gelegenen Fixpunkt der elliptischen Substitution, oder Parallelverschiebungen. *Beide Arten von Substitutionen kommen bei den s-Functionen zweiter Art thatsächlich vor,* wie ein Blick auf Fig. 32 sofort lehren wird. Die Ecken der Dreiecke geben dabei die im Endlichen gelegenen Fixpunkte der elliptischen Substitutionen ab.

Analytisch sind die hier in Rede stehenden Substitutionen in der allgemeinen Form enthalten

$$z' = e^{\frac{\nu i\pi}{6}} \cdot z + A,$$

wo ν eine ganze Zahl, A irgend eine Constante bedeuten soll. Ist diese Zahl ν durch 12 teilbar, so haben wir eine parabolische Substitution, anderenfalls eine elliptische, deren im Endlichen gelegener Fixpunkt $z_1 = \frac{A}{1 - e^{\frac{\nu i\pi}{6}}}$ ist. Es wäre ein Leichtes, für die drei Fälle von s-Functionen zweiter Art nun auch noch explicite die eintretenden Werte von ν und A zu bestimmen.

§ 7. Die bei der s-Function $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}; J\right)$ auftretenden Arten von Substitutionen.

Discutieren wir im Sinne des vorigen Paragraphen nun auch die Dreiecksteilungen der s-Functionen dritter Art. Als Prototyp für diejenigen Fälle, bei denen die Kreisbogendreiecke lauter von 0 verschiedene Winkel haben, betrachten wir wieder $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}; J\right)$ und bringen sonach die in Fig. 33 (p. 109) angedeutete Teilung zur Verwendung. Den Orthogonalkreis dieser Teilung, dessen Inneres vollständig von unendlich vielen Dreiecken erfüllt ist, denken wir der Einfachheit halber als Einheitskreis der s-Ebene fixiert und wollen überdies noch die Dreiecksteilung nach dem Symmetriegesetz am Orthogonalkreise invertieren. Das ausserhalb desselben entspringende Spiegelbild entsteht dann einfach dadurch, dass wir die Kreise, welche in der inneren Teilung die Dreiecke von einander sondern, ausserhalb des Orthogonalkreises voll ausziehen.

Nach diesen Verabredungen überzeugen wir uns zunächst durch zweckmässigen Gebrauch der in den voraufgehenden Paragraphen dargestellten Figuren von der Richtigkeit des nachfolgenden Satzes: *Wird durch irgend eine gerade vorliegende Substitution ein Kreis in sich selbst transformiert, so ist er entweder Bahncurve dieser Substitution oder im besonderen Falle auch Niveaulinie derselben, wenn nämlich letztere elliptisch von der Periode zwei ist.* In diesem besonderen Falle wird nämlich das Innere des gedachten Kreises durch Anwendung der Substitution gerade in den ausserhalb desselben gelegenen Teil der complexen Ebene transformiert. Jedenfalls ist es also unmöglich, dass ein Kreis durch eine loxodromische Substitution in sich transformiert wird. Es entspringt daraus das Resultat: *Die bei der einzelnen s-Function dritter Art auftretenden Substitutionen können nicht loxodromisch sein;* denn immer wird ja der Orthogonalkreis in sich übergeführt. *Zudem ist derselbe stets Bahncurve*, weil ein Punkt im Innern des Orthogonalkreises durch irgend eine der in Betracht kommenden Substitutionen stets wieder in einen im Innern dieses Kreises gelegenen Punkt übergeführt wird.

Gehen wir nun insbesondere zu Fig. 33 zurück, so ist zur einzelnen Ecke s_0 der inneren Teilung als entsprechender Eckpunkt der äusseren der zu s_0 bezüglich des Orthogonalkreises symmetrische Punkt $\frac{1}{\bar{s}_0}$*) zugeordnet. *Je zwei solche Punkte s_0, $\frac{1}{\bar{s}_0}$ geben offenbar ein Paar von Fixpunkten*

*) Unter $\bar{s}_0$ ist immer der conjugiert complexe Wert von s_0 verstanden.

für eine oder mehrere elliptische Substitutionen ab, welche unsere Teilung mit sich selbst zur Deckung bringen. Die Form dieser Substitutionen ist allgemein

$$\frac{s' - s_0}{s' - \frac{1}{s_0}} = e^{\frac{2m\pi i}{n}} \cdot \frac{s - s_0}{s - \frac{1}{s_0}}$$

mit ganzen Zahlen m, n, und es ist insonderheit $n = 2, 3, 7$ je nach der Art der Ecke s_0, welche gerade vorliegt. Die durch die beiden Fixpunkte der Substitution hindurchziehenden Kreise der Teilung gehören zu den Niveaulinien der vorliegenden Substitution, während als Bahncurve nur der Orthogonalkreis allein in der Figur sichtbar ist.

Mit den unendlich vielen Ecken der Teilung giebt es solchergestalt unendlich viele elliptische Substitutionen, welche jene in sich überführen. Aber wir beachten doch, dass die Ecken dem Orthogonalkreise immer näher und näher kommen, so dass auch die Entfernung je zweier einander entsprechenden Ecken der inneren und äusseren Teilung immer kleiner ausfällt. Wir werden sagen: *Unsere weiter und weiter sich einstellenden elliptischen Substitutionen nehmen immer mehr den Charakter der parabolischen an.* Freilich erreichen sie ihn nie ganz; ja, man kann sogar zeigen, *dass parabolische Substitutionen im vorliegenden Falle überhaupt nicht auftreten.* An gegenwärtiger Stelle freilich sind wir gezwungen diesen Beweis zu überspringen; doch wird sich späterhin Gelegenheit finden, eine Andeutung darüber einzufügen.

Letzten Endes zeigen sich nun aber auch noch *hyperbolische* Substitutionen, welche unsere Dreiecksteilung mit sich zur Deckung bringen, in ganz ausserordentlicher Mannigfaltigkeit. Hierüber an gegenwärtiger Stelle eine erschöpfende Darstellung zu liefern, bleibt gänzlich ausgeschlossen; mag es vielmehr genügen, wenn wir eine ganz specielle Classe in Betracht kommender hyperbolischer Substitutionen verfolgen, diejenigen nämlich, für welche die Fig. 33 ausser dem Orthogonalkreise noch je eine weitere Bahncurve aufweist. Greifen wir irgend einen Kreis auf, der die innere Teilung durchzieht. Derselbe erscheint aus Seiten der Kreisbogendreiecke zusammengesetzt, und immer die erste und siebente Seite gehören zu schraffierten Dreiecken, welche in ähnlicher Weise am herausgegriffenen Kreise gelegen sind. Die Substitution aber, welche das eine von solchen zwei Dreiecken in das andere, an siebenter Stelle folgende überführt, besitzt ersichtlich den ausgewählten Kreis zur Bahncurve und dessen beide Schnittpunkte mit dem Orthogonalkreise zu Fixpunkten. *Ihr Charakter als hyperbolische Substitution ist sonach evident.* Ist nun gleich die Anzahl der hyperbolischen Substitutionen,

deren Existenz solcherart sofort aus der Figur erkannt wird, unbegrenzt gross und bedecken deren Fixpunkte den Orthogonalkreis auch überall dicht, so darf man dennoch keineswegs glauben, dass mit ihnen die Gesamtheit der hier in Betracht kommenden hyperbolischen Substitutionen erschöpft ist. Inzwischen würde es wohl nicht gelingen, die Gesamtheit dieser Substitutionen mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln in übersichtlicher Weise darzustellen. Wir kommen sonach hier bei den s-Functionen dritter Art durch den blossen Anblick der Dreiecksteilung nur erst zu einer ganz vorläufigen Kenntnis der zugehörigen hyperbolischen Substitutionen.

§ 8. Die Arten der Modulsubstitutionen, aus der Modulteilung entnommen.

Gehen wir nun endlich auf die Modulsubstitutionen zurück und bestimmen durch Gebrauch der Figuren 35 oder 36 (p. 112, 113), soweit dies ohne Mühe gelingen will, welche Arten unter diesen Substitutionen vertreten sind.

Da ist zuvörderst, wenn wir uns etwa an Figur 35 halten, das Auftreten unendlich vieler *elliptischer* Substitutionen evident. Nehmen wir irgend einen Eckpunkt ω_0 der Teilung, an den *zwei* schraffierte Dreiecke heranreichen, so giebt dieser im Verein mit seinem bezüglich des Orthogonalkreises symmetrisch gelegenen Punkte ersichtlich *das Paar von Fixpunkten für eine elliptische Substitution ab*, welche die Modulteilung in sich transformiert. Bei einmaliger Anwendung dieser Substitution permutieren sich die beiden an ω_0 heranreichenden schraffierten Dreiecke. Wenden wir sie noch ein zweites Mal an, so wird dadurch jedes unserer beiden Dreiecke wieder an seine ursprüngliche Stelle verlegt. Sonach muss die in Rede stehende elliptische Substitution mit sich selbst combiniert die identische Substitution geben, und wir benennen sie in diesem Sinne als *eine Substitution von der Periode zwei.*

Nehmen wir ferner einen Eckpunkt der Teilung, in welchem *drei* schraffierte Dreiecke zusammenlaufen, so giebt dieser mit seinem ausserhalb des Orthogonalkreises gelegenen symmetrischen Punkte das Paar von Fixpunkten *für eine elliptische Substitution, die sich aus der Figur sogleich als eine solche von der Periode drei zu erkennen giebt.* Ausser den damit namhaft gemachten elliptischen Substitutionen giebt es unter den Modulsubstitutionen nicht noch weitere derartige; denn immer würde eine elliptische Substitution einen der beiden Fixpunkte im Inneren des Orthogonalkreises besitzen, wo er ersichtlich einen Eckpunkt der Teilung bilden müsste.

Neu gegenüber dem vorigen Paragraphen ist hier, dass sich unter

den Modulsubstitutionen auch *parabolische* in unendlicher Zahl vorfinden. Möge man in der That in Fig. 35 den Eckpunkt eines beliebigen schraffierten Dreiecks sich wählen, mit dem dasselbe an den Orthogonalkreis heranreicht. Von diesem Punkte strahlt ein ganzer Fächer von unendlich vielen abwechselnd schraffierten und freien Dreiecken in das Innere des Orthogonalkreises herein. Da giebt es eine Modulsubstitution, welche jedes schraffierte oder freie Dreieck des gedachten Fächers in das nach der einen Seite hin zunächst auf dasselbe folgende Dreieck derselben Art überführt. Die gemeinsame Spitze aller Dreiecke dieses Fächers bleibt dabei fest, und die von ihr entspringenden Kreise der Modulteilung werden in einander übergeführt. Die so bezeichneten, einander berührenden Kreise sind ersichtlich Niveaulinien der in Rede stehenden Substitution, *und diese ist solchergestalt als eine parabolische erkannt.* Der Orthogonalkreis ist übrigens, wie wir wissen, überall dicht von Spitzen der Moduldreiecke bedeckt. Wir können daher auch sagen: *Die Fixpunkte der parabolischen Modulsubstitutionen bedecken den Orthogonalkreis überall dicht.*

Letzten Endes wollen wir nun auch die Figuren 35, 36 dazu benutzen, um die ausserordentliche Mannigfaltigkeit der hyperbolischen Substitutionen, durch welche die Modulteilung in sich übergeht, der Anschauung nahe zu legen. Machen wir zuvörderst darauf aufmerksam, *dass die Kreise der Modulfigur in zwei Gattungen zerfallen, je nachdem sie aus zwei oder aus vier Dreiecksseiten bestehen**). Ein Kreis K der ersten Gattung, um von der zweiten hier nicht weiter zu reden, wird durch eine Modulsubstitution jederzeit wieder in einen ebensolchen K' transformiert. Man kann geradezu zwei solche Kreise K, K' willkürlich wählen und hat dann jedesmal *zwei* Modulsubstitutionen, welche K in K' überführen; in der That wird ja jede der beiden Substitutionen K in K' transformieren, welche ein einzelnes dem Kreise K anliegendes, etwa schraffiertes Dreieck in das eine der beiden an K' liegenden schraffierten Dreiecke überführt.

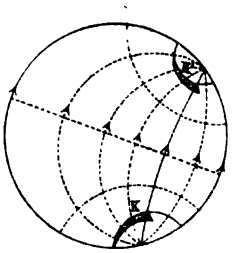


Fig. 43.

Insbesondere ordne man zwei derartige Kreise K, K' einander zu, welche die in nebenstehender Figur schematisch angedeutete Lage gegen einander haben; des näheren soll das an K liegende in die Figur aufgenommene Dreieck in das an K' gezeichnete durch die bezügliche Modulsubstitution übergehen. Zuordnungen von Kreisen K, K', welche gerade diese Lagenverhältnisse darbieten, lassen sich, wie

*) Man beachte, dass in Fig. 34 (p. 111) ausschliesslich die Kreise der ersten Gattung zur Geltung kommen.

ein Blick auf Fig. 35 bezeugt, noch in der allermannigfaltigsten Weise auswählen. In Fig. 43 sind zur Veranschaulichung der Substitution, welche K in verlangter Weise in K' überführt, eine Reihe von Kreisbogen gezeichnet, von denen insbesondere die mit Pfeilen versehenen Bahncurven darstellen. Die übrigen sollen einige Zwischenlagen des Kreises K während seiner Überführung nach K' darstellen*); der die Zeichnung nach aussen abgrenzende, aus zwei Bahncurven sich zusammensetzende Kreis ist als Orthogonalkreis der Modulteilung gedacht. *Bei der gegenseitigen Lage dieser Kreisbogen ist evident, dass wir es mit einer hyperbolischen Modulsubstitution zu thun haben.*

Mit der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Zuordnungen bezeichneter Art von Kreispaaren K, K' ist die Zahl der hyperbolischen Modulsubstitutionen selbst unendlich gross, und deren Fixpunkte bedecken den Orthogonalkreis dementsprechend jedenfalls überall dicht. Das ist aber Alles, was sich auf dem eingeschlagenen geometrischen Wege ohne Mühe ergiebt. Der arithmetischen Untersuchung bleibt es vorbehalten, hier noch ausstehende Lücken zu ergänzen. Da werden wir denn die Modulsubstitutionen in ihrer ursprünglichen Form als die ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

aufgreifen und werden ihnen entsprechend als Modulteilung fortan nur noch die in Fig. 36 angedeutete Dreiecksteilung der ω-Halbebene betrachten. Wie werden wir nun hier den Coefficienten sogleich ansehen können, ob wir im Einzelfall eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Substitution vor uns haben? Wie werden sich des weiteren die Fixpunkte der parabolischen und diejenigen der hyperbolischen Substitutionen arithmetisch charakterisieren lassen, von denen ebensowohl die ersten die reelle ω-Axe überall dicht überdecken, wie die zweiten? Diese Fragen sollen im folgenden Paragraphen beantwortet werden.

§ 9. Eine vorläufige arithmetische Betrachtung der Modulsubstitutionen.

Die Fixpunkte der beliebigen Modulsubstitution $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ ergeben sich durch Auflösung der ganzzahligen quadratischen Gleichung

$$\gamma\omega^2 + (\delta - \alpha)\omega - \beta = 0$$

als an den beiden Stellen gelegen

*) Wir bemerken, dass K und K' im allgemeinen keineswegs zu den Niveaulinien dieser Substitution gehören.

$$(1) \qquad \omega_1, \omega_2 = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2\gamma}.$$

Für die in § 1 mit k bezeichnete Grösse findet sich hier:

$$(2) \qquad k = \frac{(\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4})^2}{4}.$$

Unter Gebrauch der somit definierten Abkürzungen lässt sich die vorgelegte Modulsubstitution, wie wir wissen, in die Gestalt setzen:

$$\frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2} = k \cdot \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}.$$

Bei der Gestalt (2) von k hängt es allein von dem Werte der Summe $(\alpha + \delta)$ ab, welcher Art die gerade betrachtete Modulsubstitution angehört. Wir werden diese Summe $(\alpha + \delta)$ im folgenden immer $\geqq 0$ voraussetzen, was gegebenen Falls durch gleichzeitigen Zeichenwechsel der vier Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ erreichbar ist. Wir unterscheiden dementsprechend folgende vier Fälle:

I. $\alpha + \delta = 0$.

Die Fixpunkte der Substitution sind die beiden conjugiert complexen Punkte:

$$(3) \qquad \omega_1, \omega_2 = \frac{\alpha \pm i}{\gamma},$$

k wird gleich -1 und die Substitution gewinnt die Form

$$\frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2} = -\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}.$$

Wir finden sonach für $\alpha + \delta = 0$ elliptische Substitutionen von der Periode zwei. Setzen wir auch gleich hinzu, dass deren *Gesamtheit* solchergestalt gefunden ist; denn es werden weiterhin elliptische Substitutionen dieser Periode nicht mehr auftreten. Zur Classe dieser Substitutionen gehört die früher mit T bezeichnete; denn sie hatte die Form $T(\omega) = \frac{-1}{\omega}$.

II. $\alpha + \delta = 1$.

Die hierher gehörigen Substitutionen haben zu Fixpunkten

$$(4) \qquad \omega_1, \omega_2 = \frac{\alpha + \varrho^{\pm 1}}{\gamma},$$

während sich als Wert von k entweder ϱ oder ϱ^{-1} findet, unter ϱ immer die complexe dritte Einheitswurzel $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ verstanden. Als allgemeine Form der Substitutionen tritt also hier

$$\frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2} = \varrho^{\pm 1} \cdot \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}$$

ein, *und wir erkennen in ihnen elliptische Substitutionen der Periode drei;*

zugleich bilden sie deren Gesamtheit. Als Beispiel einer hierher gehörigen Substitution nennen wir $U(\omega) = \frac{\omega + 1}{-\omega}$.

III. $\alpha + \delta = 2$.

Da haben wir zusammenfallende Fixpunkte

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\alpha - 1}{\gamma} \tag{5}$$

und zugleich tritt dies nur für $\alpha + \delta = 2$ ein. *Die Substitutionen mit $\alpha + \delta = 2$ geben die Gesamtheit der parabolischen Modulsubstitutionen. Als Fixpunkte derselben stellen sich die sämtlichen rationalen Punkte der reellen ω-Axe dar.* Insbesondere gehört hierher die Substitution S, deren Gestalt durch $\omega' = \omega + 1$ gegeben ist. Den Fixpunkt derselben $\omega = \infty$ werden wir also den rationalen reellen Werten von ω zuzurechnen haben.

IV. $\alpha + \delta > 2$.

Alle nun noch übrig bleibenden, die jetzt vorgeschriebene Bedingung erfüllenden Substitutionen sind hyperbolische. Die Fixpunkte ω_1, ω_2 der einzelnen sind getrennt liegende Punkte der reellen ω-Axe und des näheren sind diese Werte ω_1, ω_2 dadurch charakterisiert, *dass sie die irrationalen Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sind.* Dass dabei auch jede ganzzahlige quadratische Gleichung nichtquadratischer Discriminante mit reellen Wurzeln eben in diesen Wurzeln die Fixpunkte thatsächlich eintretender hyperbolischer Modulsubstitutionen giebt, wird ein Hauptsatz des übernächsten Kapitels sein.

Sollen wir übrigens auch hier ein einzelnes Beispiel einer hyperbolischen Substitution betrachten, so mag

$$\omega' = \frac{\omega - 1}{-\omega + 2}$$

als solches gelten. Nach leichter Umrechnung nimmt diese Substitution die Form an:

$$\frac{\omega' - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\omega' - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\omega - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\omega - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

§ 10. Die Begriffe der Äquivalenz und des Fundamentalbereichs für eine Gruppe linearer Substitutionen.

Nachdem wir durch die gegebenen Entwicklungen eine Reihe wichtiger Anschauungen für die linear-gebrochenen Substitutionen einer Variabelen gewonnen haben, sollen jetzt zwei Begriffe eingeführt werden, von denen namentlich der zweite den gegenwärtigen und den folgenden Abschnitt unseres Buches durchaus beherrscht.

Es möge irgend eine Substitution $z' = V(z)$ gegeben sein, gleich-

viel welcher Art. *Geht irgend ein beliebiger Punkt z_0 der complexen Ebene durch einmalige oder öfter wiederholte Anwendung dieser Substitution V in z_0' über, so wollen wir diesen Punkt z_0' mit z_0 bezüglich der Substitution V äquivalent nennen.* Bezeichnen wir also, wie schon früher, durch V^n die durch n-malige Wiederholung von V entspringende Substitution, so werden zuvörderst mit einem willkürlich gewählten Punkte z_0 alle Punkte

$$z_0^{(1)} = V(z_0), \quad z_0^{(2)} = V^2(z_0), \quad \cdots z_0^{(n)} = V^n(z_0), \quad \cdots$$

bezüglich V äquivalent sein. Verstehen wir aber dann wieder unter V^{-1} die zu V inverse Substitution, so werden bezüglich V mit jenem Punkte z_0 auch die Punkte

$$z_0^{(-1)} = V^{-1}(z_0), \quad z_0^{(-2)} = V^{-2}(z_0), \quad \cdots z_0^{(-n)} = V^{-n}(z_0), \quad \cdots$$

äquivalent sein; denn in der That soll die Aquivalenz zweier Punkte durchaus ein *gegenseitiges* Entsprechen für dieselben festlegen, so dass also, wenn $z_0 = V(z_0^{(-1)})$ mit $z_0^{(-1)}$ äquivalent ist, eben deshalb schon $z_0^{(-1)}$ umgekehrt mit z_0 für äquivalent gilt. Ausser den nun namhaft gemachten Punkten z_0, $z_0^{(1)}$, $z_0^{(-1)}$, $z_0^{(2)}$, $z_0^{(-2)} \cdots$, deren Anzahl je nach der Eigenart von V endlich oder unendlich gross ist, giebt es aber nicht noch neue bezüglich V mit z_0 äquivalente Punkte in der complexen Ebene.

Alle hier zur Verwendung gekommenen Substitutionen

$$V^n, \ (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

bilden nun gerade die Operationen einer *cyclischen Gruppe*, deren Erzeugende V ist*). Wir werden also sagen: Bezüglich V sind irgend zwei Punkte der complexen Ebene dann und nur dann äquivalent, wenn der eine in den anderen durch eine Substitution dieser cyclischen Gruppe übergeführt wird. Demgemäss werden wir uns von vornherein der Sachlage besser anbequemen, *wenn wir zwei solche Punkte „bezüglich dieser cyclischen Gruppe äquivalent" nennen und also den Äquivalenzbegriff nicht an die einzelne Substitution V, vielmehr sogleich an die aus ihr zu erzeugende cyclische Gruppe knüpfen.*

Hier können wir nun in der Verallgemeinerung noch einen wichtigen Schritt thun. Möge nämlich überhaupt eine Gruppe von linearen Substitutionen gegeben sein, so wollen wir ganz davon absehen, ob diese Gruppe cyclisch ist, oder wie sonst ihre Structur beschaffen sein mag. *Immer wollen wir doch zwei Punkte z, z' der complexen Ebene einander bezüglich dieser Gruppe äquivalent nennen, wenn z durch irgend eine Substitution der Gruppe in z' übergeführt wird.* So nennen wir im

*) Wir erinnern daran, dass mit der einzelnen Substitution V auch deren inverse V^{-1} als gegeben gedacht wird.

folgenden Kapitel bezüglich der Modulgruppe zwei Punkte ω äquivalent, wenn der eine in den anderen durch eine Modulsubstitution übergeführt wird.

Neben den so gewonnenen Äquivalenzbegriff stellen wir nun einen zweiten Begriff, den wir sogleich für irgend eine vorgegebene Gruppe linearer Substitutionen aussprechen, unangesehen die besondere Structur, welche dieselbe haben mag. Wir denken in der complexen z-Ebene einen Bereich abgegrenzt, welcher durch folgende Forderung jener Gruppe zugeordnet ist: *Für jeden Punkt der complexen z-Ebene soll der Bereich einen und nur einen Punkt als äquivalent bezüglich der Gruppe aufweisen.* Kann man in der That einen solchen Bereich in der z-Ebene ausfindig machen, so wollen wir ihn *einen Fundamentalbereich der vorgelegten Gruppe* nennen. Damit haben wir nun den überaus wichtigen Begriff gewonnen, den wir baldigst genauer umgrenzen und durchbilden werden, um ihn dann späterhin zu einer langen Reihe von Anwendungen zu verwerten.

Der Begriff des Fundamentalbereichs einer Gruppe linearer Substitutionen ist bei der geometrischen Untersuchung specieller analytischer Functionen seit lange hervorgetreten. In der That haben wir derartige Fundamentalbereiche vor uns, wenn wir in der Theorie der doppeltperiodischen Functionen die Ebene in lauter congruente Parallelogramme zerlegen. Fassen wir bei den Dreiecksnetzen der Schwarz'schen s-Function ein schraffiertes mit einem benachbarten freien Dreieck zusammen, so haben wir einen Fundamentalbereich der zugehörigen Gruppe linearer Substitutionen, wie wir dies unten noch weiter ausführen, etc.

In anderer Form herrscht der Begriff des Fundamentalbereichs seit lange in der Zahlentheorie, wo wir z. B. an die Lehre von den binären quadratischen Formen von negativer Determinante erinnern. Man handelt von der Äquivalenz und Reduction derselben, und da werden wir nun im übernächsten Kapitel zu zeigen haben, dass dies gar nichts anderes ist, als Betrachtung der Äquivalenz bezüglich der Modulgruppe und Einführung eines Fundamentalbereichs dieser Gruppe. In der That ist denn auch der geometrische Begriff des Fundamentalbereichs der Modulgruppe wesentlich von dort aus gewonnen. Es ist Dedekind gewesen, welcher in seiner grundlegenden Arbeit*) im 83sten Bande des Crelle'schen Journals die Lehre von der Reduction der quadratischen Formen in ein geometrisches Gewand kleidete und auf die Weise den Begriff dessen schuf, was wir demnächst den

*) *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Cr. J. Bd. 83 (1877).

Fundamentalbereich der Modulgruppe nennen werden. Zu der vollen Allgemeinheit, in der wir den Begriff des Fundamentalbereichs im folgenden gebrauchen, wurde derselbe sodann von Klein in seinen ersten Arbeiten über elliptische Modulfunctionen entwickelt*).

Die grosse Wichtigkeit, welche der genannte Begriff für alles Folgende besitzt, veranlasst uns schon an dieser ersten Stelle, wo wir Gelegenheit dazu haben, mit Ausführlichkeit von ihm zu handeln. Gehen wir demnach nun zu den cyclischen Gruppen zurück, welche sich aus einer Substitution V erzeugen lassen, und versuchen für diesen einfachsten Fall über die Gestalt des zugehörigen Fundamentalbereichs feste Anschauungen auszubilden, welche uns hernach in den complicierteren Fällen zu statten kommen sollen.

§ 11. Gestalt des Fundamentalbereichs einer cyclischen Gruppe im hyperbolischen und parabolischen Falle.

Wenn wir jetzt versuchen, einen Fundamentalbereich für die cyclische Gruppe zu construieren, welche sich aus einer vorliegenden Substitution $z' = V(z)$ erzeugen lässt, so werden uns dabei die Figuren, welche wir im ersten Teil dieses Kapitels zur Deutung der einzelnen Substitution V entwarfen, von bedeutendem Vorteil sein. Möge zuvörderst V hyperbolisch sein, dann ist die cyclische Gruppe der Substitutionen V^n von unendlich hoher Ordnung. Sei V durch Fig. 40 (p. 171) gedeutet, so dachten wir uns doch die Niveaulinien dieser Figur in solchen Intervallen angebracht, dass jegliche durch einmalige Anwendung der Substitution V in die nächstfolgende übergeführt wird. Da wählen wir uns nun zwei solchergestalt auf einander folgende Niveaulinien willkürlich aus und betrachten den ringförmigen Bereich, den beide einschliessen (man vgl. Fig. 44, in der übrigens der Abstand der Niveaulinien von einander der Deutlichkeit halber etwas grösser als in Fig. 40 gewählt wurde). Wir behaupten: *Der so gewonnene Bereich ist ein Fundamentalbereich für unsere cyclische Gruppe, sofern wir uns noch entschliessen, von den Randpunkten dieses Bereichs nur die-*

*) In Vorlesungen und Abhandlungen seit 1877. Man sehe die drei p. 142 unter dem Texte citierten Abhandlungen in Bd. 14 der Math. Annalen (1878); ferner die Mitteilung *„Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen"* in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie vom December 1879 (später abgedruckt in Bd. 17 der Math. Annalen, 1880).- Die Arbeiten von Poincaré, in welchen dieser an seinem Teile den Begriff des Fundamentalbereichs zu Grunde legt, beginnen 1881. An sie schliesst sich mit neuen Verallgemeinerungen die weitere Abhandlung von Klein im 21sten Bande der Math. Annalen (1882): *„Neue Beiträge zur Riemann-schen Functionentheorie"*, wo zahlreiche Citate auf die sonst in Betracht kommende Litteratur gegeben werden.

jenigen des einen Grenzkreises, etwa des in Figur 44 stärker markierten, dem Bereiche als zugehörig zu betrachten.

Zum Beweise bringen wir die Operationen V^n der Gruppe auf unseren Bereich selbst zur Anwendung und gedenken dabei der Ebenenbewegungen, durch welche wir oben diese Substitutionen deuteten. Aus dem schraffierten Bereiche der Fig. 44 entspringen dergestalt den Substitutionen V^n der Gruppe entsprechend unendlich viele neue Bereiche. Zwecks einer kurzen Bezeichnung wollen wir den einzelnen derselben nach der Substitution V^n, vermöge deren er aus dem schraffierten Bereiche hervorgeht, selbst als „den Bereich V^n" benennen; der schraffierte Bereich bekommt dabei den Namen 1 der identischen Substitution. Es ist auf Grund der früheren Sätze über hyperbolische Substitutionen sofort zu sehen, wie alle diese unendlich vielen Bereiche V^n ($n = -\infty \cdots +\infty$) sich in der complexen Ebene einlagern werden. Neben den Bereich 1 schliesst sich zur einen Seite der Bereich V glatt an, zur anderen aber V^{-1}, und so lagern sich auch allgemein neben V^n zu beiden Seiten V^{n-1} und V^{n+1}, ohne noch eine Lücke zwischen einander zu lassen und ohne einen Punkt der complexen Ebene gemeinsam zu besitzen. Denn die Punkte auf dem gemeinsamen Grenzkreise zweier benachbarten Bereiche V^n, V^{n+1} werden wir ja unserer Verabredung entsprechend als nur dem einen, V^n, zugehörig betrachten dürfen.

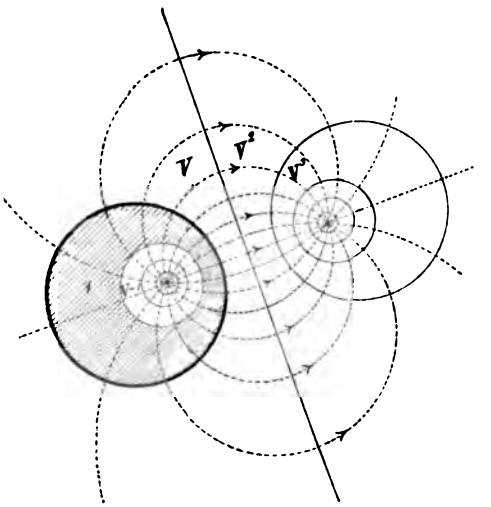


Fig. 44.

Das alles folgt aus dem blossen Anblick der Fig. 44, wenn wir uns erinnern, in welchen Intervallen die Niveaulinien auf einander folgen sollten. Früher wurde ausführlich geschildert, wie sich diese Niveaulinien um die beiden Fixpunkte der Substitution V enger und enger zusammenziehen. So werden nun die Bereiche V^n, je mehr der Exponent n nach der positiven oder negativen Seite hin wächst, um so schmaler werdend den einen oder anderen Fixpunkt umringen, wo dann um den einen wie um den anderen noch unendlich viele stets sich glatt an einander reihende Bereiche V^n Platz finden. Letzten

Endes ist die complexe Ebene von den unendlich vielen Bereichen *überall lückenlos, aber auch überall einfach* bedeckt, wobei freilich den Fixpunkten selbst eine besondere Rolle zukommt, deren Charakter aus der gegebenen Schilderung leicht erkannt wird.

Dass der Bereich 1 wirklich einen Fundamentalbereich für die Gruppe der Substitutionen V^n abgiebt, ist nun evident. Mögen wir irgend einen Punkt z_0 der complexen Ebene auswählen*), so gehört derselbe einem bestimmten Ringraume V^n an. Demnach ist $z = V^{-n}(z_0)$ ein mit z_0 äquivalenter Punkt im Bereiche 1. Ist aber andrerseits z_0 ein beliebiger Punkt im Bereiche 1, so gehört, wie wir auch einen von 0 verschiedenen Exponenten n wählen mögen, der Punkt $V^n(z_0)$ dem Ringe V^n und eben deshalb nicht dem Bereiche 1 an. Die Bestimmung über die Grenzpunkte des Bereiches 1 musste aber getroffen werden, damit dies ohne Ausnahme gilt; denn in der That geht ja der eine dieser Grenzkreise durch Anwendung von V in den anderen über.

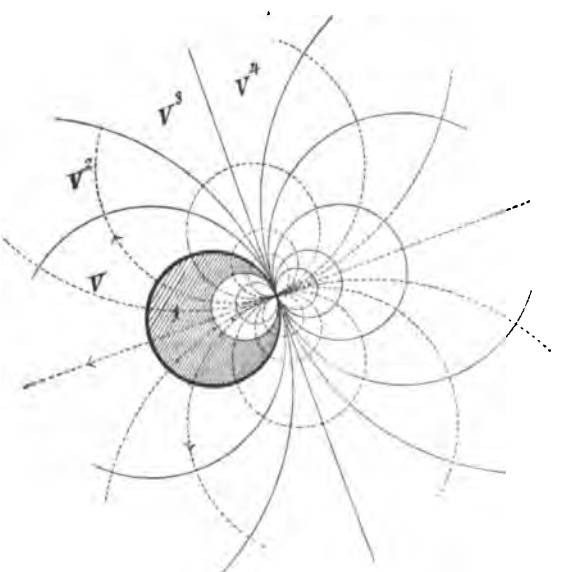


Fig 45.

Die Ausführlichkeit, mit der wir nunmehr beim Falle einer hyperbolischen Substitution V verweilten, gestattet uns jetzt für die beiden anderen Fälle einer parabolischen oder elliptischen Substitution V um

*) Indes soll z_0 keiner der Fixpunkte sein. Streng genommen besteht der Fundamentalbereich aus dem Bereiche 1 im Verein mit den beiden isoliert liegenden Fixpunkten; doch haben wir für unsere ferneren Zwecke diese Verschärfung der Vorstellung nicht nötig.

so grössere Kürze. Zuvörderst erledigt sich der Fall einer parabolischen Substitution V fast von selbst durch die Bemerkung, dass man eine solche als Grenzfall einer hyperbolischen Substitution für coincidierende Fixpunkte betrachten kann. Lassen wir in der That in Fig. 44 die Fixpunkte einander unendlich nahe kommen und zwar so, dass die Bahncurven und Niveaulinien der Figur gerade den für die parabolische Substitution V vorliegenden Verhältnissen sich anpassen! *In Fig. 45 erhalten wir dann im schraffierten Bereiche $V^0 = 1$ thatsächlich einen Fundamentalbereich für die cyclische Gruppe der unendlich vielen parabolischen Substitutionen V^n*, wie man leicht nach Analogie der vorhergehenden Besprechung der hyperbolischen Substitution V überblickt.

Nur auf den einen Fall müssen wir noch ausdrücklich eingehen, dass der Fixpunkt der parabolischen Substitution V unendlich fern liegt. Dann sind die Bahncurven und Niveaulinien zwei gegen einander orthogonale Systeme paralleler Gerader. *Wieder umgrenzen uns jetzt irgend zwei unter den Niveaucurven, von denen die eine aus der andern durch V entsteht, einen Fundamentalbereich. Derselbe besitzt die Gestalt eines Ebenenbandes.* Von den Randpunkten dieses Bereiches gehören, wie früher, nur die der *einen* Niveaulinie (etwa der in der Fig. 46 stark ausgezogenen) demselben an; in der That sind ja wieder die Punkte der beiden Grenzlinien unseres Bereiches einander äquivalent, indem die eine in die andere durch Anwendung der erzeugenden Substitution V der Gruppe übergeführt wird.

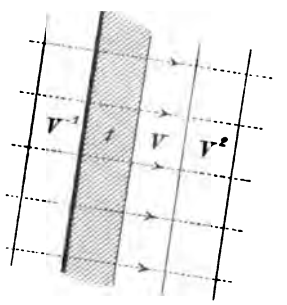


Fig. 46.

§ 12. Fortsetzung: Fall einer elliptischen Substitution V. Willkür in der Gestalt des Fundamentalbereichs einer cyclischen Gruppe.

Wesentlich anders gestalten sich die Verhältnisse für den Fall einer elliptischen Substitution V, den wir jetzt betrachten. Wir wollen V sogleich in der Form aufschreiben:

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = e^{\vartheta i} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Hier müssen wir eine Fallunterscheidung treffen, indem wir zuvörderst voraussetzen, *die Zahl ϑ stehe zu π in einem numerisch rationalen Verhältnis* $\vartheta = 2\pi \cdot \frac{p}{q}$, wo p und q als ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler gedacht sind. In diesem Falle entspringt durch Wieder-

holung von V eine cyclische Gruppe der *endlichen* Ordnung q, die ersichtlich aus folgenden Substitutionen besteht:

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = e^{\frac{2\mu\pi i}{q}} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (\mu = 1, 2, \cdots q).$$

Wir werden V dementsprechend als eine elliptische Substitution der Periode q bezeichnen.

Irgend einen Kreisbogen, der die beiden Fixpunkte z_1, z_2 von V verbindet, nehmen wir jetzt als erste Niveaulinie an und wenden die q Substitutionen der Gruppe auf dieselbe an. Es entspringt ein System von q Niveaulinien, so gelegen, dass je zwei auf einander folgende in den Fixpunkten sich unter dem Winkel $\frac{2\pi}{q}$ treffen. Die ganze Ebene ist auf diese Weise in q sichelförmige Bereiche zerlegt, deren einzelner von zwei auf einander folgenden unserer q Niveaulinien eingegrenzt ist. *Irgend einen dieser Bereiche können wir nun als Fundamentalbereich unserer Gruppe verwerten und müssen ihm dann freilich*

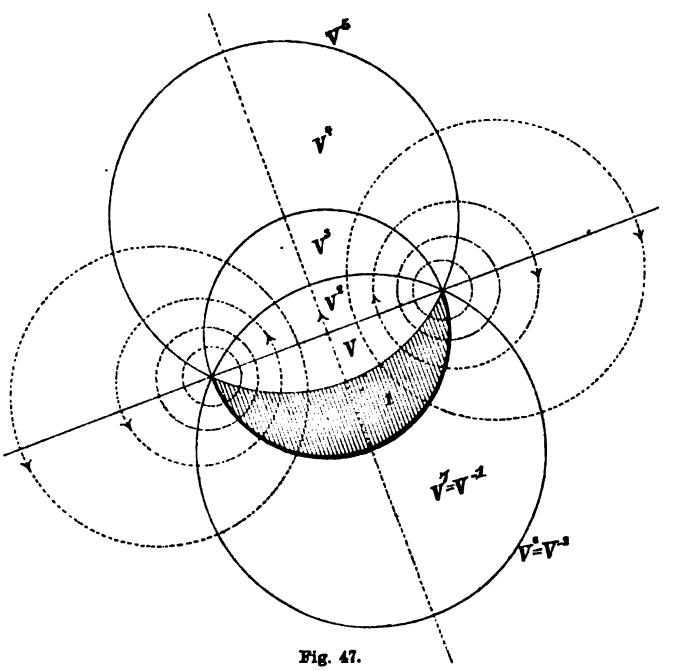


Fig. 47.

wieder nur die Punkte der einen Grenzlinie zuerteilen. Fig. 47 versinnlicht diese Verhältnisse für den Specialfall $q = 8$.

Zum Beweise werden wir auch hier wieder die q Bereiche, die wir soeben durch die Niveaulinien abteilten, nach dem früheren Princip

mit den Substitutionen der Gruppe als Namen belegen, wobei der Exponent n von V^n, weil $V^q = 1$ ist, beliebig modulo q reduciert werden kann. Liegt jetzt ein Punkt z_0 im Bereiche V^n, so ist ihm $z = V^{-n}(z_0)$ im Bereiche 1 äquivalent. Andrerseits überblickt man sofort, dass im letzteren nicht noch zwei äquivalente Punkte ausfindig gemacht werden können.

Steht zweitens die Zahl ϑ zu 2π nicht in einem rationalen Verhältnisse, so ist keine unter den Substitutionen V^n mit $n \gtrless 0$ die identische und man sagt alsdann, die elliptische Substitution V sei aperiodisch. Ein Punkt geht durch immer erneute Anwendung von V stets in neue Lagen über, welche nach und nach die ihm zugehörige Bahncurve überall dichter und dichter überlagern. Es werden sonach zum einzelnen Punkte äquivalente stets in seiner grössten Nähe zu finden sein, und es müsste der Fundamentalbereich, wenn wir auch hier von einem solchen sprechen wollten, eine unendlich schmale Sichel mit den beiden Spitzen z_1, z_2 sein, wobei aber die geometrische Vorstellung eines „Bereiches" hinfällig geworden ist. *Ein eigentlicher Fundamentalbereich existiert also in diesem Falle nicht.* Übrigens treten Substitutionen dieser Art in der Folge gar nicht auf, und wir haben deshalb nicht nötig, noch länger bei ihnen zu verweilen.

Indem wir es unterlassen, hier auch noch auf die loxodromischen Substitutionen einzugehen, müssen wir jedoch noch darauf hinweisen, aus welcher Mannigfaltigkeit möglicher Gestalten wir voraufgehend die Fundamentalbereiche im besonderen ausgewählt hatten. In der That ist der Fundamentalbereich einer Gruppe an sich noch etwas sehr Willkürliches. Es liegt ja im Begriffe des Fundamentalbereichs nur, dass er zu *jedem* Punkte der Ebene *einen* als äquivalent aufweise. Haben wir ihn also im Einzelfall einmal in einer speciellen Weise fixiert, so können wir nun nach Willkür Punkte oder Teile desselben abtrennen und durch äquivalente ersetzen. Immer wird dann auch der so entstehende neue Bereich den Forderungen eines Fundamentalbereichs genügen, so gut wie der frühere.

Im allgemeinen wird der neue Bereich, von dem wir gerade sprachen, aus getrennt liegenden Stücken bestehen, und das ist jedenfalls eine Complication, von der wir absehen werden. Aber auch durchaus zusammenhängend kann im einzelnen Falle der Fundamentalbereich noch in mannigfaltigster Weise gewählt werden. Möge man sich die Lage der Bahncurven und Niveaulinien der gegebenen erzeugenden Substitution V noch einmal vorstellen und eine irgendwie gestaltete Linie C zeichnen, welche nur der *einen* Bedingung genügen soll, *jede Bahncurve zu schneiden und jede nur einmal.* Auf diese Linie wenden

wir alle Operationen V^n der cyclischen Gruppe an, wodurch sie in eine endliche oder unendlich grosse Zahl neuer Lagen $C^{(n)}$ übergeht, je nachdem wir mit einer Gruppe endlicher oder unendlich hoher Ordnung zu thun haben. Immer werden wir dann durch irgend zwei benachbarte unter unseren Curven $C^{(n)}$, sofern es überhaupt einen Fundamentalbereich unserer Gruppe giebt, einen Bereich eingrenzen, der allen Anforderungen eines Fundamentalbereichs der vorgelegten Gruppe entspricht*). Unter allen diesen Bereichen sind die oben zunächst angegebenen die einfachsten. Sie entstehen, wenn wir die Curven $C^{(n)}$ als Niveaulinien wählen (wo jetzt nur noch die Auswahl der ersten $C^{(0)}$ der Willkür anheim gestellt ist). Wir haben auch in der Folge keine Veranlassung, von diesen einfachsten Gestalten der Fundamentalbereiche cyclischer Untergruppen abzuweichen.

§ 13. Besondere Ausführungen für die Modulsubstitutionen. Die elliptischen Modulsubstitutionen.

In der Gruppe der Modulsubstitutionen, auf welche wir jetzt noch besonders Bezug nehmen, waren an cyclischen Untergruppen elliptischer Substitutionen nach § 9 zuvörderst solche der *zweiten* Ordnung enthalten. Eine unter ihnen möge die Substitutionen $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ und $V^2(\omega) = \omega$ enthalten, wo dann also $\alpha + \delta = 0$ ist. Um für diese cyclische Gruppe einen bestimmten, in der Folge festzuhaltenden Fundamentalbereich zu construieren, markieren wir uns vorab die beiden Fixpunkte von V:

$$\omega_1, \omega_2 = \frac{\alpha \pm i}{\gamma}.$$

Die im vorigen Paragraphen mit q bezeichnete Zahl ist hier gleich 2, und sonach werden die beiden den Fundamentalbereich eingrenzenden Niveaulinien einen *ganzen* Kreis zusammensetzen. Wir treffen die Anordnung insbesondere derart, dass die Fixpunkte auf diesem Kreise diametral gelegen sind oder, was dasselbe ist, dass die einzelne unserer beiden Niveaulinien gerade einen Halbkreis darstellt. Den *ausserhalb* des so gewonnenen Kreises belegenen Teil der Ebene wählen wir zum Fundamentalbereich und haben ihn in nachfolgender Fig. 48 schraffiert. Von den Randpunkten des Bereichs sollen nur diejenigen der stärker gezogenen Niveaulinie diesem zugehören.

*) Es würde sogar statthaft sein, dass $C^{(0)}$ die einzelne Bahncurve *öfter als einmal* schneidet, sofern nur diese Linie $C^{(0)}$ weder sich selbst noch eine der anderen $C^{(n)}$ überkreuzt; die Annahme des Textes empfiehlt sich nur durch ihre besondere Anschaulichkeit.

Aus Fig. 48 lesen wir den Satz ab: *Von zwei bezüglich der in Rede stehenden cyclischen Gruppe äquivalenten Punkten hat einer vom reellen Punkte* $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ *eine Entfernung**) $\leq \frac{1}{\gamma}$. Wir schliessen insbesondere: *Die Fixpunkte der hierher gehörigen Substitutionen können höchstens die Entfernung* 1 *von der reellen Axe erreichen.* Solches tritt für $\gamma = 1$ ein und also z. B. für die Substitution T, deren Fundamentalbereich man sich insonderheit nach Vorschrift von Fig. 48 vorstellen möge.

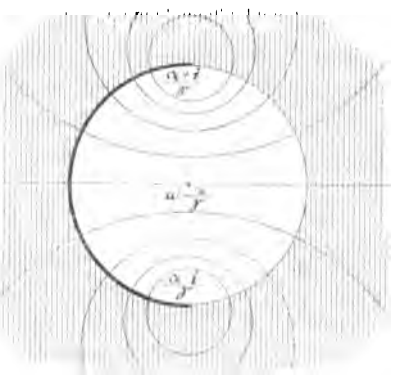


Fig. 48.

Es giebt ferner cyclische Untergruppen der Ordnung *drei* aus *elliptischen* Modulsubstitutionen. Sei $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ Erzeugende einer solchen Untergruppe, so haben wir als Fixpunkte dieser Substitution**)

$$\omega_1, \omega_2 = \frac{2\alpha - 1 \pm i\sqrt{3}}{2\gamma}.$$

Als erste Niveaulinie wählen wir die *gerade Verbindungslinie* von ω_1, ω_2, die dann infolge des hier vorliegenden Wertes $q = 3$ durch V im ganzen noch in *zwei* weitere Lagen übergeht, welche einander in den Fixpunkten unter den Winkeln $\frac{2\pi}{3}$ treffen. Diese beiden letzteren Niveaulinien sollen uns den Fundamentalbereich der vorliegenden cyclischen Gruppe eingrenzen, für welchen das Nähere aus Fig. 49 hervorgeht. Aus dieser Figur ziehen wir noch die Folgerung: *Unter zwei hinsichtlich unserer cyclischen Gruppe äquivalenten Punkten hat stets der eine entweder vom Punkte* $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ *oder von* $\omega = \frac{\alpha - 1}{\gamma}$ *eine Entfernung* $< \frac{1}{\gamma}$.

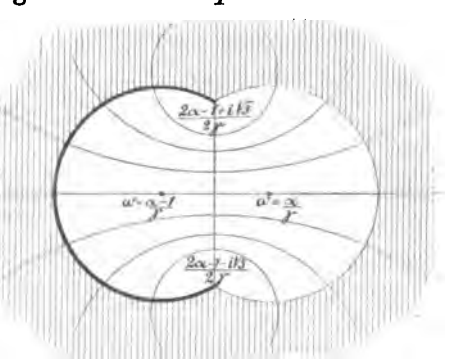


Fig. 49.

*) Bei Angabe dieser Entfernung sehe man vorkommenden Falls von einem negativen Zeichen des γ ab.

**) Hier und in der nächsten Folge ist immer an der oben (§ 9) bereits geschehenen Festsetzung $\alpha + \delta \geq 0$ festgehalten.

Und hieraus: *Die grösste Entfernung, welche die Fixpunkte der hierher gehörigen Substitutionen von der reellen Axe erreichen können, ist* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Solches tritt für $\gamma = 1$ ein und also insbesondere für die Substitution U.

§ 14. Fortsetzung: Festsetzungen für die parabolischen und hyperbolischen Modulsubstitutionen.

Ist jetzt $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ eine *parabolische* Modulsubstitution, d. h. ist $\alpha + \delta = 2$, so entspringt durch Wiederholung von V eine cyclische Gruppe unendlich hoher Ordnung. Mögen wir erstlich den Fall eines in unendlicher Ferne gelegenen Fixpunktes haben, wo dann V die Gestalt $V(\omega) = \omega + \beta$ besitzt. *In diesem Falle grenzen wir den Fundamentalbereich durch zwei Gerade ein, welche in den Entfernungen* $\pm \frac{1}{2}\beta$ *zur imaginären Axe parallel laufen.* Die Punkte der durch $\omega = -\frac{1}{2}\beta$ hindurchziehenden Grenzlinie sollen dem Bereiche zugerechnet werden. Dieser Vorschrift entsprechend werden wir insbesondere den Fundamentalbereich für den Fall $V(\omega) = \omega + 1$ construieren.

Ist der dritte Coefficient γ der parabolischen Substitution nicht gleich Null, so ist der Fixpunkt derselben der rationale reelle Punkt $\omega = \frac{\alpha - 1}{\gamma}$. Dann ist es zweckmässig die Niveaulinien zur Eingrenzung des Fundamentalbereichs so zu wählen, dass die entspringende Figur in elementarem Sinne Symmetrie bezüglich des Fixpunktes zeigt.

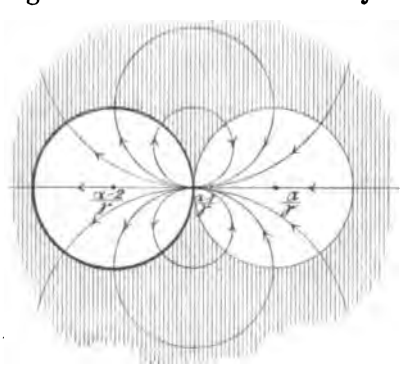


Fig. 50.

Die Grenzkreise des Fundamentalbereichs sollen also congruent ausfallen und zu beiden Seiten des Fixpunktes gelegen sein, wie das in nebenstehender Figur zum Ausdruck gebracht ist. Wir berechnen mühelos die Bestimmungsstücke dieser Kreise. Ist deren Durchmesser d, so sind ihre Schnittpunkte mit der reellen Axe ausser den beiden im Fixpunkt vereinten bei $\frac{\alpha - 1}{\gamma} \pm d$ gelegen. Aber von diesen zwei Punkten muss der eine durch die Substitution in den anderen übergeführt werden. Man hat demnach die Gleichung:

$$\frac{\alpha - 1}{\gamma} + d = V\left(\frac{\alpha - 1}{\gamma} - d\right)$$

und findet durch Lösung derselben für d ausser dem selbstverständlich eintretenden Werte $d = 0$ noch denjenigen, welchen wir suchen, nämlich $d = \frac{2}{\gamma}$. Hieraus ist die Werteverteilung in Fig. 50 gewonnen.

Als sofort verständliche Folgerungen ziehen wir wieder: *Von zwei bezüglich der aus* $V(\omega) = \omega + \beta$ *entspringenden cyclischen Gruppe äquivalenten Punkten hat höchstens einer von der imaginären* ω*-Axe einen Abstand* $< \frac{1}{2}\beta$. Und entsprechend aus Fig. 50: *Sind zwei Punkte bezüglich der aus der parabolischen Substitution* $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, $\left(\gamma \gtrless 0\right)$ *entspringenden cyclischen Gruppe äquivalent, so hat der eine von ihnen vom Punkte* $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ *oder vom anderen* $\omega = \frac{\alpha - 2}{\gamma}$ *eine Entfernung* $\leq \frac{1}{\gamma}$.

Sei endlich $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ eine hyperbolische Substitution, so markiere man zunächst die beiden reellen irrationalen Fixpunkte ω_1, ω_2 derselben. Alsdann wähle man zu Grenzen des Fundamentalbereichs diejenigen beiden mit einander congruent ausfallenden Niveaulinien, deren eine durch V in die andere übergeführt wird. Da haben wir denn eine Werteverteilung, wie sie in Fig. 51 angegeben ist. Um diese zu verificieren, bezeichnen wir die Schnittpunkte der ersten der beiden Niveaulinien mit der reellen Axe durch x_1 und x_2, und zwar liege x_2 zwischen den Fixpunkten der Substitution. Es werden dann die Schnittpunkte der reellen Axe und der anderen Grenze des Fundamentalbereichs bei $V(x_2)$ und $V(x_1)$ gelegen sein. Nun verfolge man allgemein die Entfernung $V(\omega) - \omega$ zwischen zwei einander vermöge unserer Substitution zugeordneten reellen Punkten ω, was mit Hilfe der Fig. 40 (p. 171) ohne Mühe geschieht. Man sieht leicht, dass

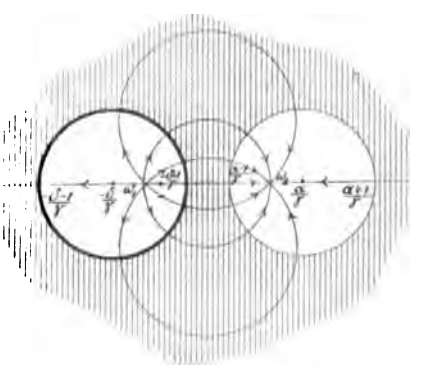


Fig. 51.

$$f(\omega) = V(\omega) - \omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} - \omega$$

vom Zeichen abgesehen für x_1 ein Minimum, für x_2 dagegen ein Maximum wird. Lösen wir aber $\frac{df}{d\omega} = 0$ nach ω auf, so erhalten wir

$$x_1, x_2 = \frac{-\delta \pm 1}{\gamma},$$

wodurch unsere Kreise die Radien $\frac{1}{\gamma}$ erhalten. Damit bestätigt man

in der That sofort die in Fig. 51 angegebene Werteverteilung von ω. Merken wir uns letzten Endes wieder den Satz an: *Von zwei Punkten, die bezüglich der aus der hyperbolischen Substitution V entspringenden cyclischen Gruppe äquivalent sind, liegt stets einer entweder vom Punkte* $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ *oder von* $\omega = \frac{-\delta}{\gamma}$ *in einer Entfernung* $\leqq \frac{1}{\gamma}$.

Blicken wir nochmals auf die für die vier Arten der Modulsubstitutionen nun gemachten Bestimmungen zurück, so zeigt sich insbesondere noch, dass der gerade zuletzt ausgesprochene Satz über die Lage äquivalenter Punkte in dieser Form ganz allgemein für alle Modulsubstitutionen gilt. In der That geht er ja in die vorgenannten partikulären Sätze über, wenn wir den dort vorliegenden Fällen entsprechend $-\delta$ bez. durch α, $\alpha - 1$, $\alpha - 2$ ersetzen. Dieser Umstand ist wesentlich darin begründet, dass wir alle bezüglichen Fundamentalbereiche durch Kreise vom Radius $\frac{1}{\gamma}$ abgegrenzt haben. Man wolle diese Bemerkungen für später festhalten.

Einen Teil desjenigen Problems, dessen Behandlung Aufgabe dieses ganzen Abschnitts ist, haben wir nun bereits gelöst. Wir haben eine Reihe grundlegender Resultate über die in der Modulgruppe enthaltenen *cyclischen Untergruppen* gewonnen. Freilich bedürfen diese cyclischen Untergruppen weiterhin durchaus noch der ergänzenden Untersuchung. Aber dieselbe benötigt entwickeltere Hilfsmittel; wir wollen diese Untersuchung im folgenden Kapitel erst vorbereiten und dann im übernächsten Kapitel erledigen. Vorab haben wir noch eine Ergänzung zu geben, welche an die früheren Sätze über indirecte Kreisverwandtschaft anknüpft.

§ 15. Von den Substitutionen der Veränderlichen z, welche indirecte Kreisverwandtschaften bedeuten*).

Im dritten Kapitel des vorigen Abschnitts (p. 89) haben wir neben die directe auch noch die indirecte Kreisverwandtschaft zweier Ebenen oder einer Ebene mit sich selbst gestellt. Die Eigenart dieser letzteren Verwandtschaft war die, dass zwar auch bei ihr Kreisen stets wieder Kreise zugeordnet waren und die Winkel der einen Ebene mit den ihnen entsprechenden der verwandten an Grösse übereinstimmten: Aber darin bestand das Besondere, dass beim Übergang von einem Winkel zu seinem entsprechenden die Schenkel desselben umgelegt wurden. Eine besondere indirecte Kreisverwandtschaft der complexen z-Ebene

*) Die in den drei folgenden Paragraphen mitgeteilten Entwicklungen sind zuerst vom Herausgeber durchgeführt worden.

hatten wir damals durch die Spiegelung derselben an ihrer reellen Axe hergestellt und bringen diese Spiegelung nun analytisch durch die Transformation von z in

$$z' = \bar{z}$$

zum Ausdruck, wobei $\bar{z}$ der zu z conjugiert complexe Wert ist. Dieser besondere Fall, mit der allgemeinsten directen Kreisverwandtschaft combiniert, gab die allgemeinste indirecte Kreisverwandtschaft. Letztere finden wir also dargestellt durch:

$$\bar{V}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \tag{1}$$

wenn $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ eine beliebige der voraufgehend besprochenen Substitutionen ist*). Diese Substitutionen (1) wollen wir hinfort als *Operationen oder Substitutionen zweiter Art* bezeichnen und stellen ihnen die bislang allein betrachteten linearen Substitutionen als solche von der ersten Art gegenüber.

Eine Operation zweiter Art $\bar{V}$, mit sich selbst combiniert, ergiebt eine solche von erster Art:

$$\bar{V}^2 = V. \tag{2}$$

Hierbei unterscheiden wir die Fälle, ob die so zu Tage tretende Substitution V die identische oder eine hyperbolische oder parabolische u. s. w. ist und gründen darauf eine Einteilung der Substitutionen zweiter Art in Unterarten. Beginnen wir sogleich damit, diejenigen Substitutionen $\bar{V}$ näher zu untersuchen, welche $\bar{V}^2 = 1$ geben und also als *Substitutionen von der Periode zwei* zu bezeichnen sind.

Die zu (1) inverse Substitution ist

$$\bar{V}^{-1}(z) = \frac{-\bar{d}\bar{z} + \bar{b}}{+\bar{c}\bar{z} - \bar{a}}, \tag{3}$$

wobei $\bar{a}$ zu a u. s. w. conjugiert complex sein soll. $\bar{V}$ ist dann und nur dann von der Periode zwei, wenn $\bar{V}^{-1}$ mit $\bar{V}$ identisch ist. Versuchen wir also die Coefficienten in (1) und (3) proportional zu setzen:

$$-\bar{d} = \pi a, \quad \bar{b} = \pi b, \quad \bar{c} = \pi c, \quad -\bar{a} = \pi d$$

und discutieren die solchergestalt erhaltenen vier Gleichungen.

Ist wenigstens einer der beiden Coefficienten b, c von 0 verschieden, so können wir ihn auch als reell voraussetzen, was nötigen Falls durch die offenbar noch freistehende Behaftung der vier Coefficienten in (1) mit einem geeigneten gemeinsamen Factor erreicht wird. Dann aber ist ersichtlich der soeben eingeführte Proportionalitätsfactor $\pi = 1$, und in-

*) Cf. „Ikos." p. 30 Formel (2).

dem wir noch die Coefficienten in ihre reellen und imaginären Bestandteile $a = a_1 + ia_2$ u. s. w. trennen, kommt als Gestalt von $\overline{V}$:

$$\overline{V}(z) = \frac{(a_1 + ia_2)\bar{z} + b_1}{c_1\bar{z} - (a_1 - ia_2)}, \tag{4}$$

welche Substitution zweiter Art thatsächlich die Periode zwei besitzt.

Verchwinden andrerseits zugleich b und c, so erkennt man sofort als hinreichende und notwendige Bedingung für die Identität von (1) und (3) die, dass $\frac{a}{d}$ eine Zahl vom absoluten Betrage 1 ist. Die Operationen dieser Art subsumieren sich aber offenbar unter die Substitutionen der Form (4), und wir gewinnen dergestalt den Satz: *Die Operationen zweiter Art von der Periode zwei werden durch die Substitutionen der Gestalt* (4) *gerade erschöpfend dargestellt.*

Um die Fixpunkte der Substitution (4), wofern sie solche hat, zu berechnen, setzen wir in (4) $\overline{V}(z) = z = x + iy$ und erhalten

$$c_1(x^2 + y^2) - 2a_1x - 2a_2y - b_1 = 0, \tag{5}$$

eine Gleichung, aus welcher sich die imaginären Bestandteile identisch fortgehoben haben. In (5) haben wir nun die Gleichung eines *Kreises* der complexen z-Ebene vor uns, der reell oder unendlich klein oder schliesslich imaginär ist, je nachdem

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1c_1 \gtrless 0$$

ist. Links steht hier die Determinante der Substitution (4), negativ genommen. Da der Wert 0 für dieselbe ausgeschlossen ist, *so haben wir eine erneute Teilung der hier in Rede stehenden Operationen in zwei Unterarten, je nachdem der Kreis* (5), *welcher die vermöge* $\overline{V}$ *sich selbst entsprechenden Punkte liefert, reell oder imaginär ist*, d. h. mit anderen Worten, *je nachdem die Determinante der Substitution* (4) *negativ oder positiv ist.* Die Operationen der ersten dieser beiden Unterarten sind diejenigen, welche wir im vorigen Abschnitt als *Spiegelungen* bezeichneten. Wir wollen jetzt diese Benennung überhaupt auf die Substitutionen zweiter Art der Periode zwei ausdehnen und nennen dementsprechend den der einzelnen derartigen Substitution zugehörigen Kreis (5), gleichgültig ob er reell oder imaginär ist, ihren *Symmetrie- oder Spiegelkreis.*

Sei nunmehr die Substitution (1) von einer höheren als der zweiten Periode, so bilden wir uns vor allem die Substitution erster Art

$$\overline{V}^2(z) = \frac{(a\bar{a} + b\bar{c})z + a\bar{b} + b\bar{d}}{(c\bar{a} + d\bar{c})z + c\bar{b} + d\bar{d}} \tag{6}$$

und bezeichnen die hier auftretenden Coefficienten abgekürzt bez. durch a', b', c', d'. Die Determinante derselben ist

$$a'd' - b'c' = (ad - bc)(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})$$

und also *eine reelle positive Zahl.* Desgleichen hat die Summe des ersten und vierten Coefficienten

$$a' + d' = a\bar{a} + d\bar{d} + b\bar{c} + \bar{b}c$$

ersichtlich einen *reellen* Zahlwert. Diese beiden Angaben genügen, um zu erkennen, *dass* (6) *niemals eine loxodromische Substitution sein kann.* In der That ist die in § 1 (p. 164) mit k bezeichnete Zahl, für die Substitution $\overline{V}^2$ berechnet:

$$k = \frac{(a' + d' - \sqrt{(a' + d')^2 - 4(a'd' - b'c')})^2}{4(a'd' - b'c')},$$

so dass für die hier eintretenden Werte von a', b', c', d' der Zahlwert von k entweder reell und positiv oder complex vom absoluten Betrage 1 ist, womit unsere gerade geschehene Behauptung dargethan ist. Wenn wir also $\overline{V}$ als hyperbolische Substitution zweiter Art bezeichnen, falls $\overline{V}^2$ eine ebensolche Substitution erster Art ist, und so fort, so haben wir *als Unterarten der Operationen zweiter Art nur noch die hyperbolische, parabolische und elliptische* zu nennen. Die Substitution $\overline{V}$ gehört in die erste, zweite oder dritte dieser Unterarten, je nachdem die erste, zweite oder dritte der Bedingungen

$$(7) \qquad (a\bar{a} + d\bar{d} + b\bar{c} + \bar{b}c)^2 \gtrless 4(ad - bc)(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})$$

zutrifft.

Indem wir jetzt nach den Fixpunkten einer Substitution $\overline{V}$ fragen, beachten wir, dass jeder derselben auch für die Substitution erster Art $\overline{V}^2$ Fixpunkt sein müsste. Sonach kann $\overline{V}$ höchstens zwei Fixpunkte besitzen, die noch dazu für eine parabolische Substitution V in einen coincidieren müssten. Um dies genauer zu untersuchen, bezeichnen wir die Fixpunkte von $\overline{V}^2$ mit z_1 und z_2. Unter Anwendung von $\overline{V}$ werden diese beiden Punkte entweder permutiert oder jeder für sich bleibt an seiner Stelle; in der That wolle man beachten, dass mit z_1 auch $z'_1 = \overline{V}(z_1)$ infolge von

$$\overline{V}^2(z_1') = \overline{V}(V^2(z_1)) = V(z_1) = z_1'$$

Fixpunkt der Substitution erster Art $\overline{V}^2$ ist. *Eine parabolische Substitution $\overline{V}$ hat sonach stets einen Fixpunkt,* während weiterhin die Sachlage die ist, *dass unter Anwendung von $\overline{V}$ die beiden Fixpunkte z_1, z_2 von $\overline{V}^2$ einzeln an ihrer Stelle bleiben, falls $\overline{V}$ hyperbolisch ist, dass dagegen z_1, z_2 durch $\overline{V}$ permutiert werden, falls diese Substitution elliptisch ist.* Beim Beweise dieser Behauptung ist es statthaft, die beiden Fixpunkte z_1, z_2 von $\overline{V}^2$ in einer beliebig gewählten speciellen Lage anzunehmen. Benutzen

wir also, wie schon öfter, $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$. Eine Substitution $\overline{V}$, welche diese beiden Punkte einzeln an ihrer Stelle lässt, hat notwendig die Form $z' = a\bar{z}$; andrerseits hat eine Substitution $\overline{V}$, die jene Punkte permutiert, die Form $z' = \frac{b}{\bar{z}}$. Da ist nun wirklich die erste unter diesen beiden Operationen hyperbolisch, die zweite elliptisch, wie man durch Berechnung der bezüglichen Substitutionen $\overline{V}^2$ sofort bestätigt.

§ 16. Erweiterung einer cyclischen Gruppe nicht-loxodromischer Operationen erster Art durch zugehörige Spiegelungen.

Sei V zunächst irgend eine hyperbolische oder elliptische Substitution, $\overline{V}$ aber eine Spiegelung. Aus ihnen bilden wir uns die Substitution erster Art:

$$V' = \overline{V}^{-1} V \overline{V} \tag{1}$$

und sagen, sie entstehe aus V durch *Transformation**) vermöge der Spiegelung $\overline{V}$. Sind z_1, z_2 die Fixpunkte von V, so sind $\overline{V}(z_1)$ und $\overline{V}(z_2)$ diejenigen von V', wie man sofort zeigt. Verlangen wir also, dass V und V' die nämlichen Fixpunkte besitzen, so muss Operation $\overline{V}$ die Punkte z_1, z_2 entweder einzeln in sich transformieren oder permutieren. Beschränken wir uns hier der Einfachheit wegen auf Spiegelungen $\overline{V}$ mit *reellem* Symmetriekreis, so ziehen wir nun zweckmässig Fig. 40 (p. 171) mit ihren beiden Kreissystemen heran, durch welche wir seinerzeit die Substitution V geometrisch deuteten. Wir gewinnen so ohne weiteres den Satz: *Sollen V' und V die nämlichen Fixpunkte besitzen, so ist dazu nur die eine Bedingung erforderlich, dass der Symmetriekreis von $\overline{V}$ Bahncurve oder Niveaulinie der Substitution V ist.*

Wollen wir des näheren untersuchen, zu welcher Substitution V' wir dergestalt geführt werden, so dürfen wir uns für die explicite Rechnung ersichtlich wieder der Fixpunkte $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$ bedienen und können überdies unter den Bahncurven, sowie unter den Niveaulinien speciell gewählte als Symmetriekreise der in Anwendung zu bringenden Spiegelungen zu Grunde legen. Schreiben wir also erstlich $V(z) = \varkappa z$, unter V eine hyperbolische Substitution verstehend, und bringen die Spiegelung an einer zugehörigen Bahncurve $\overline{V}(z) = \bar{z}$ zur Anwendung. Da zeigt sich sofort, dass $\overline{V}^{-1} V \overline{V} = V$ ist. Bringen wir indes die Spiegelung an einer bezüglichen Niveaulinie $\overline{V}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ zur Verwendung, so zeigt sich ebenso leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$\overline{V}^{-1} V \overline{V} = V^{-1}.$$

---

*) Cf. „Ikos." p. 6, 7.

Indem wir dieselbe Betrachtung sofort auch für eine elliptische Substitution V durchführen, ergiebt sich das Resultat: *Durch Spiegelung $\overline{V}_B$ an einer Bahncurve wird eine elliptische oder hyperbolische Substitution V stets in sich transformiert*:

$$\overline{V}_B^{-1} V \overline{V}_B = V; \tag{2}$$

durch Spiegelung $\overline{V}_N$ an einer Niveaulinie wird hingegen V in ihre inverse Substitution

$$\overline{V}_N^{-1} V \overline{V}_N = V^{-1} \tag{3}$$

transformiert.

In völlig gleicher Form gilt dieser Satz auch für die parabolischen Substitutionen. Setzen wir nämlich $V(z) = z + b$, unter b eine reelle Zahl verstanden, so ist $\overline{V}_B(z) = \bar{z}$ Spiegelung an einer Bahncurve, $\overline{V}_N(z) = -\bar{z}$ aber eine solche an einer Niveaulinie. Da bestätigt man nun sofort, dass auch unter der jetzigen Bedeutung von V, $\overline{V}_B$, $\overline{V}_N$ die Gleichungen (2) und (3) gelten.

Die Formeln (2), (3) geben nun den Ansatzpunkt zu einer weiteren sehr wichtigen Folgerung. Wenn wir neben der nicht-loxodromischen Substitution V auch noch die Spiegelung $\overline{V}$ an einer ihrer Bahncurven oder Niveaulinien als Erzeugende einer Gruppe ansetzen, so wird diese Gruppe sicher die Substitutionen

$$V^n, \quad V^n \overline{V}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{4}$$

besitzen. Da ist es nun die Folge der Gleichung (2) bez. (3), dass hiermit auch *alle* Operationen der gemeinten Gruppe angegeben sind; denn auf Grund dieser Gleichungen lässt sich jede aus V und $\overline{V}$ erzeugbare Operation entweder auf die Form V^n oder $V^n \overline{V}$ bringen, je nachdem dabei die Spiegelung $\overline{V}$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Malen Anwendung fand. Die gewonnene Gruppe enthält die cyclische Gruppe der Substitutionen V^n als Untergruppe; dabei nehmen wir nur eine schon in den Vorlesungen über das Ikosaeder*) gebrauchte Ausdrucksweise wieder auf, wenn wir sagen, *jene Gruppe entstehe aus dieser ihrer cyclischen Untergruppe durch Erweiterung vermöge einer zugehörigen Spiegelung $\overline{V}$.* Zwecks einer kurzen Benennung werden wir auch wohl von einer *erweiterten cyclischen Gruppe* sprechen, ohne damit behaupten zu wollen, dass diese selbst eine cyclische Gruppe sei.

Die Eigenart einer solchen erweiterten Gruppe ist nun sehr verschieden, je nachdem die zur Erweiterung verwendete Spiegelung an

*) Cf. „Ikos." p. 23, 24.

einer Bahncurve oder einer Niveaulinie der Substitution V geschah. Betrachten wir zuvörderst den ersten Fall, bei dem also Gleichung (2) zur Verwendung kommt, so enthält die erweiterte Gruppe ausser der schon namhaft gemachten cyclischen Untergruppe der Substitutionen V^n vor allem auch noch diejenige umfassendste cyclische Untergruppe, welche aus der Operation zweiter Art $V\bar{V}$ sich erzeugen lässt. Diese Operation $V\bar{V}$ ergiebt mit sich selbst combiniert V^2:

$$(V\bar{V})^2 = V^2, \tag{5}$$

wie aus (2) sofort entspringt, *und es stimmt sonach $V\bar{V}$ in Ansehung der Unterart mit V^2 und also auch mit V überein.* Auf Grund von (5) sind dann die Operationen der aus $V\bar{V}$ entspringenden cyclischen Gruppe insgesamt durch

$$V^{2m}, \quad V^{2m+1}\bar{V}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

dargestellt.

Diese Bemerkungen gewinnen noch an Bedeutung, wenn wir beweisen, *dass wir auf diesem Wege überhaupt zu allen cyclischen Gruppen gelangen können, die sich aus Operationen zweiter Art mit einer Periode > 2 herstellen lassen. In der That lässt sich jede solche Operation durch Combination einer nicht-loxodromischen Substitution V mit der Spiegelung $\bar{V}$ an einer zu V gehörigen Bahncurve in der Gestalt $V\bar{V}$ darstellen.* Wir werden diesen Satz leicht durch explicite Rechnung verificieren, bei der wir die Fixpunkte der in Betracht kommenden Substitutionen bei $z = 0$ und $z = \infty$ bez. bei $z = \infty$ allein annehmen, letzteres im Falle wir mit parabolischen Substitutionen zu thun haben. Für unsere drei Unterarten von Substitutionen kommen nämlich bei dieser speciellen Lage der Fixpunkte die Formen:

$$z' = \varkappa e^{\vartheta i} \cdot \bar{z}, \quad z' = \frac{\varkappa e^{\vartheta i}}{\bar{z}}, \quad z' = e^{\vartheta i}\bar{z} + (\varkappa_1 + i\varkappa_2)e^{\frac{\vartheta i}{2}},$$

die wir sogleich in zweckmässiger Gestalt herrichteten. Die einzelne dieser Substitutionen kann nun als Combination $V\bar{V}$ dargestellt werden, wenn bez. V und $\bar{V}$ die Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} V(z) &= \varkappa z, & \bar{V}(z) &= e^{\vartheta i}\bar{z}, \\ V(z) &= e^{\vartheta i} z, & \bar{V}(z) &= \frac{\varkappa}{\bar{z}}, \\ V(z) &= z + \varkappa_1 e^{\frac{\vartheta i}{2}}, & \bar{V}(z) &= e^{\vartheta i}\bar{z} + \varkappa_2 i e^{\frac{\vartheta i}{2}}. \end{aligned}$$

Hier ist aber in der That in allen drei Fällen $\bar{V}$ Spiegelung an einer Bahncurve von V. Übrigens zeigt sich auch auf's leichteste, *dass die*

einzelne Operation zweiter Art auch nur auf eine Weise in der gemeinten Gestalt $V\bar{V}$ darstellbar ist.

Ist auf der anderen Seite $\bar{V}$ Spiegelung an einer Niveaulinie von V, so hat die erweiterte Gruppe eine wesentlich andere Structur. Da man aus (3) leicht $\bar{V} V^n \bar{V} = V^{-n}$ für jeden ganzzahligen Exponenten n ableitet, *so ist jede der jetzt in Rede stehenden erweiterten Gruppe angehörende Substitution zweiter Art $V^n \bar{V}$ eine Spiegelung, deren Symmetriekreis ersichtlich Niveaulinie von V ist.* Die erweiterte Gruppe hat somit abstract genommen den Typus einer *Diedergruppe.* Bemerken wir letzten Endes noch, dass sich unsere Gruppe durch gewisse Paare ihr angehöriger Spiegelungen erzeugen lässt; das leisten z. B. die beiden Spiegelungen $\bar{V}$ und $\bar{V}' = V\bar{V}$.

§ 17. Fundamentalbereiche für die zuletzt betrachteten erweiterten Gruppen.

In Übertragung unserer oben eingeführten Begriffe nennen wir zwei Punkte der z-Ebene bezüglich einer erweiterten Gruppe besprochener Art einander äquivalent, wenn der eine in den anderen durch eine Operation erster Art V^n oder eine solche der zweiten Art $V^n \bar{V}$ der Gruppe übergeht. Ein Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe wird ein solcher Bereich sein, der für jeden beliebigen Punkt der Ebene einen und nur einen als äquivalent bezüglich der erweiterten Gruppe aufweist. Die ausführliche Entwicklung der Fundamentalbereiche führen wir hier nur bei der zweiten eben zuletzt besprochenen Classe erweiterter Gruppen durch, bei denen $\bar{V}$ Spiegelung an einer Niveaulinie von V war; diese Gruppen allein sind für spätere Verwendung von Wichtigkeit*). Auch hier mag die eingehendere Behandlung des hyperbolischen Falles genügen.

---

*) Übrigens lassen sich die erweiterten Gruppen der ersten Classe leicht erledigen. Man ziehe, wie es auch im Texte geschieht, die früher angegebenen Gestalten des Fundamentalbereichs für die im Einzelfall in Betracht kommende cyclische Gruppe der Substitutionen V^n heran. Durch die als Symmetriekreis von $\bar{V}$ fungierende Bahncurve von V wird dieser Bereich in zwei bezüglich dieser Bahncurve symmetrische Teile zerlegt, von denen man einen zum Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe auswählen kann. Die Gestalt desselben und die Zugehörigkeit der Randpunkte zu diesem wird man mit Hilfe der früheren Figuren 44 (p. 187) etc. leicht feststellen. Durch einmalige Anwendung der Substitution V entspringt aus dem so gewonnenen Bereich ein neuer, demselben benachbarter. Mit ihm vereint giebt er leicht ersichtlich einen Fundamentalbereich für diejenige cyclische Gruppe, welche sich aus der Operation $V\bar{V}$ erzeugen lässt, eine Operation, die sich, wie

Setzen wir, die oft gebrauchte specielle Lage der Fixpunkte wieder benutzend, $V(z) = \varkappa z$ und also $\overline{V}(z) = \frac{\varkappa'}{z}$ mit positiven reellen Zahlen $\varkappa$, $\varkappa'$, deren erste noch dazu von 1 verschieden sein muss, so gehören der erweiterten Gruppe insbesondere die Operationen zweiter Art $z' = \frac{\varkappa^n \varkappa'}{z}$ an, deren Symmetriekreise durch

$$x^2 + y^2 = \varkappa^n \varkappa', \quad (n = -\infty \cdots + \infty) \tag{1}$$

gegeben sind. Wir bezeichnen den einzelnen unter ihnen im Anschluss an die ihm zugehörige Zahl n durch K_n. Es ist aufs leichteste bestätigt, dass durch einmalige Anwendung der Substitution V der Kreis K_n in K_{n+2} übergeführt wird. Constatieren wir also, dass irgend zwei Kreise K_n und K_{n+2} einen Fundamentalbereich für die ursprüngliche cyclische Gruppe der Substitutionen V^n eingrenzen. Wir wollen diesen Bereich kurz B nennen.

Der Bereich B wird alsdann durch den Kreis K_{n+1} in zwei ringförmige Bereiche zerlegt, *die einander bezüglich dieses Kreises symmetrisch sind*; denn in der That sind die beiden auf K_n bez. K_{n+2} liegenden Punkte $\sqrt{\varkappa^n \varkappa'}$, $\sqrt{\varkappa^{n+2} \cdot \varkappa'}$ einander bezüglich K_{n+1} symmetrisch. Einen dieser beiden den Bereich B zusammensetzenden Ringe nennen wir $\overline{B}$ *und besitzen dann in ihm einen Fundamentalbereich für unsere erweiterte Gruppe.*

In der That hat jeder Punkt z der Ebene einen äquivalenten z_0 im Bereiche B. Liegt z_0 aber nicht schon selbst im Bereiche $\overline{B}$, so gilt dies sicher von dem mit ihm äquivalenten Punkte $z_0' = V^{n+1}\overline{V}(z_0)$. Andrerseits kann $\overline{B}$ keine zwei bezüglich der erweiterten Gruppe äquivalente Punkte aufweisen. Jedenfalls könnte nämlich der eine von zwei solchen nicht durch eine der Gruppe angehörende Operation erster Art in den anderen übergehen, da $\overline{B}$ gänzlich innerhalb des Fundamalbereichs B der ursprünglichen Gruppe gelegen ist. Durch eine Operation zweiter Art der Gruppe können aber solche zwei Punkte auch nicht in einander übergehen, weil sonst der Symmetriekreis dieser Operation zwischen beiden Punkten hindurchziehen müsste, was doch bei der Lage der Kreise (1) ausgeschlossen ist. Sonach haben

---

wir nochmals erinnern, als die allgemeinste der zweiten Art ansehen lässt. Wir überlassen jedoch weitere diesbezügliche Ausführungen dem Leser. Dass übrigens der Fundamentalbereich für die aus einer einzelnen Spiegelung mit reellem Symmetriekreis zu erzeugende cyclische Gruppe zweiter Ordnung entweder aus dem Inneren des bezüglichen Symmetriekreises oder aus dem ausserhalb desselben verlaufenden Teile der Ebene besteht, dürfte sofort evident sein.

wir in $\overline{B}$ wirklich einen Fundamentalbereich für die erweiterte Gruppe. Wir setzen noch ergänzend hinzu, *dass hier die Randpunkte ausnahmslos als dem Bereiche zugehörig zu betrachten sind.*

Wir nennen jetzt $\overline{B}$ nach der identischen Substitution 1 und benennen entsprechend, gerade wie das oben in § 11 auch geschah, den aus $\overline{B}$ durch die einzelne Operation der erweiterten Gruppe entspringenden Bereich nach dieser Operation. Der Gesamtheit der Substitutionen der erweiterten Gruppe entsprechen solchergestalt unendlich viele ringförmige Bereiche, *welche sich allenthalben glatt an einander legen und in ihrer Gesamtheit die z-Ebene vollständig und einfach bedecken.* In der That folgern wir ja aus der Begriffsbestimmung des Fundamentalbereichs, dass ein beliebig herausgegriffener Punkt z in einem, aber auch nur in einem dieser den Substitutionen der Gruppe zugeordneten ringförmigen Bereiche gelegen ist*).

Unsere unendlich vielen ringförmigen Bereiche sind nun, wie eine mühelose Rechnung zeigt, gerade diejenigen, in welche die z-Ebene durch die Kreise (1) zerlegt wird. Daher treten für die Gestaltung der Ringe und für ihre Häufung gegen die Fixpunkte hin die bereits von früher her bekannten Verhältnisse ein. Wir haben in Fig. 52

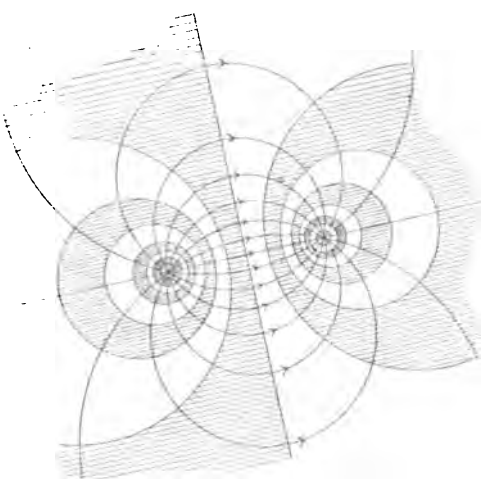


Fig. 52.

versucht, dieselben durch eine Zeichnung zu erläutern. In dieser sind beide Fixpunkte als im Endlichen gelegen angenommen und überdies die Constanten $\varkappa$, $\varkappa'$ so gewählt, dass unter den Kreisen (1) auch

*) Wofern er nicht gerade auf dem Grenzkreise zweier benachbarten Bereiche gelegen ist.

die *gerade* Niveaulinie vorkommt. Je zwei benachbarte Ringe sind dann durch eine der Gruppe angehörende Operation zweiter Art indirect kreisverwandt auf einander bezogen. Wir haben daher unsere frühere Massnahme der wechselnden Schraffierung wieder zur Ausübung gebracht.

Wir müssen hier endlich noch von der Willkür in der Gestalt des Fundamentalbereichs $\overline{B}$ handeln. Abgesehen davon, dass wir für denselben einen beliebigen unter den Ringen in Fig. 52 auswählen können, *ist derselbe offenbar gestaltlich völlig bestimmt**), indem er von zwei auf einander folgenden Kreisen (1) begrenzt erscheint, welche letztere mit der erweiterten Gruppe fest gegeben sind. Wir haben hier also einen sehr bemerkenswerten Unterschied gegenüber den Fundamentalbereichen für die cyclischen Gruppen aus Operationen erster Art allein; in der That konnten ja diese Bereiche noch in der mannigfaltigsten Weise gestaltet werden**). Wollen wir von der erweiterten Gruppe aus zur ursprünglichen cyclischen Gruppe der Substitutionen V^n als zu einer Untergruppe jener zurückkehren, so ist ja bereits durch unsere obige Entwicklung der einzuschlagende Weg vorgezeichnet. *Wir werden offenbar zwei neben einander liegende Ringe der Fig.* 52 *zu einem grösseren Ringe zu vereinen haben, welcher uns den gesuchten Fundamentalbereich auf diesem Wege giebt.* Wir erwähnen diesen an gegenwärtiger Stelle selbstverständlichen Satz nur deshalb, weil wir ihn späterhin zu verallgemeinern haben werden.

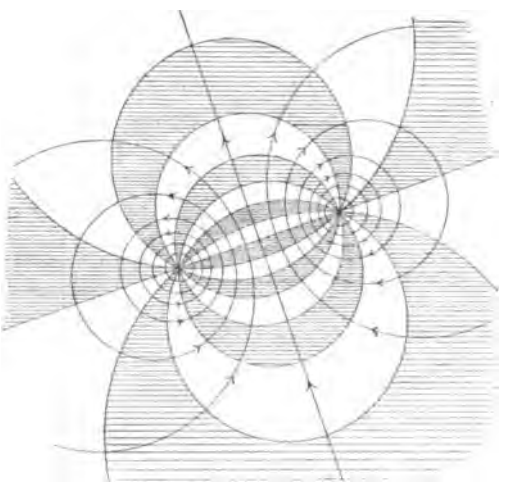


Fig. 53.

Für den elliptischen und parabolischen Fall nehmen die Über-

*) Vorausgesetzt ist übrigens, dass der Fundamentalbereich $\overline{B}$ zusammenhängend sein, d. h. nicht in getrennt liegende Stücke zerfallen soll.

**) Die Bestimmtheit der Gestalt von $\overline{B}$ hat übrigens ihren Grund in dem Umstande, dass sich die erweiterte Gruppe aus Spiegelungen erzeugen lässt; in der That haben wir als solche erzeugende Spiegelungen am Schlusse des vorigen Paragraphen die beiden $\overline{V}$ und $V\overline{V}$ erkannt. Es ist im Texte nicht Raum, auf diese Verhältnisse noch näher einzugehen.

legungen einen völlig analogen Weg, wobei dann auch die entspringenden Resultate den eben erhaltenen durchaus entsprechen. Es schien deshalb nicht erforderlich, hier noch einmal in die Einzelheiten der

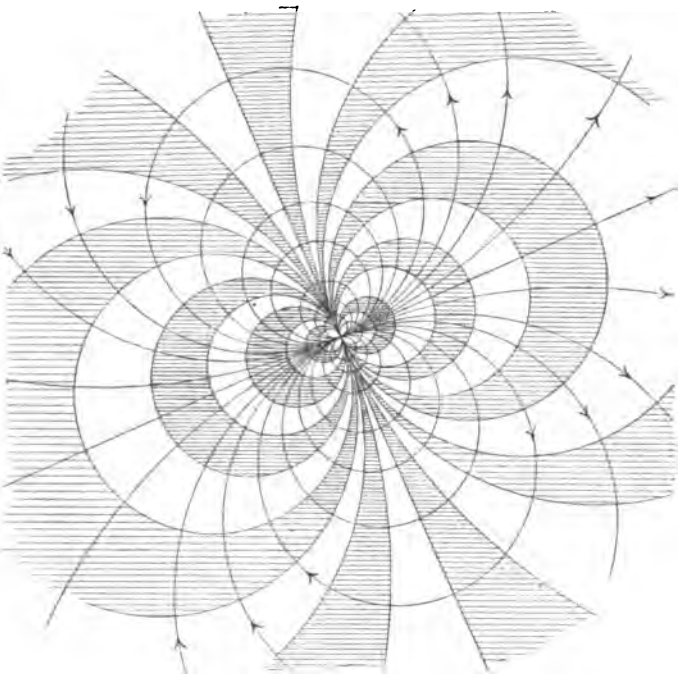


Fig. 54.

Erörterung einzuführen. Mag es genügen, dass wir die eintretenden Verhältnisse noch durch zwei Figuren (Fig. 53, 54) illustrieren, die ohne weiteres verständlich sein werden. Der elliptische Fall setzt dabei, wie auch oben, das Verhältnis der bezüglichen Zahl ϑ zu 2π als ein numerisch rationales voraus.

Nach der somit abgeschlossenen allgemeinen Betrachtung der Operationen zweiter Art könnten wir jetzt insbesondere zu den Modulsubstitutionen zurückgehen und neben den oben untersuchten nun auch Modulsubstitutionen zweiter Art in Betracht ziehen. Das sind jedoch Erörterungen, die wir besser für das folgende Kapitel vorbehalten.

Zweites Kapitel.

Von der Modulgruppe und der ihr entsprechenden Teilung der ω-Halbebene.

Im zehnten Paragraphen des vorigen Kapitels haben wir die Begriffe der Äquivalenz und des Fundamentalbereichs allgemein für Gruppen linearer Substitutionen festgelegt. Dieselben wurden dann insbesondere verfolgt für die cyclischen Gruppen, sowie für gewisse aus ihnen durch Erweiterung vermöge einer zugehörigen Spiegelung entspringende Gruppen. Im nun beginnenden neuen Kapitel wollen wir jene beiden oft genannten Begriffe auf die Modulgruppe anwenden. Wir werden dabei Gelegenheit haben, in ausführlichster Weise auf die Modulteilung der ω-Halbebene zurückzugehen, die uns nun schon bei verschiedenen Gelegenheiten entgegen trat. Das gegenwärtige Kapitel soll dazu dienen, die Anschauung jener eigentümlichen Dreiecksfigur, sowie ihrer Beziehung zur Modulgruppe in solcher Weise zu beleben, wie es die spätere Verwendung derselben zur Behandlung unseres gruppentheoretischen Grundproblems als wünschenswert erscheinen lässt.

§ 1. Vorläufige Angaben über den Fundamentalbereich der Modulgruppe.

Wir nannten schon oben zwei Punkte ω', ω der complexen ω-Ebene einander *bezüglich der Modulgruppe äquivalent, wenn der eine aus dem anderen durch irgend eine Modulsubstitution*:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

hervorgeht. Punktepaare dieser Art werden im folgenden immer wieder zu betrachten sein; wollen wir daher bei Angabe ihrer Äquivalenz den Zusatz „bezüglich der Modulgruppe“ sparen, so oft er als selbstverständlich gelten kann.

Unter den cyclischen Gruppen giebt es, wie wir bei Gelegenheit sahen, solche, für welche Fundamentalbereiche nicht existieren. Es sind diejenigen cyclischen Gruppen, welche aus sogenannten aperiodischen elliptischen Substitutionen erzeugt wurden. Um so mehr müssen wir bei einer nicht-

cyclischen Gruppe linearer Substitutionen, welche uns durch ihre Substitutionen gegeben ist, die Frage nach der Existenz eines zugehörigen Fundamentalbereichs zunächst als eine offene betrachten. Aber gerade wie bei der Mehrzahl der cyclischen Gruppen wollen wir auch hier bei der Modulgruppe diese Frage dadurch zur Erledigung bringen, dass wir einen zugehörigen Fundamentalbereich thatsächlich angeben.

Bei diesem Unternehmen machen wir von dem selbstverständlichen Grundsatz Gebrauch, dass Punkte, die bezüglich einer cyclischen Untergruppe der Modulgruppe äquivalent sind, eben deswegen auch bezüglich der Modulgruppe selbst äquivalent sind. Wir schliessen sofort: *Ein Fundamentalbereich der Modulgruppe lässt sich jedesmal völlig innerhalb des Fundamentalbereichs irgend einer der Modulgruppe angehörigen cyclischen Untergruppe anordnen.*

Wählen wir hierbei zuerst die aus der Operation $S(\omega) = \omega + 1$ zu erzeugende cyclische Untergruppe parabolischer Substitutionen. Deren Fundamentalbereich war*) als ein Ebenenband fixiert, das von zwei zur imaginären Axe in der Entfernung $\pm \frac{1}{2}$ von derselben parallelen Geraden begrenzt wurde. Die Punkte der linken Grenzlinie dieses Bereiches sollten demselben zugerechnet werden.

Als eine zweite cyclische Untergruppe nehmen wir die aus $T(\omega) = -\frac{1}{\omega}$ entspringende, deren Fundamentalbereich der ausserhalb des Einheitskreises belegene Teil der ω-Ebene war**). Dabei sollten diejenigen Grenzpunkte demselben zugerechnet werden, welche den zwischen $+i$ und $-i$ über -1 verlaufenden Halbkreis bilden.

Den Fundamentalbereich der Modulgruppe könnten wir demnach einerseits so geformt annehmen, dass er gänzlich zwischen den beiden zur imaginären Axe in den Entfernungen $\pm \frac{1}{2}$ parallelen Geraden gelegen ist, andrerseits aber auch so, dass er sich ganz ausserhalb des Einheitskreises der ω-Ebene befindet. Die Frage, die wir hier weiter aufwerfen, ist aber die: Können wir den gesuchten Bereich nicht so gestalten, dass er die beiden angegebenen Lageneigentümlichkeiten zu gleicher Zeit besitzt? Bringen wir die beiderlei beschriebenen zu S und T gehörenden Fundamentalbereiche zur Überlagerung, was in Fig. 55 (p. 210) geschieht, so bedecken sie gemeinsam einen Bereich der ω-Ebene, der aus zwei getrennten zur reellen Axe symmetrischen Stücken besteht, wie sie in der Figur durch Schraffierung hervorgehoben wurden. Wird sich also innerhalb des so eingegrenzten, aus

*) Cf. § 14 des vorigen Kapitels (p. 194). **) Man sehe die Fig. 48 (p. 193).

zwei getrennt liegenden Stücken bestehenden Bereiches ein Fundamentalbereich der Modulgruppe eingrenzen lassen?

Thatsächlich aber haben wir in dem in Fig. 55 *schraffierten Bereiche selbst bereits einen Fundamentalbereich der Modulgruppe gefunden*, wie wir in dem folgenden Paragraphen zum Nachweis bringen. Bemerken wir nur vorab erst, dass uns die Gestalt des gewonnenen Bereiches keineswegs fremd ist. Der in der positiven Halbebene belegene Teil desselben wird durch die imaginäre Axe in zwei symmetrische Hälften zerlegt, deren linke gerade das Ausgangsdreieck der Fig. 36 (p. 113) darstellt. Der obere Teil des in Fig. 55 gezeichneten Bereiches stellt also den Complex eines schraffierten und eines ihm benachbarten freien Dreiecks der Modulteilung dar und bildet gerade selbst wieder ein Kreisbogendreieck, jedoch mit den Winkeln

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{8}, 0.$$

Der untere Teil des Bereiches Fig. 55 ist einfach das Spiegelbild des oberen an der reellen ω-Axe.

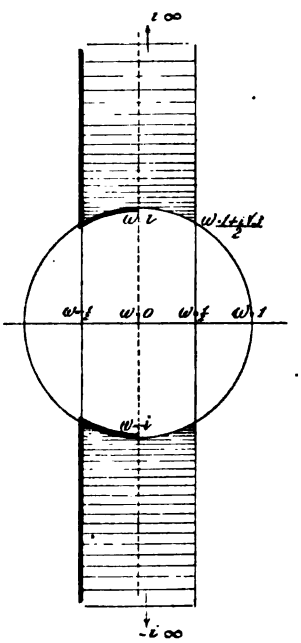


Fig. 55.

Wollten wir schon jetzt in ausführlicher Weise die Modulteilung zum erneuten Gebrauch heranziehen, so würden wir in der That mit Hilfe einer kurzen Schlusskette in Fig. 55 einen Fundamentalbereich der Modulgruppe erkennen. Es würde ein solches Verfahren sogar besonders gut unserer allgemeinen Absicht entsprechen, die geometrische Anschauung und die gruppentheoretische Begriffsbildung in fortwährender lebendiger Beziehung zu halten. Inzwischen wollen wir den Beweis unseres Satzes vorerst auf directem, zahlentheoretischen Wege führen, weil wir uns einerseits derart besser an das voraufgehende Kapitel anschliessen und andererseits so weitere später doch nicht zu umgehende Sätze gewinnen werden. Unsere Überlegung zerfällt in zwei Teile, einen negativen, in welchem wir zeigen, dass der Bereich Fig. 55 keine zwei äquivalente Punkte enthält, und einen positiven, wo zu beweisen ist, dass wirklich jeder Punkt der ω-Ebene einen äquivalenten im Bereiche besitzt*).

*) Für den hier zunächst einzuschlagenden Gedankengang kann man als Originalarbeiten erstlich den oft genannten Dedekind'schen Brief an Borchardt

§ 2. Nähere Betrachtung des Fundamentalbereichs. Negativer Teil des erforderlichen Nachweises.

Wir zeigen zunächst, dass in dem oft genannten Bereich Fig. 55 keine zwei bezüglich der Modulgruppe äquivalente Punkte existieren können, was durch Rückgang auf die in den §§ 13 und 14 des vorigen Kapitels entwickelten Sätze ohne Mühe geschieht. Wären etwa entgegen unserer Behauptung ω' und ω zwei im Bereiche gelegene äquivalente Punkte, so kann bei der Art, wie wir den Bereich gewonnen haben, diese Äquivalenz sicher weder durch eine Operation

$$S^{\beta}(\omega) = \omega + \beta,$$

noch auch durch $T(\omega) = -\frac{1}{\omega}$ vermittelt sein. Zwar geht die linke gerade Grenze des Bereiches durch Anwendung der Substitution S in die rechte über, aber von beiden sollte ja auch nur die eine dem Bereiche zugehören. Desgleichen sind auf den beiden kreisbogenförmigen Grenzstücken des Bereiches die Punkte immer zu Paaren äquivalent, indem sie durch die Operation T in einander übergeführt werden. Aber von diesen beiden Grenzstücken sollten ja auch immer nur die stärker gezeichneten Hälften dem Bereiche zugehörige Punkte liefern.

Notwendig müsste also die Äquivalenz der beiden supponierten Punkte ω', ω unseres Bereiches durch eine Substitution $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ vermittelt werden, die ein $\gamma \gtrless 0$ hat und von T verschieden ist. Dann aber nehmen wir den früher (p. 196) erhaltenen Satz zu Hilfe: Unter den beiden hinsichtlich einer solchen Substitution äquivalenten Punkten ω', ω liegt wenigstens der eine vom reellen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ oder vom anderen $\frac{-\delta}{\gamma}$ in einer Entfernung $\leqq \frac{1}{\gamma}$, γ dabei als positiv gedacht. Nun ziehe man die Lage unseres Bereiches in der ω-Ebene heran. Liegen wirklich ω' und ω beide in demselben, so hätten wir dem genannten Satze zufolge, wie man sieht, notwendig $\gamma = 1$, während zugleich eine der Zahlen α oder δ verschwinden müsste. Wir sehen uns dergestalt auf die Substitutionen beschränkt:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega - 1}{\omega}, \quad \omega' = \frac{-1}{\omega + \delta}.$$

Aber die Substitutionen der ersten Form sind die inversen zu den in

---

in Crelle's Journal Bd. 83 vergleichen, dann aber auch namentlich Hurwitz' Abhandlung *„Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen u. s. w."* Math. Annalen Bd. 18 (1881), p. 528.

der zweiten Form enthaltenen. Da nun inverse Substitutionen der nämlichen cyclischen Untergruppe angehören, so können wir die weitere Betrachtung auf $\omega' = \frac{\alpha\omega - 1}{\omega}$ beschränken. Den Fundamentalraum dieser Substitution bez. der aus ihr entspringenden cyclischen Gruppe hatten wir früher durch zwei Kreise mit dem Radius 1 um $\omega = 0$ und $\omega = \alpha$ eingegrenzt; jedesmal sollten dabei die Punkte des um $\omega = 0$ gelegten Kreises dem so gestalteten Fundamentalbereiche zugehören. Man braucht sich diese geometrischen Verhältnisse nur klar vorzustellen, um zu erkennen, dass der Bereich Fig. 55 bei beliebigem Werte von α gänzlich innerhalb des für die Substitution $\omega' = \frac{\alpha\omega - 1}{\omega}$ angegebenen Fundamentalbereiches gelegen ist. Damit ist aber die Unmöglichkeit unserer Annahme, dass die äquivalenten Punkte ω', ω beide im oft genannten Bereiche liegen, zur Evidenz gebracht.

Den geometrischen Inhalt unserer bisherigen Überlegung können wir in Kürze noch folgendermassen zusammenfassen. Wir denken uns für alle in der Modulgruppe enthaltenen cyclischen Untergruppen die Fundamentalbereiche zu gleicher Zeit in der ω-Ebene entworfen, und zwar gerade in den Gestalten, die wir im vorigen Kapitel für dieselben auswählten. Da zeigt sich, dass ein Bereich (nämlich der in Fig. 55 schraffierte) ausnahmslos *allen* jenen einzelnen Fundamentalbereichen gemeinsam ist. Dass dieser dann keine *zwei* bezüglich der Modulgruppe äquivalente Punkte besitzt, ist sogleich deutlich. Dass er aber auch für *jeden* beliebigen Punkt ω einen äquivalenten aufweist, müssen wir nun noch ausführlicher zeigen.

§ 3. Fortsetzung: Positiver Teil des Nachweises. Willkür in der Gestalt des Fundamentalbereichs.

Um den noch erforderlichen Nachweis zu führen, müssen wir für die Punkte der ω-Ebene eine dreifache Lage unterscheiden. Die reelle ω-Axe ist Bahncurve für jede Modulsubstitution. Ein Punkt der positiven Halbebene ist deshalb stets nur wieder mit einem ebensolchen äquivalent, desgleichen ein Punkt der reellen Axe stets wieder mit einem reellen und endlich ein Punkt der negativen Halbebene nur wieder mit einem Punkte dieser letzteren. Für einen im *Innern* der einzelnen Halbebene gelegenen Punkt müssen wir demnach einen äquivalenten in demjenigen Dreiecksraum nachweisen, welchen Fig. 55 für eben diese Halbebene liefert. Hier gestatten aber beide Halbebenen durchaus die nämliche Behandlungsweise, und es wird genügen, wenn wir dieselbe für eine, etwa die positive durchführen. Die Punkte der reellen Axe betrachten wir hernach für sich.

Indem wir nun rein arithmetisch verfahren wollen, stellen wir uns zuvörderst die Bedingung dafür auf, dass ein Punkt $\omega' = x' + iy'$ dem Dreiecksraum Fig. 55 der positiven Halbebene angehört. Es ist ersichtlich diese:

$$(1) \qquad -\frac{1}{2} \leq x' < \frac{1}{2}, \quad x'^2 + y'^2 \geq 1,$$

mit dem Zusatz jedoch, dass beim Zutreffen des letztgeschriebenen Gleichheitszeichens an Stelle der ersten Ungleichung

$$(2) \qquad -\frac{1}{2} \leq x' < 0$$

tritt. Wenn wir indes für irgend einen Punkt der positiven Halbebene $\omega = x + iy$, $(y > 0)$ einen äquivalenten ω' im Dreiecksraum nachweisen wollen, so genügt es, die Bedingungen (1) allein zu berücksichtigen; denn wäre etwa zufällig $0 < x' < \frac{1}{2}$, $x'^2 + y'^2 = 1$, so hätten wir doch in $\omega'' = -\frac{1}{\omega'} = -x' + iy'$ einen mit ω' äquivalenten Punkt, der den Bedingungen (1), (2) völlig entspräche.

An den willkürlich gewählten Punkt $\omega = x + iy$, der nur der einen Bedingung genügen soll, eine von Null verschiedene positive Ordinate y und übrigens endliche x, y zu besitzen, reihen wir nun, wofern er nicht selbst schon den Bedingungen (1) entspricht, durch abwechselnde Anwendung zweier gewissen Operationen eine endliche Kette mit ω äquivalenter Punkte $\omega_1, \omega_2, \cdots$, deren letzter den Bedingungen (1) entsprechen wird. Erstlich nämlich gehen wir zum äquivalenten Punkte

$$\omega_1 = S^{a_1}(\omega) = \omega + a_1$$

und können dabei die ganze positive oder negative Zahl a_1 nur in *einer* Weise so bestimmen, dass der reelle Bestandteil x_1 von

$$\omega_1 = x_1 + iy_1$$

der Ungleichung

$$(3) \qquad -\frac{1}{2} \leq x_1 < \frac{1}{2}$$

genügt. Ist zugleich $x_1^2 + y_1^2 \geq 1$, so genügen wir mit dem nun gefundenen Punkte ω_1 bereits den Anforderungen (1). Wo nicht, wenden wir auf ω_1 die Operation T an, die zum neuen mit ω äquivalenten Punkte

$$\omega_2 = -\frac{1}{\omega_1} = -\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + i\,\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

hinführt. Da ω und ω_1 dieselbe Ordinate $y = y_1$ haben und zugleich $x_1^2 + y_1^2 < 1$ ist, *so wird die Ordinate* y_2 *von* $\omega_2 = x_2 + iy_2$ *grösser sein als diejenige von* ω. *Nehmen wir insbesondere* $y = y_1 \leq \frac{1}{2}$, *so wird sogar zufolge* (3) y_2 *mindestens doppelt so gross wie* y_1 *sein.*

Es ist jetzt möglich, dass $\omega_2 = x_2 + iy_2$ den Bedingungen (1) genügt, und wir sind dann am Ziele. Ist das aber nicht der Fall, so wiederholen wir dieselben beiden Operationen, die wir gerade auf das anfängliche $\omega = x + iy$ anwandten. Wir schreiten zuvörderst zu

$$\omega_3 = S^{a_2}(\omega_2) = \omega_2 + a_2$$

fort und wählen dabei die ganze Zahl a_2 derart, dass x_3 in $\omega_3 = x_3 + iy_3$ der Ungleichung $-\frac{1}{2} \leqq x_3 < \frac{1}{2}$ genügt. Dann haben wir in ω_3 entweder den gesuchten, den Bedingungen (1) genügenden Punkt gefunden oder bringen aufs neue die Operation T zur Anwendung, indem wir zum neuen äquivalenten Punkte $\omega_4 = -\frac{1}{\omega_3}$ vorgehen.

Jetzt behaupten wir, *dass durch solche abwechselnde Anwendungen der Operationen S und T und zwar nach einer endlichen Anzahl von Schritten auf alle Fälle ein Punkt ω_n erreicht wird, der thatsächlich die Bedingungen* (1) *erfüllt.* Gehen wir nämlich von einem Punkte unserer Reihe durch die Operation T zum folgenden, so gelangen wir, wie oben auseinandergesetzt, zu einem Punkte mit grösserer Ordinate und zwar ist die Ordinate gegen die vorhergehende wenigstens *verdoppelt,* falls letztere $\leqq \frac{1}{2}$ war. Sicher werden wir also nach einer endlichen Reihe von Schritten zu einem Punkte $\omega_k = x_k + iy_k$ gelangen, der, wenn er nicht (1) selbst erfüllt, doch den Bedingungen

$$(4) \qquad -\frac{1}{2} \leqq x_k < \frac{1}{2}, \quad y_k > \frac{1}{2}, \quad x_k^2 + y_k^2 < 1$$

genügt. Dann aber wird, wie wir nun zeigen wollen, ω_{k+2} sicher den Forderungen (1) genügen.

Der Wert ω_{k+2} ist nämlich gegeben durch

$$\omega_{k+2} = x_{k+2} + iy_{k+2} = \frac{-x_k + a(x_k^2 + y_k^2)}{x_k^2 + y_k^2} + i\,\frac{y_k}{x_k^2 + y_k^2},$$

wo die ganze Zahl a so bestimmt zu denken ist, dass

$$-\frac{1}{2} \leqq x_{k+2} < \frac{1}{2}$$

ist. Daneben leitet man aus (4) leicht

$$(1 - ax_k)^2 + a^2 y_k^2 \geqq x_k^2 + y_k^2$$

ab, wie auch die ganze Zahl a heissen mag, und diese Ungleichung setzt sich nach kürzester Rechnung in

$$\left\{\frac{-x_k + a(x_k^2 + y_k^2)}{x_k^2 + y_k^2}\right\}^2 + \left\{\frac{y_k}{x_k^2 + y_k^2}\right\}^2 \geqq 1$$

d. i. in

$$x^2_{k+2} + y^2_{k+2} \geq 1$$

um. *Punkt ω_{k+2} erfüllt also thatsächlich die Bedingungen* (1).

Die Punkte der positiven ω-Halbebene und also auch die der negativen Halbebene sind damit erledigt. Wenden wir uns jetzt zu den Punkten der reellen Axe. Dabei haben wir eine grundsätzliche Sonderung zwischen den rationalen und irrationalen reellen Punkten ω zu treffen.

Sei $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ ein beliebiger unter den ersteren, so denken wir den Bruch $\frac{\alpha}{\gamma}$ auf seine kleinste Benennung gebracht und können dann nach elementaren Sätzen der Zahlentheorie leicht eine Modulsubstitution $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ ausfindig machen, welche als ersten und dritten Coefficienten gerade Zähler und Nenner jenes Bruches hat. Vermöge der gewählten Modulsubstitution erweist sich jetzt $\omega = \infty$ mit $\omega' = \frac{\alpha}{\gamma}$ äquivalent. Aber der erstere dieser Punkte, den wir im Anschluss an Fig. 55 noch besser als $\omega = i\infty$ bezeichnen, gehört dem Dreiecksraum dieser Figur an, indem in der That $\omega = i\infty$ die eine Ecke desselben abgiebt, was man in unmittelbar einleuchtender Weise nach stereographischer Projection der ω-Ebene auf eine Kugeloberfläche überblickt. Wir haben als Resultat, welches wir hier erreichen wollten: *Ein reeller rationaler Punkt ω ist mit dem Punkte $\omega = i\infty$ unseres Dreiecksraumes* (Fig. 55, p. 210) *äquivalent.* Es folgt hieraus nebenbei, dass alle rationalen reellen Punkte unter einander äquivalent sind.

Ist ω jetzt ferner ein reeller irrationaler Punkt, so ist, welche Modulsubstitution auch vorliegen mag, $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ stets wieder ein endlicher irrationaler reeller Punkt. Aber von Punkten der reellen Axe gehört nur $\omega = \infty$ dem Bereiche Fig. 55 an, und diesen Punkt müssen wir, wie gerade gefunden wurde, den reellen rationalen zurechnen. Irgend einen *irrationalen* reellen Punkt besitzt also der oft genannte Bereich nicht. Bei dieser Sachlage würde es weitergehende Betrachtungen wesentlich neuen Charakters erfordern, wenn wir unseren Fundamentalbereich dermassen ausstatten wollten, dass er auch für jeden irrationalen reellen Punkt einen äquivalenten Punkt aufweist. Wir entschliessen uns demnach, an vorliegender Stelle von den irrationalen reellen Punkten überhaupt abzusehen, werden übrigens auch in der Folge zumeist genötigt sein, von einer tiefer dringenden Untersuchung dieser Punkte Abstand zu nehmen.

Wir gewinnen solchergestalt unter Verschärfung unserer bisherigen Ausdrucksweise folgendes Resultat: *Der beschriebene von Kreisbogen bez.*

Geraden begrenzte Dreiecksraum mit den Ecken $\omega = \varrho$, $-\varrho^2$, $+i\infty$ *ist Fundamentalbereich der Modulgruppe für die positive* ω*-Halbebene unter Einschluss der reellen rationalen Punkte* ω. *Einen entsprechenden Satz spricht man sofort für die negative Halbebene und den ihr angehörigen Dreiecksraum der Fig.* 55 *aus.*

Hinzusetzen müssen wir hier übrigens, dass die Gestalt des Fundamentalbereichs der Modulgruppe von vornherein in ähnlichem Grade unbestimmt ist, wie wir dies oben bei den Fundamentalbereichen für die aus Operationen erster Art gebildeten cyclischen Gruppen erkannten. Beachten wir etwa nur den Fundamentalbereich für die positive Halbebene, so benutze man, dass dessen Randcurven teils durch S, teils durch T mit einander correspondieren. Mag man also am Rande des Bereiches ein irgendwie geformtes Stück auslösen und durch Ausübung der bezüglichen Substitution S oder T an der entsprechenden anderen Randstelle wieder anheften, immer wird man wieder einen Fundamentalbereich der Modulgruppe für die positive Halbebene gewinnen. Dass aber in der That auf diesem Wege für die Randcurven des Fundamentalbereichs noch die mannigfaltigsten Gestalten gewonnen werden können, dürfte sofort evident sein. Inzwischen knüpfen die folgenden Entwicklungen zweckmässig an die in Fig. 55 zu Grunde gelegte specielle Gestalt des Fundamentalbereichs an.

§ 4. Einfach und mehrfach äquivalente Punkte.

Hat man bei irgend einer Gelegenheit zwei Punkte ω, ω' als äquivalent erkannt, so kann es sich darum handeln zu entscheiden, wie viele Modulsubstitutionen den einen in den anderen überführen. Sind dies im ganzen die m verschiedenen Substitutionen

$$\omega' = V_i(\omega), \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m), \tag{1}$$

so nennen wir ω', ω mit einander m-fach äquivalent. Die Frage ist, ob es Paare äquivalenter Punkte mit $m > 1$ giebt.

Seien ω' und ω in der positiven Halbebene gelegen, so setzen wir in (1) für ω' z. B. seinen Wert $V_1(\omega)$ und gewinnen dadurch die m neuen Gleichungen $\omega = V_1^{-1}V_i(\omega)$, welche wir unter der Abkürzung $V_1^{-1}V_i = V_i'$ auch

$$\omega = V_i'(\omega), \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

schreiben. Diese m Substitutionen, von denen die erste die identische ist, sind durchgehends von einander verschieden. Ist $m > 1$, so erweist sich somit ω als Fixpunkt einer Substitution V_i, welche

bei der angenommenen Lage des Punktes ω nur eine *elliptische* sein kann. Gehen wir also die Fixpunkte der elliptischen Substitutionen durch, die im § 9 des vorigen Kapitels (p. 182) aufgezählt wurden.

Erstlich mag $\omega = \frac{\alpha + i}{\gamma}$ sein, so gehörte zu diesem Fixpunkte eine cyclische Gruppe *zweiter* Ordnung von elliptischen Substitutionen. In diesem Falle ist also $m = 2$. Nun hat man aber sofort den Satz: Ist ω mit sich selbst m-fach äquivalent, so gilt dasselbe auch von jedem mit ω äquivalenten Punkte. Wir suchen jetzt denjenigen Punkt unseres Fundamentalbereichs, der mit $\omega = \frac{\alpha + i}{\gamma}$ äquivalent ist. Nach dem angegebenen Satze muss dieser auch mit sich zweifach äquivalent und also unter der Form $\frac{\alpha + i}{\gamma}$ enthalten sein, da es nicht noch andere elliptische Substitutionen der Periode zwei giebt, als die unter I (p. 182) genannten. Soll aber $\frac{\alpha + i}{\gamma}$ im Fundamentalbereich gelegen sein, so muss

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \geqq 1$$

sein. Da haben wir nun für die positive Halbebene als *einzige* Lösung dieser Ungleichungen $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, welche den Fixpunkt $\omega = i$ für die aus $T(\omega) = -\frac{1}{\omega}$ zu erzeugende cyclische Gruppe abgiebt. Zusammenfassend haben wir das Resultat: *Zwei Punkte ω' und ω der positiven Halbebene sind stets und nur dann mit einander zweifach äquivalent, wenn sie mit $\omega = i$ äquivalent sind; die in Rede stehenden Punkte sind diejenigen der Gestalt $\omega = \frac{\alpha + i}{\gamma}$.*

Aber es gab noch eine zweite Gattung cyclischer Untergruppen aus elliptischen Substitutionen, nämlich solche von der Ordnung *drei*. Die beiden Fixpunkte einer derartigen Untergruppe der Modulgruppe waren bei $\frac{2\alpha - 1 \pm i\sqrt{3}}{2\gamma}$ gelegen. *Alle somit festgelegten Punkte und zugleich keine weiteren sind sich selbst dreifach äquivalent.* Wollen wir nachsehen, wie viele von ihnen im Fundamentalbereich gelegen sind; dass es dort wenigstens *einen* giebt, ist sicher. Wir haben zu solchem Zweck die ganzzahligen Lösungen der beiden Ungleichungen:

$$(2) \qquad -\frac{1}{2} \leqq \frac{2\alpha - 1}{2\gamma} < \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{2\alpha - 1}{2\gamma}\right)^2 + \frac{3}{(2\gamma)^2} \geqq 1$$

aufzustellen. Aus der ersten von beiden entnehmen wir

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \leqq \gamma^2,$$

während die zweite

$$\alpha^2 - \alpha + 1 \geqq \gamma^2$$

giebt. Durch Subtraction folgt für α die Ungleichung $3\alpha^2 \leqq 3\alpha$, so dass α nur 0 oder $+1$ sein kann. Für $\alpha = 0$ liefert die zweite Bedingung (2) $\gamma = \pm 1$, wovon sich auf Grund der ersten nur $\gamma = +1$ als tauglich erweist. Diese erste Lösung $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ führt auf $\omega = \varrho$, wofern wir auf die positive Halbebene allein achtgeben. Nehmen wir weiter $\alpha = 1$, so giebt die zweite Ungleichung (2) wieder $\gamma = \pm 1$; nun ist aber auf Grund der ersten nur $\gamma = -1$ tauglich. Inzwischen führt auch diese zweite noch existierende Lösung $\alpha = 1$, $\gamma = -1$ doch nur zum schon gefundenen Punkte $\omega = \varrho$ zurück, so dass dieser der *einzige* mit sich selbst dreifach äquivalente Punkt des Fundamentalraums ist. Als Resultat entspringt: *Zwei Punkte der positiven Halbebene sind stets und nur dann mit einander dreifach äquivalent, wenn sie mit ϱ äquivalent sind.* Endlich folgt als Ergänzung: *Für zwei äquivalente Punkte im „Innern" der positiven Halbebene ist m jederzeit gleich* 1, *sofern der ihnen äquivalente Punkt im Fundamentalbereich von i und ϱ verschieden ist.*

Wir wenden uns ferner zur Betrachtung der reellen Punkte, die sich ohne weiteres erledigen. *Für irgend zwei rationale reelle Punkte unter Einschluss von $\omega = i\infty$ ist stets $m = \infty$*, eine leichte Folge des Umstandes, dass jeder solche Punkt Fixpunkt einer cyclischen Gruppe parabolischer Modulsubstitutionen ist.

Die Betrachtung der negativen Halbebene ist mit derjenigen der positiven zugleich mit erledigt. Auch in den weiterhin eintretenden Erörterungen bietet die negative Halbebene gegen die positive keinerlei Besonderheit. Wir werden sie demnach fortan nicht mehr besonders betrachten.

§ 5. Die Substitutionen S und T als Erzeugende der Modulgruppe.

Sei $\omega' = V(\omega)$ irgend eine Modulsubstitution. Wir wollen uns das hier auftretende ω' als Punkt im Fundamentalbereich denken, der jedoch von ϱ und i verschieden sein soll. Punkt ω liegt alsdann irgendwo in der positiven Halbebene und ist zufolge unserer Festsetzung mit ω' nur einfach äquivalent. In § 3 sahen wir nun, wie man diesen Punkt ω durch eine Folge von Anwendungen der Substitutionen S und T in seinen äquivalenten Punkt ω' überführen kann. Sei bei dieser Gelegenheit S a_1-mal, sodann T, dann wieder S a_2-mal und so fort angewandt, so schreiben wir symbolisch:

$$(1) \qquad \omega' = S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T \cdot \cdots \cdot S^{a_2} T S^{a_1}(\omega).$$

Hier wird n, wie wir oben sahen, jedesmal eine *endliche* ganze Zahl sein. Rechnet man die so gewonnene Substitution (1) wirklich aus, so muss man gerade die gegebene Substitution V erhalten, weil ω' und ω nur einfach äquivalent sind. *Man kann demnach jede Modulsubstitution V durch eine endliche Kette von Anwendungen der beiden S, T in der Form* (1) *herstellen, was wir symbolisch durch*

$$V = S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T \dots S^{a_2} T S^{a_1} \tag{2}$$

*andeuten. In diesem Sinne benennen wir S und T als erzeugende Substitutionen der Modulgruppe**).

Es muss sich demnach z. B. die Substitution $U(\omega) = -\frac{\omega + 1}{\omega}$ durch S und T ausdrücken lassen. *Thatsächlich ist, wie man sofort findet*:

$$U = S^{-1} T. \tag{3}$$

Aus dieser Formel entspringt sofort $TSU = 1$, und wir haben ja auch schon früher (p. 58) gesehen, dass die auf einander folgenden Anwendungen von U, S und T zur identischen Substitution führen, welche Thatsache uns damals freilich in wesentlich anderer Gestalt entgegentrat. Da U von der Periode drei ist, so haben wir in $(S^{-1}T)^3$ die identische Substitution; es ist also $(S^{-1}T)^3 = 1$, eine Gleichung, die wir leicht noch in die andere Form überführen:

$$STSTST = 1. \tag{4}$$

Wir nennen diese Gleichung *eine zwischen S und T bestehende Relation***) und folgern aus ihr z. B. für die zu S inverse Substitution den Ausdruck $S^{-1} = TSTST$.

Endlich wollen wir noch Gleichung (1) in expliciter Form aufschreiben. Die Gestalten von S und T, nämlich

$$S(\omega) = \omega + 1, \quad T(\omega) = -\frac{1}{\omega},$$

liefern in diesem Sinne aus (1)

---

*) Entsprechend lässt sich die homogene Modulgruppe aus den beiden homogenen Substitutionen $S: \omega_1' = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$ und $T: \omega_1' = -\omega_2$, $\omega_2' = \omega_1$ erzeugen. Denn sicher erhält man in Formel (2) des Textes, wenn dortselbst S und T diese homogenen Substitutionen sind, die eine der beiden dem Symbol V entsprechenden homogenen Substitutionen (cf. p. 143); die andere ist dann einfach VT^2. Hiermit ist zugleich der oben (p. 59) postulierte Satz über die Herstellung aller Zweigpaare von $\Omega_1(J)$, $\Omega_2(J)$ aus den Ausgangszweigen bewiesen.

**) Solcher Relationen bestehen für S und T übrigens nur die beiden $T^2 = 1$ und $STSTST = 1$, wie noch im gegenwärtigen Abschnitt Kap. 9 § 1 ausführlich gezeigt werden soll.

$$\omega' = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cdots - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + \omega}}},$$

so dass wir also eine *Kettenbruchentwicklung* für die Substitution V erlangt haben.

§ 6. Überdeckung der ω-Halbebene mit äquivalenten Kreisbogendreiecken der Winkel $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$.

Im vorigen Kapitel hatten wir z. B. für den Fall einer cyclischen Gruppe aus hyperbolischen Substitutionen die ganze s-Ebene mit sich an einander anschliessenden ringförmigen Bereichen bedeckt, welche nach den Operationen V^n der Gruppe benannt wurden. Der Bereich 1 (der identischen Substitution entsprechend) war der anfängliche Fundamentalbereich der cyclischen Gruppe, der Bereich V^n ging aus ihm durch die Substitution V^n hervor. An der Art der Überdeckung der Ebene durch diese Bereiche V^n konnten die wichtigsten Eigenschaften der cyclischen Gruppe zur Versinnlichung gebracht werden.

Wir werden jetzt ähnliche Entwicklungen für die Modulgruppe durchführen, wobei wir uns auf Betrachtung der positiven Halbebene beschränken wollen. Den dort gelegenen Teil unseres oben construierten Fundamentalbereichs belegen wir mit dem Namen der identischen Substitution 1 und benennen ihn auch wohl, wie früher schon sehr häufig, als *Ausgangsraum* oder *Ausgangsdreieck*.

Der Bereich 1 hat die Form eines Kreisbogendreiecks, dessen zwei Ecken im Inneren der Halbebene bei $\omega = \varrho$ und $\omega = -\varrho^2$ gelegen sind, während die dritte Ecke als der Punkt $\omega = \infty$ auf der reellen Axe liegt*). Die drei Kreise, welche die Seiten des Dreiecks 1 liefern, stehen dabei senkrecht auf der reellen Axe. Wenden wir jetzt eine beliebige Modulsubstitution V an, so geht das Ausgangsdreieck 1 in eine neue Lage über, die wir nach der dabei benutzten Substitution selbst mit V benennen. Dieser Bereich V ist alsdann seinerseits ein Kreisbogendreieck, dessen Seiten von Kreisen gebildet werden, die zur reellen Axe senkrecht stehen, und dessen Winkel wieder $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$ sind. Die Ecke mit dem Winkel 0 liegt auf der reellen Axe und zwar in einem rationalen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ derselben. Die beiden anderen Ecken sind zwei Punkte im Inneren der Halbebene, die bez. mit ϱ und $-\varrho^2$ äquivalent sind. Zwischen diesen beiden Ecken liegt auf der Berandung des

*) Man halte hier immer die stereographische Projection der ω-Ebene auf eine Kugelfläche zur Veranschaulichung in Bereitschaft.

Dreiecks V ein Punkt, der mit $\omega = i$ äquivalent ist. Von den Randpunkten des so bezeichneten Dreiecks werden nur diejenigen demselben als zugehörig anzusehen sein, welche entweder auf der Seite vom reellen rationalen Eckpunkt bis zu der mit ϱ äquivalenten Ecke $V(\varrho)$ oder aber auf der sich hier anschliessenden Seite zwischen $V(\varrho)$ und $V(i)$ gelegen sind.

Jetzt denken wir uns der Gesamtheit der Modulsubstitutionen entsprechend die Gesamtheit solcher Dreiecke V construiert. Die gegenseitigen Lagerungsverhältnisse derselben müssen dann in charakteristischer Weise zum Ausdruck bringen, dass wir im Ausgangsdreieck thatsächlich einen Fundamentalbereich der Modulgruppe besitzen. Fixieren wir uns im Innern der positiven Halbebene einen beliebigen Punkt ω', der indes vorerst weder mit i noch mit ϱ äquivalent sein soll, so hat derselbe, wie wir wissen, im Fundamentalbereich einen und nur einen äquivalenten Punkt ω und zwar ist er mit demselben *einfach* äquivalent, indem etwa $\omega' = V(\omega)$ wird. Wir schliessen, dass ω' einem einzigen bestimmten Dreieck V angehört, welches von ω' überstrichen wird, wenn ω das Ausgangsdreieck 1 beschreibt. *Die Kreisbogendreiecke V überdecken sonach in ihrer Gesamtheit die ganze positive Halbebene, ohne irgendwo eine Lücke zu lassen, und schliessen sich andrerseits, ohne mit einander zu collidieren, glatt an einander an.* Soll nämlich ein Punkt mehr als einem Dreieck zugehören, so muss er nach unserer früheren Entwickelung entweder mit ϱ oder i äquivalent sein; ϱ und i aber liegen auf der Begrenzung unseres Ausgangsdreiecks, so dass in den genannten Punkten auch nicht etwa mehrere Dreiecke über einander greifen, sondern nur an einander stossen. Wir werden hier an der Verabredung festhalten, die wir betreffs Zugehörigkeit der Randpunkte zu den Dreiecken getroffen haben. Die Sachlage ist dann die, dass an den einzelnen mit ϱ äquivalenten Punkt immer *drei* Dreiecke V heranragen, *denen dieser Punkt als zugehörig zu betrachten ist*, an jeden mit i äquivalenten Punkt aber je *zwei* Dreiecke.

Wir haben auf diese Weise independent eine Reihe von Sätzen gewonnen, welche wir auf der anderen Seite aus der uns bereits bekannten Modulteilung der ω-Halbebene ohne weiteres hätten ablesen können. Benutzen wir nun diese, um die geschilderten Verhältnisse geradezu durch eine Figur zu illustrieren. Wir sagten schon im vorigen Kapitel (p. 180), dass die Kreise der Modulteilung (Fig. 36, p. 113) in zwei Gattungen sich teilen, je nachdem sie aus zwei oder vier Dreiecksseiten zusammengesetzt sind. Denken wir die Kreise der ersten Gattung sämtlich aus der Figur herausgenommen und übrigens die früher gebrauchte abwechselnde Schraffierung der Dreiecke der Modulteilung

vernichtet, so entspringt gerade die Figur, welche den letzt vorauf-gehenden Betrachtungen entspricht. Wir haben in Fig. 56 dieses des näheren ausgeführt und dabei in das einzelne Dreieck die ihm zugehörige Substitution V in der Form eingetragen, wie sie sich aus den Erzeugenden S und T zusammensetzt. Dreieck 1 ist dabei durch Schraffierung besonders hervorgehoben.

In Fig. 56 veranschauliche man sich nun namentlich die Zugehörigkeit der Randpunkte zu den einzelnen Dreiecken. Um diese zum

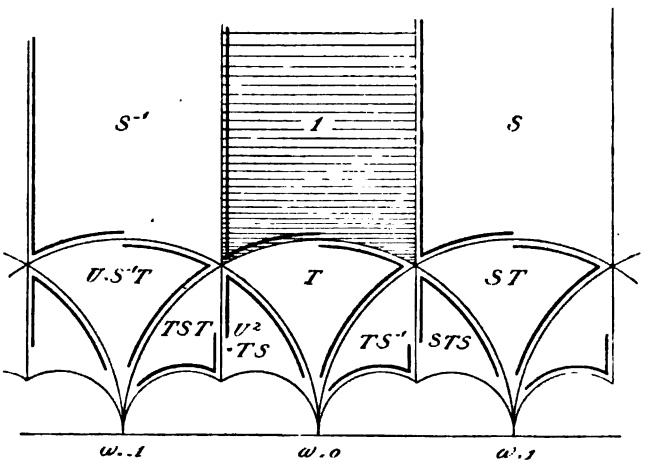


Fig. 56.

Ausdruck zu bringen, sind die Randkreise immer nach Seite des zugehörigen Dreiecks doppelt ausgezogen. Da sieht man denn, dass auch die auf der Berandung der Dreiecke liegenden Punkte im allgemeinen nur einem Dreiecke zuzurechnen sind. Nur ein mit i äquivalenter Punkt gehört auch so noch zwei Dreiecken an und ein mit ϱ äquivalenter Punkt sogar dreien von den sechs Dreiecken, welche ihn rings umlagern. Auf solche Weise kommt die mehrfache Äquivalenz dieser besonderen Punkte mit sich selbst geometrisch zum Ausdruck.

Zur positiven Halbebene rechneten wir übrigens auch noch die rationalen reellen Punkte. Auch sie betreffend giebt uns die in Rede stehende Dreiecksteilung die Versinnlichung eines in § 4 aufgestellten Satzes. Jeder solche Punkt $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ war mit sich selbst ∞-fach äquivalent. Darin erblicken wir jetzt nur die abstracte Formulierung des geometrischen Satzes, dass von jedem rationalen reellen Punkte ein Büschel von unendlich vielen Dreiecken der Teilung in die ω-Halbebene hineinstrahlt.

Wir benutzen endlich Fig. 56 noch zur Einübung einer weiterhin

öfter wiederkehrenden Überlegung. Das einzelne Dreieck V ist längs seiner drei Seiten von drei neuen Dreiecken umlagert, dessen Benennungen wir ausfindig machen wollen. Ist V das Ausgangsdreieck 1, so ist es umlagert von den drei Dreiecken S, T, S^{-1}, wie in Fig. 56 angedeutet. Ist V irgend eine andere Modulsubstitution, so überstreicht $\omega' = V(\omega)$ das Dreieck V, wenn ω das Dreieck 1 beschreibt. Überstreicht des weiteren ω das Dreieck S, so beschreibt $V(\omega)$ das mit V längs des Kreises von $V(i\infty)$ nach $V(-\varrho^2)$ benachbarte Dreieck. Gerade dasselbe benachbarte Dreieck erhalten wir auch, wenn ω in $\omega' = V(\omega+1) = VS(\omega)$ das Ausgangsdreieck beschreibt. *Das in Rede stehende zum Dreiecke V benachbarte Dreieck hat also den Namen VS. In genau analoger Weise erhalten wir für die beiden anderen benachbarten Dreiecke in leicht ersichtlicher Zuordnung die Namen VT, VS^{-1}.* Beachten wir endlich noch, dass U und U^2 die Namen der beiden Dreiecke sind, denen im Verein mit dem Ausgangsdreieck 1 der Punkt ϱ zugehört. Wie soeben folgern wir dann mühelos: *Der einzelne mit ϱ äquivalente Punkt $V(\varrho)$ gehört immer den drei Dreiecken zu: V, VU, VU^2.*

§ 7. Erweiterung der Modulgruppe durch Spiegelungen.

Wir haben im vorigen Kapitel die dort besprochenen cyclischen Gruppen der Substitutionen V^n durch zugehörige Spiegelungen erweitert. War zu diesem Ende bei der einzelnen solchen Gruppe die Spiegelung $\overline{V}$ zur Anwendung gebracht, so bestand „die erweiterte Gruppe" aus den Substitutionen V^n, $V^n\overline{V}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Wir wollen hier versuchen, ob auch die Modulgruppe in analoger Weise einer Erweiterung fähig ist. Die allgemeine Form für die Operationen zweiter Art, welche Spiegelungen darstellen, war (cf. Formel (4), p. 198):

$$(1) \qquad \overline{V}(\omega) = \frac{(a_1 + ia_2)\overline{\omega} + b_1}{c_1\overline{\omega} - (a_1 - ia_2)}.$$

Lassen wir dahin gestellt, ob der spiegelnde Kreis von $\overline{V}$ reell oder imaginär ist, d. i. in anderen Worten, ob die Determinante unserer Substitution $-a_1^2 - a_2^2 - b_1c_1$ negativ oder positiv ist. Immer aber wollen wir doch annehmen, dass diese Determinante den Wert -1 oder $+1$ habe:

$$(2) \qquad a_1^2 + a_2^2 + b_1c_1 = \pm 1,$$

was man durch Modification der vier Substitutionscoefficienten um einen gemeinsamen reellen Factor nötigenfalls stets erreichen kann.

Wenn wir jetzt die Modulgruppe durch die Spiegelung $\overline{V}$ erweitern, so wird sich in der erweiterten Gruppe neben jeder Modul-

substitution V jedenfalls die Operation zweiter Art $V\bar{V}$ vorfinden. Aber genau wie oben bei den cyclischen Gruppen werden wir nun fordern, dass die genannten Substitutionen V, $V\bar{V}$ bereits die ganze erweiterte Gruppe bilden, dass in dieser letzteren also nicht noch neue Operationen erster oder zweiter Art enthalten sein sollen. Zu dem Ende muss offenbar *mit jeder Substitution V auch $\bar{V}V\bar{V}$ eine Modulsubstitution sein*, was wir, einen gewohnten Sprachgebrauch der Gruppentheorie benutzend, dahin formulieren, *dass $\bar{V}$ mit der Modulgruppe vertauschbar sein soll.* Die so gestellte Forderung befriedigt die Spiegelung $\bar{V}$ nun stets, wenn sie die beiden Operationen S und T in sich transformiert. Man zeigt das leicht durch Verwendung des Satzes, dass S und T Erzeugende der Modulgruppe sind, sofern man beachtet, dass $\bar{V}$ selbst, als Spiegelung, die Periode zwei besitzen muss. Wollen wir also nachsehen, ob wir Spiegelungen $\bar{V}$ ausfindig machen können, für welche sowohl $\bar{V}S\bar{V}$ wie auch $\bar{V}T\bar{V}$ wiederum eine Modulsubstitution darstellt.

Indem wir in sofort verständlicher Abkürzung die beiden Operationen erster Art $\bar{V}S\bar{V}$, $\bar{V}T\bar{V}$ nur insoweit namhaft machen, dass wir jeweils nur ihre vier Coefficienten hinschreiben, folgt aus (1) bei der bekannten Gestalt von S und T:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \bar{V}S\bar{V} &= \begin{Bmatrix} a_1^2+a_1c_1+a_2^2+b_1c_1+i\cdot a_2c_1, & -a_1^2+a_2^2-i\cdot 2a_1a_2 \\ c_1^2, & a_1^2+a_2^2-a_1c_1+b_1c_1-i\cdot a_2c_1 \end{Bmatrix}, \\ \bar{V}T\bar{V} &= \begin{Bmatrix} a_1b_1-a_1c_1-i\cdot a_2(b_1+c_1), & a_1^2-a_2^2+b_1^2+i\cdot 2a_1a_2 \\ -a_1^2+a_2^2-c_1^2+i\cdot 2a_1a_2, & -a_1(b_1-c_1)+i\cdot a_2(b_1+c_1) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Hier sollen wir nun Modulsubstitutionen haben. Identificieren wir also diese Substitutionen (3) Coefficient für Coefficient mit den Substitutionen $\begin{pmatrix} e\alpha, & e\beta \\ e\gamma, & e\delta \end{pmatrix}$, wo α, β, γ, δ vier ganze Zahlen der Determinante 1 sind, während um der Allgemeinheit willen ein zunächst noch nicht näher bekannter reeller oder complexer Factor e in den Ausdruck dieser Modulsubstitutionen mit aufgenommen wurde. Wir schliessen indes sofort, dass dieser Factor notwendig ± 1 ist. Denn die Determinante der Substitutionen (3) bestimmt sich auf Grund von (2) zu 1, so dass auch $e^2(\alpha\delta-\beta\gamma)=e^2=1$ sein muss. Indem wir also vom e ganz absehen können, bleibt überhaupt nur die *eine* Bedingung zu fordern, dass die Coefficienten in den beiden Substitutionen (3) reelle ganze Zahlen sein sollen. Das ist aber nur möglich, wenn entweder a_2 verschwindet oder, wofern $a_2 \lesseqgtr 0$ ist, wenn $a_1=b_1=c_1=0$ ist. Die letztere Bedingung führt auf die besondere Operation:

(4) $$\omega' = \bar{\omega},$$

welche übrigens thatsächlich den Anforderungen genügt, indem für sie $\bar{V}S\bar{V} = S$, $\bar{V}T\bar{V} = T$ wird. Verfolgen wir andrerseits weiter die Operationen mit $a_2 = 0$, die wir mit Unterdrückung der unteren Indices der nun durchgehends reellen Coefficienten folgendermassen schreiben:

(5) $$\bar{V}(\omega) = \frac{a\bar{\omega} + b}{c\bar{\omega} - a}, \quad -a^2 - bc = \pm 1.$$

Die Gleichungen (3) nehmen jetzt die besondere Gestalt an:

$$\bar{V}S\bar{V} = \begin{pmatrix} a^2 + ac + bc, & -a^2 \\ c^2, & a^2 - ac + bc \end{pmatrix},$$

$$\bar{V}T\bar{V} = \begin{pmatrix} a(b-c), & a^2 + b^2 \\ -a^2 - c^2, & -a(b-c) \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt, dass a und c ganze Zahlen sein müssen, die zweite fordert dann auch für b einen ganzzahligen Wert. Weitere Bedingungen sind nicht zu befriedigen. Daher der Satz: *Die Modulgruppe ist ausser durch* (4) *auch noch der Erweiterung durch irgend eine Operation der Form* (5) *fähig, wenn dortselbst a, b, c ganze reelle Zahlen sind.*

Mit den unendlich vielen Operationen (5) erhalten wir nun aber keineswegs unendlich viele Erweiterungen der Modulgruppe, sondern überhaupt nur *zwei* verschiedene. Erweitern wir nämlich erstlich durch (4), so haben wir als Operationen zweiter Art der erweiterten Gruppe:

(6) $$V\bar{V}(\omega) = \frac{\alpha\bar{\omega} + \beta}{\gamma\bar{\omega} + \delta},$$

unter denen die Spiegelungen durch $\delta = -\alpha$ charakterisiert sind. Alle ganzzahligen Operationen (5) *positiver* Determinante sind also in der auf diese Weise erweiterten Gruppe bereits enthalten und würden daher an Stelle von (4) gesetzt zu keiner anderen erweiterten Gruppe führen. Erweitern wir aber durch die Operation (5) *negativer* Determinante $\omega' = -\bar{\omega}$, so gewinnen wir als Operationen zweiter Art der erweiterten Gruppe:

(7) $$V\bar{V}(\omega) = \frac{\alpha\bar{\omega} - \beta}{\gamma\bar{\omega} - \delta},$$

welche nun alle ganzzahligen Operationen (5) negativer Determinante umfassen (nämlich für $\alpha = \delta$).

Von den beiden möglichen Erweiterungen der Modulgruppe hat

nur die letztere, die Erweiterung durch Operationen zweiter Art der Determinante — 1, weiterhin für uns Bedeutung. Man bestätigt nämlich leicht, dass durch eine Operation (6) ein Punkt der einen Halbebene ω stets in einen solchen der *anderen* Halbebene transformiert wird, *während durch* (7) *jeder Punkt* ω *in einen Punkt der nämlichen Halbebene übergeführt wird.* Vorgreifend aber bemerken wir, dass späterhin nur den Operationen eine functionentheoretische Bedeutung beigemessen wird, welche einen beliebigen Punkt der einzelnen Halbebene stets wieder in einen Punkt der *nämlichen* Halbebene transformieren*). *Fortan verstehen wir demgemäss unter der erweiterten Modulgruppe immer nur diejenige von den beiden in Rede stehenden Gruppen, welche die Operationen* (7) *als Substitutionen zweiter Art enthält.* Nennen wir also allein diese Operationen *Modulsubstitutionen zweiter Art* und bezeichnen sie generell durch die Abkürzung $\overline{V}(\omega)$.

Die in der erweiterten Gruppe enthaltenen Operationen zweiter Art stellen übrigens keineswegs durchgehends Spiegelungen dar. Solches thun nur diejenigen mit $\alpha = \delta$. Die so bezeichneten Spiegelungen besitzen sämtlich, da sie von der Determinante — 1 sind, *reellen* spiegelnden Kreis. In der That stellt sich derselbe durch die Gleichung

$$\left(x - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2, \tag{8}$$

oder falls $\gamma = 0$ ist, durch

$$2x = \beta \tag{9}$$

dar, $\omega = x + iy$ gesetzt. Machen wir noch zum Unterschied darauf aufmerksam, dass unter den Operationen (6) nur die *eine* $\omega' = \bar{\omega}$ einen reellen Symmetriekreis hat.

Um zu unterscheiden, welcher Unterart die in der erweiterten Modulgruppe enthaltenen Operationen zweiter Art angehören, schreiben wir die Ungleichung (7) p. 199 in den hier vorliegenden Coefficienten, wo sie die Form annimmt:

$$(\alpha^2 + \delta^2 - 2\beta\gamma)^2 = \{(\alpha - \delta)^2 + 2\}^2 \gtreqless 4.$$

Sehen wir von dem Falle $\alpha = \delta$ ab, der auf die Spiegelungen führt, so ist offenbar stets $\{(\alpha - \delta)^2 + 2\}^2 > 4$, und also gewinnen wir vermöge der an der citierten Stelle angegebenen allgemeinen Regel den Satz: *Die Operationen zweiter Art der erweiterten Modulgruppe sind*

*) Man vergleiche dazu auch die obigen functionentheoretischen Erörterungen auf Seite 113 und 114.

entweder Spiegelungen oder hyperbolische Substitutionen zweiter Art; elliptische oder parabolische Substitutionen dieser Art kommen in der erweiterten Gruppe nicht vor.

§ 8. Der Fundamentalbereich der erweiterten Modulgruppe.

Irgend zwei Punkte der positiven ω-Halbebene werden wir bezüglich der erweiterten Modulgruppe äquivalent nennen, wenn der eine durch irgend eine Modulsubstitution der ersten oder zweiten Art in den anderen übergeht. Ein Fundamentalbereich der erweiterten Modulgruppe muss für jeden beliebigen Punkt der positiven Halbebene einen und nur einen äquivalenten Punkt aufweisen. Wollen wir versuchen, einen Bereich dieser Art ausfindig zu machen.

Zu dem Ende ziehen wir die durch (8), (9) § 7 dargestellten Kreise heran, welche die Spiegelkreise für die Modulsubstitutionen zweiter Art der Periode zwei waren. Sicher darf durch das „Innere" des gesuchten Bereiches keiner dieser Kreise hindurchziehen, vielmehr müssen sie analog wie oben bei den erweiterten cyclischen Gruppen, sofern sie überhaupt an dem jetzt gesuchten Fundamentalbereich Teil nehmen, Randcurven desselben abgeben. Ungewiss bleibt dabei noch, ob man den Fundamentalbereich ausschliesslich durch solche Spiegelkreise eingrenzen kann. Gleichung (9) § 7 stellt ein System zur imaginären Axe paralleler Geraden dar, die immer in dem Intervalle $\frac{1}{2}$ auf einander folgen. Zwei auf einander folgende unter ihnen sind z. B. durch $x = 0$ und $2x + 1 = 0$ fixiert. Wir haben sie in Fig. 57 aufgezeichnet und ihnen auch noch denjenigen Kreis hinzugesellt, welcher durch (8) § 7 unter den besonderen Werten $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ gegeben ist.

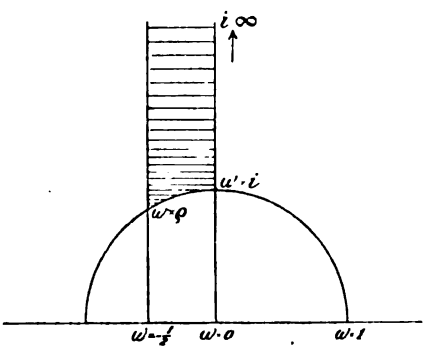


Fig. 57.

Die bezeichneten drei Linien grenzen das in der Figur schraffierte Kreisbogendreieck mit den Ecken bei $\omega = i$, ρ, $i\infty$ und den Winkeln bez. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 ein. Man zeigt durch eine leichte Überlegung, dass keiner der Kreise (8), (9) § 7 durch das Innere des so gewonnenen Bereiches hindurchzieht. Dieser Bereich ist uns nun sehr bekannt; in der That haben wir in ihm das *Ausgangsdreieck* wieder erhalten, von dem aus im vorigen Abschnitt nach dem Symmetriegesetz die ganze

Modulteilung entsprang. *Hier lernen wir dieses Ausgangsdreieck in seiner Eigenschaft als Fundamentalbereich der erweiterten Modulgruppe kennen; denn in der That bildet dasselbe einen solchen,* was leicht gezeigt wird.

Soll nämlich der Punkt $\omega = x + iy$ im construierten Bereich liegen, so ist zu dem Ende die notwendige und hinreichende Bedingung

$$(1) \qquad -\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0, \quad x^2 + y^2 \geqq 1.$$

Aber wo wir auch einen Punkt in der Halbebene annahmen, stets konnten wir doch einen mit ihm äquivalenten Punkt $\omega' = x' + iy'$ nachweisen, der den Bedingungen (1), (2) § 3 entsprach. Ist jetzt die unter (1) gegebene Bedingung $-\frac{1}{2} \leqq x' \leqq 0$ für diesen Punkt nicht zugleich erfüllt, so gehen wir noch zum äquivalenten Punkt $\omega'' = -\bar{\omega}'$ weiter. Dieser wird dann sicher der Bedingung (1) genügen und also im fraglichen Bereiche liegen. Hiermit ist die erste wesentliche Eigenschaft eines Fundamentalbereichs als vorhanden nachgewiesen.

Andrerseits dürfen, wenn wir es mit einem Fundamentalbereiche zu thun haben sollen, im Bereiche Fig. 57 keine *zwei* bezüglich der erweiterten Gruppe einander äquivalente Punkte gelegen sein. Solche lassen sich aber in der That nicht ausfindig machen. Wären nämlich die beiden verschiedenen äquivalenten Punkte ω', ω unserem Bereiche angehörig, so kann nach früheren Sätzen sicher keine Modulsubstitution erster Art ω in ω' überführen. Wir hätten also $\omega' = \bar{V}(\omega)$, wo $\bar{V}$ eine Modulsubstitution zweiter Art sein müsste. Da aber schreibe man $\omega'' = -\bar{\omega}$, und es müssten ω'' und $\omega' = \bar{V}(-\bar{\omega}'') = V(\omega'')$ zwei verschiedene äquivalente Punkte sein, die beide den Bedingungen (1), (2) § 3 genügen und die doch an einander durch eine Modulsubstitution *erster* Art gebunden wären. Solche zwei Punkte giebt es nicht, und eben deshalb können auch die beiden supponierten Punkte ω', ω in unserem Bereiche nicht ausfindig gemacht werden, wie wir beweisen wollten. Übrigens geht zugleich aus unserer Überlegung hervor, dass selbst auf dem Rande unseres Bereiches Paare bezüglich der erweiterten Modulgruppe äquivalenter Punkte nicht ausfindig gemacht werden können. *Wir werden also dem nun gefundenen Fundamentalbereiche der erweiterten Gruppe seine Randpunkte ohne Ausnahme zurechnen,* im Gegensatz zu der Sachlage, die wir oben für den Fundamentalbereich der ursprünglichen Modulgruppe kennen lernten.

Benennen wir nun den gewonnenen Fundamentalbereich mit dem Namen 1 der identischen Substitution, um unsere alte Massnahme

auch hier aufzunehmen. Durch irgend eine Operation der erweiterten Gruppe wird der Bereich 1 alsdann in ein neues Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 transformiert, das wieder den Namen der zur Verwendung gekommenen Substitution tragen soll. *Die so entspringenden Dreiecke, wie sie der Gesamtheit der Modulsubstitutionen erster und zweiter Art entsprechen, werden dann die positive ω-Halbebene vollständig und ohne Lücke bedecken.* Das schliessen wir, wie schon öfter in ähnlicher Weise, aus der allgemeinen Definition des Begriffs Fundamentalbereich.

Aber nun haben wir den vollen Anschluss an das voraufgehende dritte Kapitel erlangt; denn die uns hier vorliegende Bedeckung der Halbebene mit Kreisbogendreiecken ist gerade die, *welche durch die Modulteilung* (*Fig.* 36, *p.* 113) *bewerkstelligt wird.* In der That war ja der Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe mit dem Ausgangsdreieck jener Teilung identisch, und die Substitutionen, welche die directe Kreisverwandtschaft des Ausgangsdreiecks mit den übrigen schraffierten Dreiecken der Teilung darstellten, waren ja gerade die Modulsubstitutionen $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$. *Ganz entsprechend können aber die nicht-schraffierten Dreiecke durch die Substitutionen zweiter Art* $\overline{V}(\omega) = \frac{\alpha\bar{\omega} - \beta}{\gamma\bar{\omega} - \delta}$ *aus dem schraffierten Ausgangsdreieck hergestellt werden;* denn das freie Dreieck, welches sich längs der imaginären Axe an das schraffierte Ausgangsdreieck anlegt, ist augenscheinlich durch $\omega' = -\bar{\omega}$ gegeben, und aus diesem entstehen die sämtlichen anderen freien Dreiecke durch die Operationen erster Art $V(\omega)$.

Erscheint sonach unsere bereits vom ersten Abschnitt her bekannte Figur in einem neuen Lichte*), so können wir sie nun umgekehrt benutzen, um neue Sätze für die erweiterte Modulgruppe abzuleiten. Da haben wir z. B. als sofort ersichtliche Folgerungen: Ein Punkt im „Innern" des Bereiches 1 (Fig. 57 p. 227) ist bezüglich der erweiterten Modulgruppe mit sich selbst einfach äquivalent, indem er nur durch die identische Substitution in sich übergeht. Ein Punkt auf der Berandung dieses Bereiches, jedoch von einem Eckpunkt verschieden, ist mit sich selbst zweifach äquivalent; denn er ist Fixpunkt einer in Betracht kommenden Spiegelung. Aber die Eckpunkte $\omega = i$, ϱ, $i\infty$

*) Man beachte auch, dass wir in (8) und (9) § 7 die Kreise der Modulteilung geradezu durch ihre Gleichungen charakterisiert haben. Leicht könnte man dabei noch für die Coefficienten dieser Gleichungen arithmetisch die Kennzeichen angeben, ob ein Kreis der einen oder der anderen der beiden früher unterschiedenen Gattungen vorliegt.

sind sich selbst bez. vierfach, sechsfach und ∞-fach äquivalent. Der Grad der Äquivalenz anderer Punktepaare der Halbebene wird dann in schon einmal geübter Schlussfolgerung durch Zurückgehen auf die bezüglichen äquivalenten Punkte des Fundamentalbereichs festgestellt.

§ 9. Vergleich der Fundamentalbereiche der ursprünglichen und erweiterten Modulgruppe.

Die Bedeutung der letzten Erörterungen können wir noch dadurch in ein helleres Licht setzen, dass wir den Fundamentalbereich der erweiterten Modulgruppe mit demjenigen der ursprünglichen vergleichen, welche letztere nur die Modulsubstitutionen erster Art umfasste. Diesen letzteren Bereich behalten wir dabei in der früher beschriebenen Gestalt bei und kommen vor allen sogleich auf die Überdeckung der Halbebene durch Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$ zurück, wie wir sie oben in § 6 zu skizzieren hatten. Da wir hier neben einander immer mit Kreisbogendreiecken verschiedener Arten zu thun haben werden, so empfiehlt es sich, vorab noch eine Verschärfung unserer Ausdrucksweise zu verabreden. Wir wollen nämlich, so oft es zur Unterscheidung wünschenswert ist, die Kreisbogendreiecke der eigentlichen Modulteilung (Fig. 36, p. 113) d. h. diejenigen mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0$, welche soeben nach den Operationen der erweiterten Modulgruppe benannt wurden, als *Elementardreiecke* bezeichnen. Alsdann besteht der Fundamentalbereich der ursprünglichen Modulgruppe aus denjenigen beiden benachbarten Elementardreiecken, welche als gemeinsame Seite den Teil der imaginären ω-Axe von $+i$ bis $+i\infty$ besitzen. Diese zwei Elementardreiecke bilden wiederum ein Kreisbogendreieck, nämlich eines mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$, und gemäss seiner eben beschriebenen Bildung wollen wir es als ein *Doppeldreieck**) bezeichnen.

So sollen nun überhaupt, so oft diese Verschärfung der Ausdrucksweise von Vorteil ist, die in § 6 beschriebenen Dreiecke als Doppeldreiecke benannt werden. Immer nämlich entsteht das einzelne durch Combination zweier benachbarter Elementardreiecke, welche die-

*) Im Sinne der jetzigen Construction könnte man den Fundamentalbereich der ursprünglichen Gruppe auch Kreisbogenviereck nennen, insofern der Rand desselben aus *vier* Elementardreiecksseiten besteht. Dass der Fundamentalbereich der ursprünglichen Gruppe aus zwei Fundamentalbereichen der erweiterten besteht, kommt, wie wir sagen können, darauf hinaus, dass die ursprüngliche Gruppe halb soviel Substitutionen besitzt als die erweiterte. Dieses Sachverhältnis wird uns noch wiederholt beschäftigen.

jenige Seite gemeinsam haben, der in den beiden Dreiecken die Winkel 0 und $\frac{\pi}{2}$ anliegen. Im Sinne des § 6 trägt das einzelne solche Doppeldreieck den Namen derjenigen Substitution *erster* Art, den wir im vorigen Paragraphen seinem schraffierten Elementardreiecke beilegten. Das Doppeldreieck 1 nennen wir dabei nach wie vor auch *Ausgangsdreieck für die ursprüngliche Modulgruppe*, während das Elementardreieck 1 *Ausgangsdreieck für die erweiterte Modulgruppe* heisst.

Besonders interessant ist es, wenn wir die Willkür in der Gestaltung der beiden Fundamentalbereiche vergleichend in Betracht ziehen. Wir haben oben schon mitgeteilt, dass der Fundamentalbereich der ursprünglichen Gruppe in der mannigfachsten Weise begrenzt werden konnte, und dass es nur die einfachste Art war, wenn wir denselben durch Kreise bez. Gerade eingrenzten. *Demgegenüber ist der Fundamentalbereich der erweiterten Gruppe von vornherein völlig fest bestimmt* (immer vorausgesetzt, dass wir ihn *zusammenhängend* wählen wollen), weil seine Grenzen als Spiegelkreise gewisser Modulsubstitutionen zweiter Art fest liegen, und es bleibt hier nur die eine Willkür, dass wir uns unter den Elementardreiecken der Modulteilung nach Belieben eines zum Fundamentalbereich auswählen können.

Dieser Satz gewinnt noch an Interesse durch Hinweis auf die erweiterten cyclischen Gruppen am Schlusse des vorigen Kapitels. Auch deren Fundamentalbereiche waren in ähnlicher Weise gestaltlich fest bestimmt. Aber wir konnten doch die Erweiterung einer cyclischen Gruppe noch in mannigfaltiger Weise vornehmen, indem der cyclischen Gruppe als Operation zweiter Art die Spiegelung an irgend einer beliebigen der in Betracht kommenden Niveaulinien hinzugesetzt werden konnte. Ganz anders bei der Modulgruppe, die nur in zwei Weisen der Erweiterung fähig war. Ja, wenn wir uns auf die positive ω-Halbebene beschränkten, was Rücksichtnahme auf künftige Entwicklungen gebot, so blieb nur noch die *eine* Art der Erweiterung als möglich über, die wir thatsächlich vornahmen. Wählt man also bei der Construction der oft genannten Fundamentalbereiche eine Darstellung, welche die Gruppenerweiterung zum Princip macht und also zuvörderst vom Fundamentalbereiche der *erweiterten* Gruppe handelt (sofern eine solche existiert), während von da aus in der beschriebenen Weise zur ursprünglichen Gruppe vorgegangen wird, so ist in der Gestaltung unserer Bereiche jede Willkür, die nicht dem Begriffe des Fundamentalbereichs als notwendig anhaftet, von vornherein ausgeschlossen*).

*) Wir gedenken hier endlich auch noch der drei im vorigen Abschnitt be-

§ 10. Die erzeugenden Operationen der erweiterten Gruppe.

Das Ausgangsdreieck der erweiterten Gruppe, welches als solches den Namen 1 der identischen Substitution trägt, geht durch die drei Spiegelungen an der imaginären Axe, an der durch $2x + 1 = 0$ dargestellten Geraden und endlich am Einheitskreise in die drei benachbarten Dreiecke über. Für diese drei Operationen zweiter Art führen wir die besonderen Benennungen A bez. B und C ein. Es soll also sein (cf. die gleich mitzuteilende Figur 58)

$$(1) \qquad A(\omega) = -\bar{\omega}, \quad B(\omega) = -\bar{\omega} - 1, \quad C(\omega) = \frac{1}{\bar{\omega}},$$

Substitutionen, die in ihrer Bedeutung als Spiegelungen von der Periode zwei sind:

$$(2) \qquad A^2 = 1, \quad B^2 = 1, \quad C^2 = 1.$$

Jetzt sei durch $V(\omega)$ irgend ein schraffiertes oder freies Elementardreieck benannt*), so dass $\omega' = V(\omega)$ dieses Dreieck beschreibt, wenn ω das Ausgangsdreieck überstreicht. Man wird dann leicht sehen, dass die drei mit V benachbarten Elementardreiecke die Namen VA, VB, VC tragen. Nun kann man durch Fortgang zu benachbarten Dreiecken vom Elementardreieck 1 aus überhaupt zu jedem anderen Elementardreieck gelangen. Also folgt aus der gerade erklärten Benennung benachbarter Dreiecke leicht der Satz: *Die drei Operationen A, B, C sind Erzeugende der erweiterten Gruppe, so dass sich jede Substitution dieser Gruppe symbolisch als Product aus den Factoren A, B, C schreiben lässt***). Man bemerke dabei, dass infolge der Gleichungen (2) in diesem Producte nicht derselbe Factor zweimal hinter einander oder gar noch öfter einzutreten braucht.

Je nachdem eine Operation der erweiterten Gruppe durch eine

sprochenen Arten von s-Functionen. Für sie alle liesse sich eine Theorie durchbilden, die der hier für $\omega(J)$ entworfenen bis in die Einzelheiten analog gebaut sein würde. In jedem besonderen Falle hätten wir eine ursprüngliche Gruppe linearer Substitutionen der Variabelen s, welche dann auch durch Hinzunahme gewisser Operationen zweiter Art zu einer erweiterten Gruppe ausgestaltet werden könnte. Da hätte man dann im einzelnen Dreieck der bezüglichen Teilung einen Fundamentalbereich für die erweiterte Gruppe, in zwei neben einander liegenden aber, die, allgemein zu reden, ein Kreisbogenviereck bilden, einen Fundamentalbereich der ursprünglichen Gruppe.

*) Wir begreifen hier also unter V zugleich auch die Modulsubstitutionen zweiter Art mit.

**) Die Erzeugung der erweiterten Gruppe aus den Operationen A, B, C entspricht nun gerade der im vorigen Abschnitt geschilderten Entstehung der Modulfigur vermöge des Symmetriegesetzes vom Ausgangsdreieck aus.

gerade oder ungerade Anzahl von Anwendungen der drei Substitutionen A, B, C hergestellt wird, ist sie von der ersten oder zweiten Art. Insbesondere folgt der Satz: *Die Substitutionen der ursprünglichen Gruppe müssen sich erzeugen lassen aus den besonderen unter ihnen:*

$$AB,\ BA,\ AC,\ CA,\ BC,\ CB, \tag{3}$$

die ersichtlich paarweise zu einander invers sind.

Zur Kenntnisnahme der Bedeutung der Operationen (3) haben

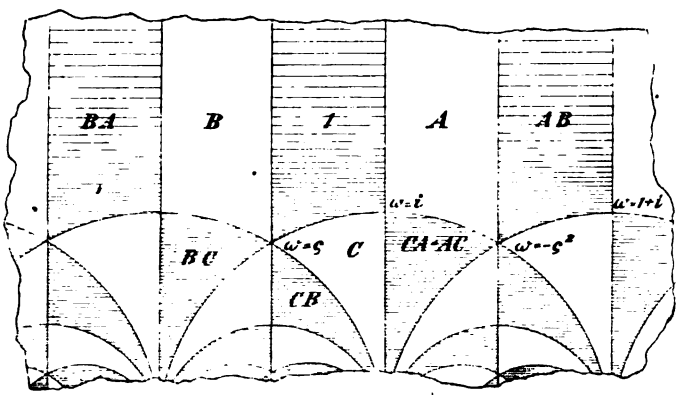


Fig. 58.

wir in Fig. 58 eine Reihe von Elementardreiecken gezeichnet und mit den Namen der bezüglichen Substitutionen versehen. Da sieht man nun leicht, *dass aus den Formeln* (3) *gerade unsere alten Operationen* S, T, U *aufs neue entspringen*:

$$\begin{aligned} AB &= S, \quad BA = S^{-1}, \\ AC &= T, \quad CA = T, \\ BC &= U, \quad CB = U^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Insbesondere entnehmen wir den Formeln (4) neue geometrische Definitionen der Substitutionen S, T, U. *So z. B. bedeutet* T *eine Spiegelung an der imaginären Axe combiniert mit einer solchen am Einheitskreise,* wobei es gleichgültig ist, in welcher Folge diese Operationen ausgeübt werden. Umgekehrt gewinnen wir aus der bekannten Periodicität der Substitutionen T und U für die Erzeugenden A, B, C der erweiterten Gruppe ausser den schon mitgeteilten Relationen (2) noch die beiden anderen:

$$ACAC = 1, \quad BCBCBC = 1. \tag{5}$$

Von diesen constatiert die erste nur die bereits genannte Vertauschbarkeit von A und C.

§ 11. Transformationen der Modulteilung in sich. Bereiche, welche von einem rationalen reellen Punkte ausstrahlen.

Wenn wir irgend eine Modulsubstitution der ersten oder zweiten Art ausführen, so wird die Modulteilung der ω-Halbebene, in ihrer Gesamtheit betrachtet, dadurch in sich selbst transformiert. Freilich wird die Benennung der Elementardreiecke im Sinne des § 8 hierbei eine Modification erfahren und, wofern eine Operation zweiter Art zur Ausführung kam, müsste zugleich die Schraffierung gewechselt werden, wenn die Figur nachher wieder den ursprünglichen Anblick darbieten sollte.

Unter diesen Transformationen der Modulfigur in sich kamen im vorigen Abschnitte bereits die Spiegelungen an den jetzt in § 7 Formel (8) und (9) betrachteten Symmetriekreisen in ausgiebiger Weise zur Geltung. Hier aber wollen wir den Übergang unserer Figur in sich selbst unter Anwendung einer Modulsubstitution *erster* Art noch ein wenig näher schildern. Da kommen uns die geometrischen Deutungen dieser Substitutionen durch ihre Bahncurven und Niveaulinien, wie wir sie im vorigen Kapitel entwickelten, aufs neue zu statten; denn sie geben uns das Mittel, die durch die einzelne Substitution bezeichnete Überführung der Figur in sich der Anschauung nahe zu legen. Volle Anschaulichkeit ist aber gerade das Ziel, das wir in dieser Hinsicht anstreben.

Hier hätten wir nun zunächst von den beiden Arten elliptischer Substitutionen zu handeln, die oben unterschieden wurden, je nachdem der in der positiven Halbebene ω gelegene Fixpunkt mit ϱ oder i äquivalent ist*). Wir wollen indes dabei nicht verweilen, weil eine solche Discussion der elliptischen Modulsubstitutionen bereits in ausreichender Weise in § 8 des vorigen Kapitels gegeben ist.

Wichtiger wird es, dass wir nunmehr die *parabolischen* Substitutionen ausführlich in Betracht ziehen. Eine unter ihnen habe den Fixpunkt $\frac{\alpha}{\gamma}$, so wollen wir uns vorab erst noch darüber unterrichten, welcher Art die Lagerungsverhältnisse der Doppeldreiecke in der Nähe dieses Punktes sind. Eines dieser Doppeldreiecke sei $V_0 = \binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$. Es strahlt dann vom Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ in die Halbebene ein Fächer von unendlich vielen Dreiecken hinein, welche die Namen

*) Man ziehe etwa noch besonders die Substitutionen T und U selbst heran und suche in Fig. 36, p. 113, die Elementardreiecke auf, welche bei den bezüglichen Transformationen der Figur in sich in einander übergehen.

$$V_n = \begin{pmatrix} \alpha, & n\alpha + \beta \\ \gamma, & n\gamma + \delta \end{pmatrix}, \quad (n = -\infty \cdots + \infty)$$

besitzen. Der von der Gesamtheit dieser Dreiecke mit gemeinsamer Spitze $\frac{\alpha}{\gamma}$ bedeckte Bereich soll $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ genannt werden. Wir wollen die Form desselben jetzt des näheren untersuchen*), was um so wichtiger ist, als augenscheinlich die Gesamtheit der Dreiecke der Modulfigur durch den Inbegriff der von sämtlichen rationalen Punkten $\frac{\alpha}{\gamma}$ ausstrahlenden Bereiche $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ erschöpft wird.

Zu den Bereichen $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ gehört auch $B(i\infty)$, und gerade dieser Bereich ist der Anschauung besonders leicht zugänglich. Ziehen wir zur reellen Axe zwei Parallele durch $\omega = i$ bez. $\omega = \varrho$, so verläuft die Begrenzung dieses Bereiches, wie in Figur 59 zur Anschauung gebracht ist, zwischen diesen beiden Parallelen. Sie ist gebildet durch eine unendliche Kette von Kreisbogen, welche sämtlich die durch $\omega = i$ gezogene Horizontalgerade berühren und dann zu beiden Seiten des jeweiligen Berührungspunktes bis zu der durch ϱ hindurchlaufenden Horizontalgeraden sich erstrecken, welche letztere sie unter dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ erreichen.

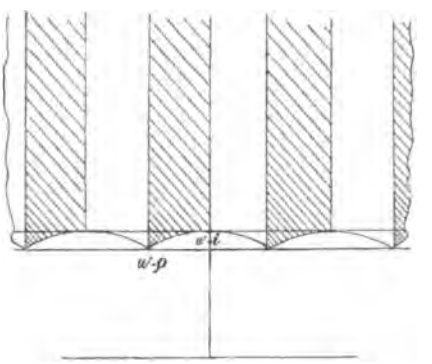


Fig. 59.

Vermöge der bekannten Sätze über die Kreisverwandtschaft erfahren wir hieraus sofort die Gestalt eines beliebigen Bereiches $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$. Wir ziehen zwei die reelle Axe in $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ berührende Kreise, den ersten durch $\frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}$, den zweiten durch $\frac{\alpha\varrho + \beta}{\gamma\varrho + \delta}$. Wir entwerfen sodann eine Kette von Kreisbogen, welche durchgehends zwischen jenen beiden Kreisen gelegen sind. Den ersten sollen alle diese Bogen berühren, den zweiten sollen sie immer unter dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ erreichen. Das System dieser consecutiven Kreisbogen ist völlig bestimmt, wenn

*) Für die Darstellung des Textes ist namentlich Dedekind's Erörterung in Cr. J. Bd. 83 p. 273 massgeblich gewesen.

wir etwa noch für einen ersten unter ihnen den Punkt $\frac{\alpha i+\beta}{\gamma i+\delta}$ als Berührungspunkt mit dem kleineren unter jenen beiden Kreisen an-

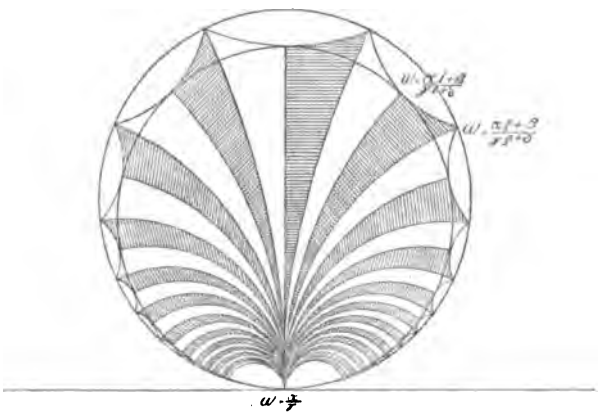


Fig. 60.

geben. Der Bereich bietet sonach den hier in Fig. 60 angedeuteten Anblick dar*).

Möge man sich jetzt auf geradliniger Bahn dem Punkte $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ von der positiven Halbebene aus annähern, und zwar zunächst senkrecht gegen die reelle Axe. Diese Bahn wird nur eine *endliche* Zahl von Elementardreiecken durchziehen; denn sie wird sich alsbald in demjenigen Dreiecke von $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ befinden, dessen beide von $\frac{\alpha}{\gamma}$ auslaufenden Grenzen einander ihre convexe Seite zukehren. Erreicht unsere Bahn die reelle Axe unter endlichem, jedoch nicht rechtem Winkel, so wird sie stets vor Erreichung des Zieles *unendlich viele* Dreiecke durchziehen. *Aber sie wird nach Durchlaufung einer endlichen Zahl von Dreiecken in* $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ *hineinführen und alsbald nur noch Dreiecke dieses Bereiches, diese dann freilich in unendlicher Zahl durchlaufen.* Ähnliche Verhältnisse treten ein, wenn wir uns dem Punkte $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ auf krummliniger Bahn nähern, die unter endlichem Winkel auf die reelle Axe auftrifft. Ja, wir können sogar annehmen, dass unsere Bahn am Ziele die reelle Axe berührt. *Wenn nur dortselbst*

*) Diese Figur 60 ist übrigens nur schematisch zu verstehen; es wird z. B. im allgemeinen nicht eintreten, dass die Seite eines dem Bereiche $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ angehörenden Elementardreiecks geradlinig ausfällt.

der Krümmungsradius unserer Bahn kleiner ist als der Radius jenes obigen Kreises durch $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}$, *so werden wir immer nach Durchlaufung einer endlichen Zahl von Dreiecken weiterhin durchaus im Bereiche* $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ *verbleiben.*

Nach diesem Versuche, die Lagenverhältnisse der vom Fixpunkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ einer parabolischen Substitution V ausstrahlenden Dreiecke zu erklären, möge man der Ebenenbewegung gedenken, durch welche wir diese Substitution V deuteten. Der Bereich $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ wird dabei in sich übergeführt, indem seine Dreiecke ohne ihre Reihenfolge zu ändern eine „Verschiebung" innerhalb des Bereiches nach der einen oder anderen Richtung erfahren (wobei sich das einzelne Dreieck, wenn wir auf seine Dimensionen achten wollen, ersichtlich dehnen oder zusammenziehen wird). Alle von $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ ausgehenden Seiten dieser Dreiecke fungieren dabei als Niveaulinien von V, und indem wir sie über $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ hinaus verlängern, gewinnen wir eine Anschauung davon, wie die ausserhalb $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ gelegenen Dreiecke in einander übergehen. Da sieht man vor allem, wie bei öfter wiederholter Anwendung von V aus der einen der beiden Spitzen, mit denen sich die positive Halbebene zwischen dem Bereiche $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ und der reellen Axe an $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ herandrängt, unaufhörlich neue Dreiecke hervorquellen, während die bislang vorhandenen Dreiecke auf die andere Spitze zu gedrängt werden und in dieser versiegen. Immer werden dabei die übrigen Bereiche $B\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)$ in einander ungeteilt übergehen, d. h. ohne dass der einzelne etwa zerstückt würde. In jenen beiden unendlich schmal auslaufenden Spitzen zwischen $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ und der reellen Axe sind also noch unbegrenzt viele Bereiche $B\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)$ enthalten, wie sehr wir uns auch in diesen Spitzen dem Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ genähert haben mögen. Dies stimmt durchaus mit jener Vorstellung von der Modulteilung überein, wie sie schon im vorigen Abschnitt gewonnen wurde.

Nun endlich möge man auch eine *hyperbolische* Modulsubstitution V in Betracht ziehen, deren beide Fixpunkte, wie wir wissen, reell und irrational sind. Aber wie beschaffen auch ein irrationaler reeller Punkt ω_0 sein mag, nähern wir uns demselben aus der positiven Halbebene

auf einer Bahn, die etwa gegen die reelle Axe senkrecht gerichtet oder unter endlichem Winkel geneigt ist, so wird diese immer *unendlich viele Bereiche* $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ durchziehen, ehe sie zum Ziele ω_0 kommt. Fort und fort werden übrigens die durchzogenen Bereiche $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ kleiner und kleiner werden, und es werden also die hierbei in Betracht kommenden rationalen Werte $\frac{\alpha}{\gamma}$ sich dem Werte nach mehr und mehr dem irrationalen Zahlwerte ω_0 annähern, der aber für endlich bleibende Zahlen α und γ nie vollständig erreicht wird.

Die Bahncurven einer hyperbolischen Substitution V ziehen nun gerade in der hier gemeinten Weise an die beiden irrationalen Fixpunkte hinan (nämlich so, dass sie die reelle Axe unter endlichem Winkel schneiden). Da wird also die Modulteilung unter Anwendung von V derart in sich transformiert werden, dass der einzelne Bereich $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ in der Kette derjenigen Bereiche B verschoben wird, welche in eben skizzierter Weise mit ihm auf die nämliche Bahncurve aufgereiht sind. Es ist dabei keineswegs gesagt, dass $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ durch einmalige Anwendung von V etwa in den nächstfolgenden Bereich $B\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)$ dieser Reihe übergeht; $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ könnte gleich in den 2ten, 3ten, sagen wir gleich in den ν^{ten} übergehen. Nur ist dabei ν eine *endliche* Zahl; denn zwischen der ersten und neuen Lage von $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ findet sich doch nur eine endliche Zahl von Elementardreiecken vor. Aber freilich müssen wir bei all diesen Betrachtungen sehr betonen, dass die in Rede stehende Bahncurve dem „Innern" der positiven Halbebene angehören soll. Leicht sieht man nämlich, dass die gemeinte Zahl ν für die nämliche Substitution grösser und grösser wird, je mehr sich die herausgegriffene Bahncurve in ihrem Gesamtverlaufe der reellen Axe annähert. Auf die beiden Bahncurven, welche von den Stücken der reellen Axe gebildet werden, die durch die beiden Fixpunkte von V begrenzt sind*), findet unsere Überlegung keine Anwendung. Die hiermit besprochenen Verhältnisse gewinnen übrigens, wie wir hier voraus bemerken, unter Zugrundelegung der zur reellen Axe orthogonalen Bahncurve von V im folgenden Kapitel eine wichtige Anwendung auf die Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen.

*) Die eine von diesen beiden Bahncurven zieht durch den Punkt $\omega = \infty$, wo sie jedoch als zusammenhängend zu denken ist; man übertrage sich die Figur auf die complexe ω-Kugel.

§ 12. Projection der Modulfigur in eine geradlinige Dreiecksfigur.

Zum Schlusse besprechen wir noch eine merkwürdige Projection der Modulteilung, die wir allerdings weiterhin nicht gebrauchen werden, die aber wegen ihrer innigen Beziehung zur synthetischen Geometrie besonders bemerkenswert ist. Man beziehe in irgend welcher nicht näher zu specificierenden Weise die ω-Ebene stereographisch auf eine Kugeloberfläche, wobei irgend ein Kugelkreis K Träger der reellen Werte ω wird. K zerlegt die ganze Kugelfläche in zwei Kugelcalotten, von denen die eine der positiven ω-Halbebene entspricht. Diese Calotte wird der Modulteilung entsprechend eine Überdeckung mit unendlich vielen Kreisbogendreiecken tragen, deren Seiten von Kreislinien gebildet werden, welche auf K orthogonal stehen.

Wir denken uns jetzt alle diese Dreiecksseiten, welche die Symmetriekreise der Modulteilung lieferten, auf der Kugeloberfläche durch bezügliche Ebenen zum Ausschnitt gebracht. Da der durch die einzelne solche Ebene auf der Kugel ausgeschnittene Kreis zu K orthogonal verläuft, so geht diese Ebene durch den Pol P, welcher der zu K gehörenden Ebene bezüglich der Kugel zugeordnet ist. Die Gesamtheit der Ebenen, welche den Symmetriekreisen der Modulteilung solchergestalt entsprechen, gehört also dem Ebenenbündel durch P an. Dabei entspricht dem einzelnen Elementardreieck der positiven ω-Halbebene ersichtlich eine dreiseitige Ecke, welche von drei Ebenen unseres Ebenenbündels eingegrenzt wird. Alle diese dreiseitigen Ecken schliessen sich gerade glatt an einander und erfüllen vollständig das Innere des zum Kugelkreis K gehörenden vom Punkte P ausgehenden Tangentenkegels, indem sie sich gegen dessen Mantel hin allenthalben unendlich dicht zusammendrängen.

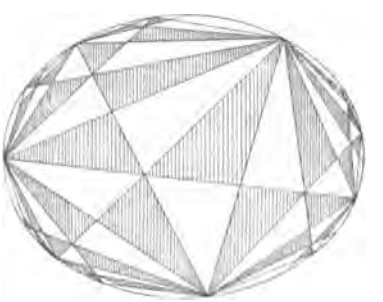


Fig. 61.

Bringen wir nun unser System dreiseitiger Ecken mit einer beliebigen Ebene E zum Durchschnitt, die jedoch P nicht enthalten soll. Diese wird dann den eben gemeinten Tangentenkegel in einem Kegelschnitt durchschneiden, und wir wollen insbesondere, der Einfachheit halber, E so gelegt denken, dass dieser eine Ellipse werde. Jede dreiseitige Ecke bildet dann im ebenen Durchschnitt *ein geradliniges Dreieck, und die Gesamtheit dieser den Elementardreiecken der positiven Halbebene eindeutig zugeordneten geradlinigen Dreiecke bedeckt das Innere jener Ellipse vollständig und ohne Lücke.* Wir denken uns die gerad-

linigen Dreiecke, wie in Fig. 61 angedeutet, wechselweise schraffiert, wobei die schraffierten Dreiecke im Ellipseninneren den schraffierten Dreiecken der ω-Halbebene zugewiesen sein sollen. Damit haben wir die neue Form der Dreiecksteilung gewonnen, um die es sich handeln sollte.

Nun ist die Sachlage die, dass wir für eine independente Erzeugung unserer neuen Figur auf Grund weniger Sätze der projectiven Geometrie eine überaus elegante Constructionsregel besitzen. Wir erinnern zuvörderst daran, dass man in der Geometrie verschiedene Kegelschnitte unter sich, sowie auch Kegelschnitte auf gerade Punktreihen projectiv zu beziehen pflegt. In zwei solchen auf einander projectiv bezogenen Gebilden entsprechen dann insbesondere stets vier harmonischen Punkten des einen wieder vier ebensolche Punkte des anderen. Dabei ist die Beziehung völlig festgelegt, wenn wir drei Punkten des einen Gebildes nach Willkür drei Punkte des anderen zuordnen.

Nun liegt zwischen der reellen ω-Axe und der Ellipse (Fig. 61) durch Vermittlung des Kreises K eine eindeutige Beziehung vor. Man erkennt diese Zuordnung sofort als eine projective, *so dass insbesondere vier harmonischen Punkten auf der reellen ω-Axe ein gleichfalls harmonisches Punktquadrupel auf der Ellipse entspricht.* Darüber hinaus beachte man, dass die in Rede stehende projective Beziehung erst dadurch eindeutig festgelegt ist, dass man drei Punkten der reellen ω-Axe nach Willkür drei Punkte der Ellipse zuordnet. In der That enthält unsere oben vollzogene Projection so viele willkürliche Elemente, dass wir nicht nur unsere Ellipse beliebig annehmen mögen, sondern dann noch drei reellen Punkten ω drei Punkte der Ellipse willkürlich zuweisen können.

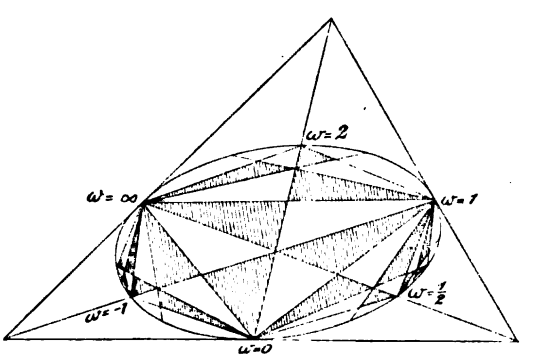


Fig. 62.

In diesem Sinne sind hierneben in Fig. 62 drei Punkte der Ellipse den Punkten $\omega = 0, 1, \infty$ zugeordnet und nach diesen ω-Werten benannt. Demnächst fixieren wir in der ω-Halbebene die drei durch

$$x = 0,\ x = 1,$$
$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}$$

dargestellten Symmetriekreise, von denen der erste die Punkte $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, der zweite die Punkte $\omega = \infty$ und $\omega = 1$, der dritte endlich $\omega = 1$ und $\omega = 0$ verbindet. Diese drei Symmetriekreise

werden in der Ellipse die geraden Verbindungslinien der drei markierten Punkte ergeben. Das aus sechs Elementardreiecken bestehende Kreisbogendreieck mit den Ecken $\omega = 0, 1, \infty$, wie es von jenen drei Symmetrielinien eingegrenzt wird, giebt uns also in der Ebene E das geradlinige Dreieck mit den drei $\omega = 0, 1, \infty$ entsprechenden Punkten der Ellipse als Ecken.

Nach dem Symmetriegesetz lagern wir nun in der ω-Ebene um jenes Kreisbogendreieck mit den Ecken $\omega = 0, 1, \infty$ drei neue benachbarte Dreiecke, die dann jeweils auch aus sechs Elementardreiecken bestehen. Wir richten auf irgend eines dieser drei Dreiecke unsere Aufmerksamkeit. Dasselbe hat mit dem ursprünglichen Dreieck zwei Ecken gemein; *aber die dritte Ecke des neuen Dreiecks ist von der dritten des ursprünglichen durch die beiden gemeinsamen Ecken harmonisch getrennt*, wie das im Symmetriegesetz begründet liegt. Wollen wir jetzt diese Verhältnisse auf das eine schon gezeichnete geradlinige Dreieck der Fig. 62 übertragen, so entspringt aus der projectiven Beziehung der reellen ω-Axe auf die Ellipse der nachfolgende Satz: Neben das erste Dreieck, das die $\omega = 0, 1, \infty$ entsprechenden Punkte der Ellipse zu Ecken hat, lagern sich drei neue. *Das einzelne von ihnen hat mit dem ersten zwei Ecken gemein, während seine dritte Ecke von der dritten Ecke des ersten Dreiecks durch die gemeinsamen Eckpunkte auf der Ellipse harmonisch getrennt ist.*

Für die Construction des vierten harmonischen Punktes auf der Ellipse ziehen wir nun eine sehr bekannte Regel heran und benennen dabei die Punkte der Ellipse geradezu nach den bezüglichen reellen ω-Werten. Man ziehe in den drei Punkten $0, 1, \infty$ der Ellipse die drei Tangenten, welche ein der Ellipse umschriebenes Dreieck bilden. In diesem verbinde man jede Ecke mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite durch eine Gerade. *Diese drei Geraden schneiden dann auf der Ellipse die drei den Werten* $\omega = -1, \frac{1}{2}, 2$ *entsprechenden Punkte aus und liefern in ihnen die neuen Ecken für die dem ersten benachbarten Dreiecke. Aber zugleich werden diese drei Geraden die Unterteilung jenes ersten Dreiecks in seine sechs Elementardreiecke ergeben;* denn sie entsprechen ersichtlich denjenigen Symmetriekreisen der ω-Halbebene, welche dort das Analoge leisten.

Wir haben diese Verhältnisse in Fig. 62 veranschaulicht, und man überzeuge sich nun an der Hand dieser Figur, dass die Construction, wie wir sie eben für das Dreieck mit den Ecken $0, 1, \infty$ ausführten, jetzt aufs neue Anwendung gestattet auf die neu hinzugekommenen benachbarten Dreiecke. Da werden wir z. B. für das Dreieck mit den Ecken

0, $\frac{1}{2}$, 1 das entsprechende umschriebene Dreieck vollständig zeichnen und nun wieder die Ecken dieses Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten seiner Seiten durch Gerade verbinden. So werden wir neben den beiden neuen benachbarten Dreiecken zugleich die Unterteilung des jetzt betrachteten in seine sechs Elementardreiecke gewinnen. Es ist ersichtlich, wie diese Constructionsregel immer wieder aufs neue ihre Anwendung findet. Letzten Endes werden wir das ganze Innere der Ellipse einfach und lückenlos mit lauter geradlinigen Dreiecken überdeckt haben, welche sich gegen die Ellipse selbst allenthalben in unendlichen Schaaren herandrängen. Dies ist dann eine mit dem Lineal allein construierbare Figur, welche der Modulteilung der ω-Halbebene genau entspricht und statt ihrer z. B. auch für zahlentheoretische Zwecke mit besonderem Vorteil benutzt werden kann*).

*) Ich habe diese Figur (an die sich eine Menge weiterer geometrischer Bemerkungen anknüpfen) in meinen Vorlesungen von 1877 an wiederholt zur Sprache gebracht, weil dieselbe auch unter rein synthetischen Gesichtspunkten sehr bemerkenswert ist. Sie giebt uns nämlich das übersichtlichste Bild für die constructive Erledigung der in der synthetischen Geometrie fundamentalen Aufgabe, ein einförmiges Grundgebilde (hier unsere Ellipse) dadurch mit unendlich vielen Elementen zu überdecken, dass man zu drei willkürlich gegebenen Elementen desselben immer wieder das vierte harmonische construiert. Im Herbst 1878 hatte ich mit dem verstorbenen Clifford eine lebhafte Unterhaltung darüber, dass man es als Aufgabe der modernen Mathematik betrachten müsse, die uns überkommenen, getrennt neben einander stehenden mathematischen Disciplinen in lebendige Wechselwirkung zu setzen; wir kamen überein, dass dies für synthetische Geometrie und Zahlentheorie am schwierigsten sein möchte. *Die Figur* (62) *des Textes stellt diese Verbindung her.* Man wolle in dieser Hinsicht insbesondere die zahlentheoretischen Entwicklungen des folgenden Kapitels vergleichen.

Klein.

Drittes Kapitel.

Von den ganzzahligen binären quadratischen Formen und der Gleichberechtigung der Modulsubstitutionen.

Fanden wir soeben die Modulteilung der ω-Halbebene in innigster Beziehung zur synthetischen Geometrie stehend, so soll in diesem Kapitel deren zahlentheoretische Bedeutung durch Eingehen auf ein besonderes Kapitel der Zahlentheorie näher entwickelt werden. Es soll sich um die ganzzahligen binären quadratischen Formen handeln und insbesondere um ihre Äquivalenz und Reduction. Ohnedies ist dieser Excurs erforderlich für die weitere Einzelbetrachtung der aus den Modulsubstitutionen gebildeten cyclischen Gruppen, deren Untersuchung wir im ersten Kapitel unterbrachen.

Übrigens sind im Verlaufe dieses Kapitels unter Modulsubstitutionen schlechtweg immer nur die Operationen erster Art verstanden. Dreieck sagen wir demnach kurz, wo statt dessen genauer Doppeldreieck stehen sollte, und äquivalente Punkte sind immer homologe Punkte zweier Doppeldreiecke. Es wäre keineswegs unmöglich, auch die Operationen zweiter Art der erweiterten Modulgruppe heranzuziehen. Doch berühren wir dieselben nur an einer einzigen Stelle unter dem Texte nebenher.

§ 1. Benennung der quadratischen Formen*).

Man ist in der Zahlentheorie gewohnt, die binäre quadratische Form im Anschluss an Gauss in der Gestalt:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1}$$

zu fixieren. Von den drei ganzen Zahlen a, $2b$, c ist also die mittlere von vornherein als gerade angenommen, eine Festsetzung, von der wir

*) Man vgl. hier überall den vierten Abschnitt in Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von Dedekind (dritte Auflage, Braunschweig 1879).

nur ganz beiläufig einmal abweichen werden. Als abgekürzte Bezeichnung für die quadratische Form (1) brauchen wir fortan diese:

$$(a, b, c).$$

Die ganze Zahl $b^2 - ac$ bezeichnet man als *Determinante der quadratischen Form:*

$$D = b^2 - ac. \tag{2}$$

Bei den weiterhin zu besprechenden Problemen ist der Wert der Determinante für die einzelne quadratische Form von grösster Wichtigkeit. Ist die Determinante eine positive Quadratzahl einschliesslich der Null, so lässt sich die Form (1) in zwei Linearfactoren mit rationalen numerischen Coefficienten spalten. Solche Formen bleiben hier ganz ausser Betracht. Die übrigen Formen teilen wir je nach dem Vorzeichen von D in quadratische Formen von *positiver* und solche von *negativer Determinante* ein. Bei diesen letzteren müssen ersichtlich der erste und dritte Coefficient a und c das gleiche Vorzeichen tragen. Je nachdem dieses das positive oder negative ist, spricht man in diesem Falle von einer *positiven bez. negativen Form.*

Endlich bezeichnet man die grösste ganze Zahl σ, welche a, $2b$ und c zugleich teilt, *als Teiler der quadratischen Form* (a, b, c).

Nachdem wir so an die wichtigsten in der Theorie der quadratischen Formen gebräuchlichen Benennungen erinnert haben, wenden wir uns jetzt sogleich zur Betrachtung des ersten Hauptproblems dieser Theorie, desjenigen von der Äquivalenz der quadratischen Formen.

§ 2. Von der Äquivalenz der quadratischen Formen.

Wir fassen hier das Äquivalenzproblem der Formen nicht in der allgemeinsten Gestalt, sondern sogleich derart specialisiert, wie es weiterhin gebraucht wird. Es seien α, β, γ, δ vier ganze Zahlen der Determinante 1:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

so schreiben wir

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y$$

und führen an Stelle der x, y die x', y' in eine vorliegende quadratische Form ein. Es entspringt dergestalt die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

wobei sich die a', b', c' ohne Mühe durch die a, b, c und die Substitutionscoefficienten α, β, γ darstellen lassen. Die beiden Formen

$$(a, b, c), \quad (a', b', c')$$

tragen alsdann den Namen *äquivalenter Formen,* und es entspringt das

Problem, die Formenäquivalenz der näheren Untersuchung zu unterziehen.

Die Substitution $x' = -x$, $y' = -y$ lässt jegliche Form unverändert, und also führen auch die beiden Substitutionen

$$x' = \alpha x + \beta y, \quad y' = \gamma x + \delta y$$

und

$$x' = -\alpha x - \beta y, \quad y' = -\gamma x - \delta y$$

die einzelne Form in die nämliche neue über. Das hat ersichtlich zur Folge, *dass wir gerade unsere nicht-homogenen Modulsubstitutionen*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{1}$$

als diejenigen Substitutionen ansprechen können, welche die quadratischen Formen in äquivalente überführen. Dieser Auffassungsweise werden wir dann dadurch Rechnung tragen, dass wir statt der Zahlen x, y deren Quotienten $\omega = x : y$ einführen und dementsprechend unsere einzelne quadratische Form (a, b, c) auch wohl in der Gestalt

$$a\omega^2 + 2b\omega + c$$

schreiben. Nur müssen wir dann jedesmal nach Ausführung einer Substitution (1) zur Entfernung des dabei sich einstellenden Nenners mit $(\gamma\omega' - \alpha)^2$ multiplicieren.

Nachdem wir so Fühlung mit dem vorigen Kapitel gewonnen haben, machen wir noch kurz auf die Thatsache aufmerksam, *dass äquivalente Formen stets die gleiche Determinante besitzen;* es entspricht dieser Satz der in der Algebra wohlbekannten Invarianteneigenschaft der Discriminante quadratischer Formen.

Wir geben nun gleich die beiden Probleme an, um deren Auflösung es sich in der Lehre von der Äquivalenz der Formen zunächst handelt. Liegen zwei Formen *derselben* Determinante vor, so gilt es erstlich zu entscheiden, *ob sie äquivalent sind oder nicht.* Trifft Äquivalenz zu, so reiht sich dem das zweite Problem an: *Alle Substitutionen*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

anzugeben, welche die eine Form in die andere überführen.

Bei der Beantwortung dieser Fragen zeigen die Formen positiver Determinante ein ganz anderes Verhalten als diejenigen von negativer. In jeder Beziehung einfacher gestaltet sich die Untersuchung der letzteren; mit ihnen werden wir also beginnen. Wir sprechen dabei ausschliesslich von positiven Formen dieser Art, da für negative genau die nämlichen Sätze gelten. Gehen diese Formen doch aus den ersteren einfach durch Multiplication mit — 1 hervor.

§ 3. Repräsentation der Formen negativer Determinante und Reduction derselben.

Die positive quadratische Form (a, b, c) habe die negative Determinante $D = b^2 - ac$. Bei der weiteren Betrachtung dieser Form sollen die Variabelen derselben als unbeschränkt veränderlich angesehen werden, und es darf dementsprechend ω in

$$a\omega^2 + 2b\omega + c$$

auch beliebige complexe Werte annehmen. Von dieser Erlaubnis machen wir Gebrauch, indem wir die Wurzeln der Gleichung:

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$$

in die Betrachtung einführen. Es sind die beiden conjugiert complexen ω-Werte:

$$\omega = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}.$$

Durch die Lage eines dieser Punkte, etwa des in der positiven Halbebene gelegenen und übrigens durch den Wert der Determinante ist die in Rede stehende Form eindeutig bestimmt. Jener complexe Wert ω ist nämlich Wurzel einer eindeutig bestimmten quadratischen Gleichung mit reellen Coefficienten:

$$\omega^2 + 2\lambda\omega + \mu = 0.$$

Unsere fragliche Form muss also notwendig in der Gestalt

$$\varkappa\omega^2 + 2\varkappa\lambda\omega + \varkappa\mu$$

enthalten sein. Da sie aber positiv ist und die Determinante D besitzt, so ist $\varkappa$ notwendig dem *positiven* Werte gleich:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{-D}{\mu - \lambda^2}}.$$

Wir haben somit das Recht, *eine beliebige Form der Determinante D durch den Punkt der positiven Halbebene*:

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}$$

zu repräsentieren. Vermöge dieser Repräsentation besitzen wir in der Modulteilung der ω-Halbebene ein überaus bequemes Hilfsmittel, die für die Formen negativer Determinante aufgeworfenen Probleme zu lösen, bez. die seit lange in der Zahlentheorie bekannte Lösung derselben durch Mittel der Anschauung zu versinnlichen. Wir führen das erstlich für die Frage nach der Äquivalenz zweier Formen weiter aus.

Wir verabreden zunächst: *Gehört der eine hier in Betracht kommende, die Form (a, b, c) repräsentierende Punkt ω dem Ausgangsdreiecke an,*

so nennen wir diese Form „reduciert“. Unsere Theorie der Modulteilung giebt dann sofort den Satz: *Jede Form ist mit einer und nur einer reducierten Form äquivalent.* Denn der Begriff der Formäquivalenz deckt sich vermöge der eingeführten Repräsentation der Formen bei gegebener negativer Determinante völlig mit dem Begriff der Äquivalenz, wie wir ihn für die Punkte der ω-Halbebene oben definiert haben.

Die Frage, wann zwei Formen gleicher Determinante (a, b, c) und (a', b', c') äquivalent sind, erledigt sich nun so: Man suche diejenigen beiden Substitutionen

$$V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad V'(\omega) = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'},$$

welche bez. die Punkte

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}, \quad \omega' = \frac{-b' + \sqrt{D}}{a'}$$

in das Ausgangsdreieck verlegen. *Findet es sich, dass die Punkte nach geschehener Verlegung coincidieren, so sind die Formen äquivalent. Zugleich entspringt in*

$$\omega' = V'^{-1} V(\omega)$$

thatsächlich eine Substitution, welche die eine Form in die andere überführt.

Es ist nur eine andere Ausdrucksweise dieses Resultats, wenn wir dasselbe im gewöhnlichen Sprachgebrauch der Zahlentheorie so fassen: Man gehe von den gegebenen Formen *zu den reducierten,* mit denen sie bez. äquivalent sind. *Diese letzteren müssen identisch sein, falls Äquivalenz der gegebenen Formen stattfinden soll.*

§ 4. Zahl der Substitutionen, welche die Äquivalenz zweier Formen mit $D < 0$ vermitteln.

Auch die zweite unter unseren Fragen, nämlich die nach der Zahl der Substitutionen, welche die gegebene Form in eine mit ihr äquivalente überführen, beantwortet sich sofort auf Grund des § 4 im vorigen Kapitel. Zwei Formen (a, b, c) und $(a', b' c')$ nennen wir mit einander m-fach äquivalent, wenn es im ganzen m verschiedene Substitutionen (1) § 2 giebt, welche etwa die erste in die zweite überführen. Die beiden repräsentierenden Punkte

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}, \quad \omega' = \frac{-b' + \sqrt{D}}{a'},$$

werden dann im Sinne des vorigen Kapitels gleichfalls m-fach äquivalent sein. Daher das Resultat: *Sind die Werte ω, ω' entweder mit i oder ϱ äquivalent, so giebt es zwei bez. drei verschiedene Substitutionen, welche (a, b, c) in (a', b', c') überführen; in allen übrigen Fällen aber nur eine einzige.*

Wollen wir uns insbesondere noch die reducierten Formen ansehen, die zu den Ausnahmefällen zweifacher bez. dreifacher Äquivalenz gehören. Im ersten Falle *muss* $\omega = i$ *der repräsentierende Punkt sein und also die Form diese sein*:

$$a\omega^2 + a = (a, 0, a),$$

so dass die Determinante ein negatives Quadrat ist. Im anderen Falle *mit dem repräsentierenden Punkte* ϱ *ist die Gestalt der Form*:

$$2b\omega^2 + 2b\omega + 2b = (2b, b, 2b),$$

und also ist die Determinante ein negatives dreifaches Quadrat.

Im allgemeinen wird, dem Gesagten zufolge, eine Form nur durch die identische Substitution $\omega' = \omega$ in sich transformiert, in den Ausnahmefällen durch zwei bez. drei Substitutionen, die eine cyclische Gruppe bilden. So geht ersichtlich $(a, 0, a)$ ausser bei der Identität $\omega' = \omega$ noch bei der Substitution

$$T(\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

in sich über, desgleichen die Form $(2b, b, 2b)$ noch bei den beiden Substitutionen:

$$U(\omega) = \frac{\omega + 1}{-\omega}, \quad U^2(\omega) = \frac{-1}{\omega + 1}.$$

§ 5. Äusseres Kennzeichen reducierter Formen. Endlichkeit der Classenanzahl.

Man kann es leicht einer gegebenen Form an den Werten ihrer Coefficienten a, b, c ansehen, ob sie reduciert ist oder nicht. Soll in der That:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

reduciert sein, so muss

(1) $$\omega = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{a}$$

dem Ausgangsdreiecke (Fig. 63) angehören. Der reelle Teil dieses ω-Wertes muss also, wie wir noch einmal aus der Figur ablesen, der Ungleichung genügen:

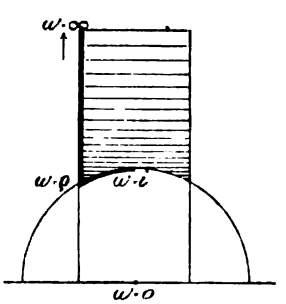


Fig. 63.

$$-\frac{1}{2} \leqq -\frac{b}{a} < \frac{1}{2},$$

welche in geordnete Form übergeführt so lautet:

$$-a < 2b \leqq a.$$

Andrerseits darf der absolute Betrag von (1) nicht unter die Einheit herabsinken, so dass noch hinzukommt:

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{a}\right)^2 \geqq 1,$$

welche Ungleichung wir infolge der Eigenschaft unserer Form als einer *positiven* sofort zusammenziehen in:

$$c \geqq a.$$

Eine weitere Bemerkung erheischt nur noch der Fall $c = a$, also derjenige einer Form

$$ax^2 + 2bxy + ay^2.$$

Diese Form wird durch die Operation T übergeführt in

$$ax^2 - 2bxy + ay^2,$$

und von beiden ist infolge unserer früheren Verabredung über die Zugehörigkeit der Randpunkte zum Ausgangsdreieck nur die mit nichtnegativem zweiten Gliede reduciert. Zusammenfassend gilt also: *Eine quadratische Form* (a, b, c) *heisst reduciert, falls:*

$$-a < 2b \leqq a, \quad a \leqq c$$

ist, bez. wenn für $a = c$ *ausserdem noch die folgende Bedingung zutrifft:*

$$b \geqq 0^*).$$

Diese Ungleichungen werden uns jetzt leicht zur Kenntnis eines weiteren wichtigen Satzes aus der Theorie der quadratischen Formen verhelfen. Es ist, wie man sieht, für eine reducierte Form:

$$b^2 - D = ac \geqq a^2 > 4b^2,$$

woraus folgt:

$$-\frac{1}{3} D \geqq b^2.$$

---

*) Jetzt überblickt man nun auch, auf welchem Wege man von der Theorie der quadratischen Formen aus zum Fundamentalbereich der Modulgruppe vordringen konnte, wie wir schon oben bei der ersten Erwähnung des Wortes Fundamentalbereich historisch anführten (cf. p. 185). In der That darf man annehmen, dass diese eben jetzt erhaltenen rein zahlentheoretischen Bedingungen für die reducierten Formen, welche in dieser Gestalt längst in der Zahlentheorie im Gebrauch sind, für Dedekind den nächsten Ausgangspunkt bildeten, von welchem aus derselbe vermöge geometrischer Deutung dieser Bedingungen den Bereich gewann, den wir als Fundamentalbereich der Modulgruppe benennen. — An dieser Stelle gedenken wir nun auch der erweiterten Modulgruppe. Da ist die Sachlage einfach die, dass zwei Formen, die im Sinne des zahlentheoretischen Sprachgebrauchs *uneigentlich* äquivalent heissen, durch zwei Punkte der positiven ω-Halbebene repräsentiert werden, welche homolog in zwei *ungleichartigen* Elementardreiecken der Modulteilung sind und also mit einander durch eine Modulsubstitution zweiter Art correspondieren. Liegt im speciellen der repräsentierende Punkt einer Form auf einem Kreise der Modulteilung, so wird diese Form sich selbst sowohl eigentlich wie uneigentlich äquivalent sein. Hierher gehören insbesondere die sogenannten ambigen Formen; der repräsentierende Punkt einer solchen liegt auf einer verticalen Geraden der Modulteilung.

Trifft das Gleichheitszeichen zu, so kann b nur positiv sein. Verstehen wir deshalb unter der nachfolgenden Quadratwurzel deren positiven Wert, so ist

$$-\sqrt{-\tfrac{1}{3}D} < b \leq \sqrt{-\tfrac{1}{3}D}.$$

Bei vorgeschriebenem D ist deshalb für b nur eine *endliche* Reihe von Werten zugänglich. Für gewähltes b ist dann weiter:

$$b^2 - D = ac,$$

und da die links stehende bestimmte Zahl nur auf eine *endliche* Anzahl von Weisen in zwei Factoren a, c zerlegt werden kann, die sich überdies durch die Forderung $0 < a \leq c$ noch weiter reduciert, so ist für gegebenes D die Zahl der möglichen reducierten Formen eine beschränkte.

In der Regel spricht man diesen Satz in etwas anderer Form aus. Man vereint nämlich alle mit einander äquivalenten quadratischen Formen in eine *Classe von Formen*. Jede Classe enthält dann nur eine reducierte Form und der gerade gefundene Satz lässt sich so aussprechen: *Die Anzahl der Classen quadratischer Formen von gegebener negativer Determinante ist jederzeit endlich**).

§ 6. Repräsentation der Formen positiver Determinante**).

Um vieles schwieriger gestaltet sich die Durchführung einer entsprechenden Theorie für die Formen positiver nicht-quadratischer Deter-

---

*) In den noch im letzten Abschnitt des näheren namhaft zu machenden Arbeiten von Gierster und Hurwitz über Relationen zwischen den Classenanzahlen quadratischer Formen negativer Determinante finden die voraufgehenden Erörterungen nicht unmittelbar Anwendung. Dortselbst konnte nämlich die Annahme eines ausschliesslich geraden zweiten Coefficienten der Formen zweckmässiger Weise nicht aufrecht erhalten werden; derselbe kann daselbst jeden ganzzahligen Wert annehmen, eine Bestimmung, die übrigens auch sonst vielfach im Gebrauch ist. Die in den gemeinten Arbeiten von Gierster und Hurwitz gebrauchte Bezeichnungsweise ist $Px^2 + Qxy + Ry^2 = (P, Q, R)$, wobei als Determinante dieser Form $D = -\Delta = Q^2 - 4PR$ zu bezeichnen ist. Alle soeben im Texte gegebenen Entwicklungen lassen sich selbstverständlich ohne Mühe übertragen. Die als positiv angenommene quadratische Form (P, Q, R) wird durch $\omega = \frac{-Q + i\sqrt{\Delta}}{2P}$ repräsentiert. Das Kennzeichen einer reducierten Form ist $-P < Q \leq P$, $P \leq R$, wozu noch für $P = R$ als dritte Bedingung $Q \geq 0$ kommt. Daraus bestimmt man für reducierte Formen leicht $-\sqrt{\frac{\Delta}{3}} < Q \leq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$ und beweist ganz ähnlich wie im Texte die Endlichkeit der Classenanzahl für gegebene negative Determinante $-\Delta$.

**) Die Verwendung der Modulteilung für die Theorie der quadratischen Formen positiver Determinante geschah zuerst durch Stephen Smith in der

minante D. Wir suchen hier von vornherein nach einer zweckmässigen Art, die einzelne solche Form (a, b, c) geometrisch zu repräsentieren. Die Gleichung

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$$

wird nunmehr befriedigt durch die beiden reellen irrationalen Werte:

$$\omega_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}, \quad \omega_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{a}.$$

Unter der Bestimmung, $\sqrt{D}$ stets positiv zu nehmen, nennen wir ω_1 die erste, ω_2 die zweite Wurzel. Die hier gewählte Bezeichnung ω_1, ω_2, die übrigens nur vorübergehend in Betracht kommt, wird man wohl kaum mit derjenigen der Periode des elliptischen Integrals erster Gattung verwechseln. Nunmehr verbinden wir ω_1 und ω_2 durch einen der positiven ω-Halbebene angehörenden Halbkreis, dessen Gleichung also diese ist:

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + c = 0, \quad (\omega = x + iy).$$

Dieser Kreis zusammen mit dem Zahlwert von D mag uns die Form (a, b, c) repräsentieren. Aber diese Repräsentation ist noch eine zweideutige, indem durch den einzelnen derartigen Halbkreis und den zugehörigen Wert von D gleichzeitig noch die beiden Formen (a, b, c) und $(-a, -b, -c)$ repräsentiert sind. Demgemäss wollen wir uns den Halbkreis mit einem Pfeile versehen denken, *der von der ersten Wurzel zur zweiten hinführt.* Je nachdem dann der Pfeil nach rechts oder links weist, ist der erste Coefficient a der Form negativ oder positiv.

Nebenbei merken wir hier noch den Satz an, *dass bei Übergang zu einer äquivalenten Form die erste Wurzel ω_1 jedesmal wieder in die erste ω_1' der äquivalenten Form übergeht.* In der That, wendet man auf (a, b, c) die Substitution

$$V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

an, so geht die erste Wurzel ω_1 der gegebenen Form über in

Arbeit *„Sur les équations modulaires"*, welche, 1874 geschrieben und zunächst der Pariser Akademie vorgelegt, späterhin in den Atti della Accademia Reale dei Lincei Bd. I (1877) Aufnahme fand. Der Raum für die reducierten Formen ist dort freilich nicht wie im Texte fixiert, vielmehr hat er die Gestalt desjenigen Bereiches, den wir sehr bald als Fundamentalbereich der Congruenzgruppe 2ter Stufe kennen lernen werden (cf. Fig. 67, p. 276). Dadurch ist unmittelbarer Anschluss an Gauss' Behandlungsweise der Formen von positiver Determinante erreicht, wobei dann freilich die Äquivalenz gegenüber den Entwicklungen des Textes eine Einschränkung erfährt, von der wir erst im folgenden Kapitel des genaueren handeln. Die Darstellung des Textes wurde in der Hauptsache von Klein in seiner Vorlesung vom Sommer 1879 gegeben.

$$\omega_1' = \frac{-b' + \sqrt{D}}{a'},$$

wobei $\sqrt{D}$ nach wie vor positiv zu nehmen ist. Bei Ausführung der Substitution V geht also nicht nur der die erste Form repräsentierende Halbkreis in den zur zweiten Form gehörigen über, sondern die Pfeilrichtung des ersten Kreises giebt, der Transformation mit unterworfen, für den zweiten Kreis die richtige Pfeilrichtung ab.

§ 7. Erster Ansatz zur Transformation einer Form positiver Determinante in sich.

Die erste Frage, welche uns in das Studium der Äquivalenz von Formen positiver Determinante einführen soll, ist diese: *Giebt es Modulsubstitutionen, welche die Form (a, b, c) in sich transformieren?* Sicherlich wird eine derartige Substitution die beiden Punkte ω_1, ω_2 an ihrer Stelle lassen; denn eine Permutation derselben ist nach dem Schlusssatze des vorigen Paragraphen ausgeschlossen, da doch der erste Coefficient a der Form nicht das Zeichen wechseln, sondern erhalten bleiben soll.

Soll es nun Substitutionen geben, welche die irrationalen Punkte ω_1, ω_2 an ihrer Stelle lassen, so müssen dieselben *hyperbolische sein, die dann insgesamt eine cyclische Gruppe hyperbolischer Substitutionen bilden werden.* Greifen wir irgend eine dieser fraglichen Substitutionen

$$V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

heraus und untersuchen die Möglichkeit, sie von der quadratischen Form (a, b, c) aus wirklich zu erreichen.

Wir werden davon ausgehen müssen, dass die Gleichungen

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0,$$
$$\gamma\omega^2 + (\delta - \alpha)\omega - \beta = 0,$$

von denen die zweite die Fixpunkte der in Rede stehenden Substitution V bestimmt, dieselben Wurzeln haben sollen, und dass also ihre linken Seiten bis auf einen constanten Factor übereinstimmen müssen. Sei jetzt (a, b, c) eine Form vom Teiler σ, so haben wir anzusetzen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sigma\gamma &= au, \\ \sigma(\delta - \alpha) &= 2bu, \\ \sigma\beta &= -cu, \end{aligned}$$

unter u eine bestimmte ganze Zahl verstanden. Überdies wollen wir noch die jedenfalls gerade ganze Zahl $\sigma(\alpha + \delta)$ mit $2t$ bezeichnen. Wir berechnen uns dann noch für α und δ einzeln:

$$\sigma\alpha = t - bu, \quad \sigma\delta = t + bu. \tag{2}$$

Es ist hiernach:

$$\sigma^2(\alpha\delta - \beta\gamma) = \sigma^2 = t^2 - Du^2,$$

und also sind t und u zwei ganze Zahlen, die der Gleichung:

$$\frac{t^2 - Du^2}{\sigma^2} = 1 \tag{3}$$

genügen.

Sind t und u umgekehrt irgend zwei dieser Gleichung genügende Zahlen, so können wir uns auf Grund obiger Formeln aus diesen t und u im Verein mit $a, 2b, c$ vier Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer gesuchten hyperbolischen Substitution herstellen. Unsere Frage nach der Möglichkeit der Transformation von (a, b, c) in sich ist sonach auf die andere *nach der Auflösbarkeit der Gleichung* (3) zurückgeführt.

§ 8. Bericht über die Pell'sche Gleichung.

Die letztgefundene Gleichung

$$\frac{t^2 - Du^2}{\sigma^2} = 1 \tag{1}$$

wird nach dem englischen Mathematiker Pell als die *Pell'sche Gleichung* benannt. Sie lässt für t und u jedenfalls die triviale Lösung $t = \pm\sigma$, $u = 0$ zu. Inzwischen ist es eine Hauptleistung von Lagrange in der Theorie der Zahlen, nachgewiesen zu haben, *dass auch hierüber hinaus die Pell'sche Gleichung für $D > 0$ noch durch weitere Zahlenpaare t, u befriedigt werden kann, die beide von Null verschieden sind.* Indem wir den Beweis der Existenz derartiger Lösungen aufschieben (um ihn in § 13 zu bringen), gehen wir zuvörderst gleich zur Nutzanwendung dieses Lagrange'schen Satzes für die sonstige Theorie der Pell'schen Gleichung, sowie dann weiter für unsere die quadratischen Formen positiver Determinante betreffenden Fragen.

Wir wollen dabei t sowohl wie u positiv annehmen; denn die vier Lösungen $\pm t, \pm u$ sind kaum wesentlich verschieden. Giebt es mehrere derartige positive Lösungen, so sei eine zweite t', u', eine dritte t'', u'' u. s. w. Wir bilden dann unter positiv genommener Quadratwurzel $\sqrt{D}$ das nachfolgende Product:

$$\left(\frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{t' + u'\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{\alpha'} \cdot \left(\frac{t'' + u''\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{\alpha''} \cdots, \tag{2}$$

in welches wir beliebig viele unserer Lösungen in beliebigen Multiplicitäten $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$ zusammengefasst denken. Durch elementare Rechnung lässt sich dies Product wieder auf die Form:

$$\frac{t^{(\nu)} + u^{(\nu)}\sqrt{D}}{\sigma}$$

bringen, und nun behaupten wir, *dass die übrigens positiven Zahlen* $t^{(\nu)}$, $u^{(\nu)}$ *gleichfalls wieder eine Lösung von* (1) *darstellen.* In der That haben wir die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{t \pm u\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{t' \pm u'\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{\alpha'} \cdots = \frac{t^{(\nu)} \pm u^{(\nu)}\sqrt{D}}{\sigma},$$

(wobei wir einmal die oberen, das zweite Mal die unteren Zeichen nehmen). Das Product dieser beiden Gleichungen liefert direct:

$$1 = \frac{t^{(\nu)_2} - Du^{(\nu)_2}}{\sigma^2}.$$

Je grösser t, um so grösser muss offenbar auch das zugehörige u sein, welches mit t zusammen (1) löst. Man kann demnach von einer *kleinsten positiven Lösung der Pell'schen Gleichung* sprechen, die durch T, U bezeichnet sein möge. Wir nehmen jetzt im Producte (2) für alle Factoren übereinstimmend diese kleinste Lösung T, U und bilden dementsprechend die Potenz

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{n} = \frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma}. \tag{3}$$

In t_n, u_n ist so eine unendliche Menge positiver Lösungen der Pell'schen Gleichung gewonnen, *ja geradezu deren Gesamtheit*, wie wir nun behaupten. Da nämlich die linke Seite der letzten Gleichung mit wachsendem n selbst unbegrenzt wächst, so müsste, falls noch eine neue Lösung t, u hinzukommen sollte, $\frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma}$ dem Werte nach zwischen zwei auf einander folgenden Potenzen von $\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}$ gelegen sein:

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma} < \frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma} < \frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}.$$

Schreiben wir alsdann

$$\frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{t_n - u_n\sqrt{D}}{\sigma} = \frac{T_0 + U_0\sqrt{D}}{\sigma},$$

so wäre:

$$1 < \frac{T_0 + U_0\sqrt{D}}{\sigma} < \frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma},$$

d. h. es wäre nicht T, U, sondern T_0, U_0 die kleinste positive Lösung.

Es soll jetzt n in der Gleichung (3) auch 0 und negative ganze Zahlen durchlaufen. Ersichtlich ist

$$t_0 = \sigma, \qquad u_0 = 0$$
$$t_{-n} = t_n, \qquad u_{-n} = -u_n.$$

Für $n = -\infty \cdots +\infty$ haben wir in den solcherweise definierten t_n, u_n alle Lösungen der Pell'schen Gleichung, bei denen t_n nicht negativ ist.

§ 9. Herstellung aller Substitutionen, die eine Form positiver Determinante in sich transformieren.

Gehen wir zurück auf die Darstellung der hyperbolischen Substitutionen, welche die Form von positiver Determinante (a, b, c) in sich transformieren, durch die ganzzahligen Lösungen der Pell'schen Gleichung:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sigma\alpha &= t - bu, & \sigma\beta &= -cu, \\ \sigma\gamma &= au, & \sigma\delta &= t + bu, \end{aligned}$$

so ist zuvörderst soviel deutlich, dass ein simultaner Zeichenwechsel von t und u einen eben solchen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach sich zieht und demnach nicht auf eine wesentlich verschiedene Substitution führt. Wir werden also *alle* gesuchten Substitutionen erhalten, *wenn wir nur die am Schluss des letzten Paragraphen vermerkten Lösungen zulassen.*

Sei nun neben der ersten in (1) verwendeten Lösung t, u der Pell'schen Gleichung eine zweite durch t', u' gegeben, so entspreche ihr die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$. Wie vorhin leiten wir aus den beiden in Rede stehenden Lösungen die dritte ab:

$$\frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{t' + u'\sqrt{D}}{\sigma} = \frac{t'' + u''\sqrt{D}}{\sigma},$$

wobei explicite:

$$t'' = \frac{tt' + Duu'}{\sigma}, \qquad u'' = \frac{tu' + t'u}{\sigma}$$

ist. Entspreche dieser dritten Lösung die hyperbolische Substitution $\begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta'' \end{pmatrix}$, so zeigt eine einfache Rechnung, *dass diese dritte Substitution gerade durch Combination der beiden ersteren entsteht:*

$$\begin{pmatrix} \alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Nun sei insonderheit der kleinsten positiven Lösung T, U die Substitution

$$V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

zugeordnet. Dann haben wir als hauptsächliches Resultat: *Der Lösung t_n, u_n entspricht die durch n-malige Wiederholung von $\omega' = V(\omega)$ entspringende Substitution $\omega' = V^n(\omega)$.* Die Zahl n durchläuft dabei alle

ganzzahligen (positiven, wie negativen) Werte, und insonderheit ist $V^0 = 1$ die Identität.

Hiermit aber haben wir den für die Kenntnis der hyperbolischen Substitutionen fundamentalen Satz erhalten: *Sind die irrationalen Punkte ω_1, ω_2 die Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung, so gehört zu diesen Punkten als Fixpunkten jedesmal eine cyclische Gruppe hyperbolischer Substitutionen.* Es erledigt sich damit auch unsere Frage nach der Äquivalenz einer Form positiver Determinante mit sich selbst: *Eine Form (a, b, c) mit $D > 0$ wird stets durch unendlich viele hyperbolische Substitutionen in sich transformiert, nämlich durch alle diejenigen, welche ω_1, ω_2 zu Fixpunkten haben. Zugleich erschöpft die cyclische Gruppe dieser Substitutionen die Gesamtheit derer, die (a, b, c) in sich überführen.*

§ 10. Lage des eine Form positiver Determinante repräsentierenden Halbkreises in der ω-Halbebene.

Der Halbkreis, durch welchen wir in § 6 eine vorliegende Form (a, b, c) positiver Determinante repräsentierten, gehört als Bahncurve derjenigen cyclischen Gruppe hyperbolischer Substitutionen an, welche wir dieser Form soeben zugeordnet fanden. Erinnern wir uns jetzt an die Gestalt des Fundamentalbereichs dieser cyclischen Gruppe, wie wir ihn im ersten Kapitel fixierten, und denken insbesondere die ω-Ebene den einzelnen Substitutionen der cyclischen Gruppe entsprechend in die unendlich vielen bezüglich unserer Gruppe äquivalenten ringförmigen Bereiche zerlegt, die sich gegen die Fixpunkte ω_1, ω_2 hin mehr und mehr zusammenzogen. Mit der ω-Ebene wird auch der (a, b, c) repräsentierende Halbkreis durch diese Bereiche in unendlich viele sich gegen ω_1 und ω_2 häufende Kreisbogenstücke zerlegt, die bezüglich der in Rede stehenden cyclischen Gruppe und *also auch bezüglich der Modulgruppe äquivalent sind**).

Denken wir uns jetzt die gesamte Modulteilung in der ω-Halbebene aufgetragen und greifen einen einzelnen der Bogen heraus, in welche wir soeben den repräsentierenden Halbkreis zerlegt fanden. Wir können das Sachverhältnis so wählen, dass der Anfangspunkt dieses Bogens gerade auf der Grenze eines Doppeldreiecks liegt; *alsdann wird der Bogen gerade eine bestimmte endliche Zahl von sagen wir μ Doppeldreiecken durchsetzen.* In der That liegt er ja ganz im Innern der Halbebene, und sein Endpunkt ist mit dem Anfangspunkte äquivalent.

---

*) Man vergleiche die im ersten Kapitel (p. 187) für die hyperbolischen Substitutionen mitgeteilte Figur.

Insgesamt wird nun der Halbkreis durch die Doppeldreiecke der Modulteilung in unendlich viele Kreisbogen zerschnitten, die sich gegen ω_1 und ω_2 häufen. Aber in der Reihe dieser Bogen ist, wie wir sahen, der n^{te} jedesmal mit dem $(n+\mu)^{\text{ten}}$ äquivalent. Wollen wir also alle diese unendlich vielen den einzelnen Doppeldreiecken angehörigen Bogen immer durch die gerade in Betracht kommenden Modulsubstitutionen in das Ausgangsdreieck verlegen, *so wird dieses doch nur von μ Bogen durchsetzt erscheinen*, deren einzelner dann freilich unendlich oft überdeckt gedacht werden muss.

Zur näheren Erläuterung knüpfen wir noch an die Vorstellungen in § 11 des vorigen Kapitels an. Dort bezeichneten wir mit $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ den Complex derjenigen Doppeldreiecke, die vom rationalen reellen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ ausstrahlten. Nun wird sicher der (a, b, c) repräsentierende Halbkreis unendlich viele solche Bereiche $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ durchziehen, deren zugehörige Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ z. B. gegen ω_1 hin bald grösser bald kleiner als ω_1 sind und diesen Punkt in immer engere Grenzen einschliessen*). Aber das oben herausgegriffene μ consecutive Doppeldreiecke durchsetzende Stück des Halbkreises durchzieht nur eine beschränkte Reihe von Bereichen, deren Anzahl in der That noch kleiner

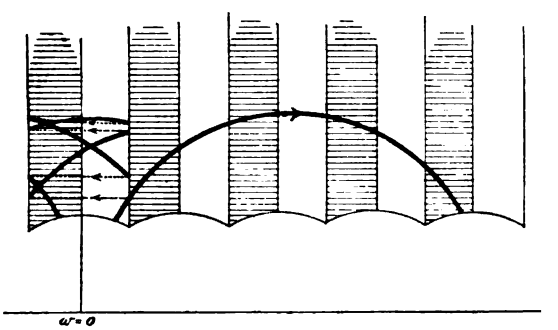


Fig. 64.

als μ sein wird. In Fig. 64 ist schematisch der Fall dargestellt, dass unser Halbkreis den besonderen Bereich $B(i\infty)$ durchsetzt. Man zählt dabei sofort ab, dass von den genannten μ auf einander folgenden Doppeldreiecken fünf auf den Bereich $B(i\infty)$ entfallen, und bewerkstelligt mühelos die Verlegung der fünf durch diese Doppeldreiecke auf unserem Halbkreise abgeschnittenen Bogen in das Ausgangsdreieck. Indem wir dies in Fig. 64 ausführen, ist nun auch leicht ersichtlich,

*) Man vgl. insbesondere die Schlussbetrachtung in § 11 des vorigen Kapitels.

wie allgemein die μ das Ausgangsdreieck durchsetzenden Bogen mit einander correspondieren. Denken wir sie in einer Reihe durchlaufen, wie sie vordem im Halbkreise auf einander folgten, so geht jedesmal der Endpunkt eines Bogens entweder durch die Substitution S bez. S^{-1} (die im Falle der Fig. 64 allein zur Verwendung kommt), oder durch T in den Anfangspunkt des folgenden über. Zwischen zwei auf einander folgenden Anwendungen von T kommt dabei S immer ein oder mehrere Male zur Verwendung. Anwendung von T bedeutet jedesmal, dass der (a, b, c) repräsentierende Halbkreis an der gerade erreichten Stelle in einen neuen Bereich $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ eintritt. Nachdem wir solchergestalt $(\mu - 1)$ Male hinter einander S oder T zur Ausübung gebracht haben, werden wir beim μ^{ten} Male gerade wieder zu dem Bogen zurückgeführt, von dem wir ausgingen. Unsere μ das Ausgangsdreieck durchsetzenden Bogen bilden in diesem Sinne eine geschlossene Kette.

Die Veranschaulichung dieser Verhältnisse wird sich jetzt als völlig ausreichend erweisen, um auch für die Formen positiver Determinante das Äquivalenzproblem zu erledigen.

§ 11. Von den reducierten Formen und ihren Perioden. Erledigung des Äquivalenzproblems.

Nach solchen Vorbereitungen gehen wir dazu über, von der Äquivalenz der Formen positiver Determinante zu handeln. Wir stellen auch hier wieder die Definition einer reducierten Form an die Spitze: *Die Form (a, b, c) positiver Determinante soll reduciert heissen, falls ihr repräsentierender Halbkreis das Ausgangsdreieck schneidet.* Wir nennen sie dabei eine *Hauptreducierte*, falls der repräsentierende Halbkreis die untere kreisförmige Grenze des Ausgangsdreiecks schneidet, *Nebenreducierte* im anderen Falle. (Cf. Fig. 65.)

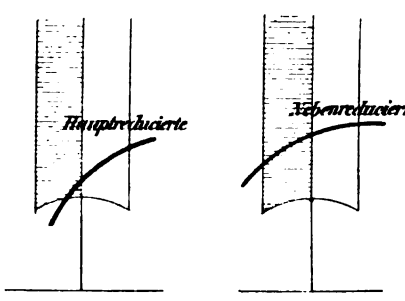


Fig. 65.

Nun folgt sofort aus den vorausgeschickten Entwicklungen: *Eine Form positiver Determinante (a, b, c) ist im ganzen mit μ verschiedenen reducierten Formen äquivalent*, wo μ die mehrfach genannte endliche und von 0 verschiedene positive ganze Zahl der das Ausgangsdreieck durchsetzenden Bogen ist, in die auf oben bezeichnete Art der (a, b, c) repräsentierende Halbkreis transformiert wird. In der That, mögen wir irgend eines von den durch den repräsentierenden

Halbkreis durchschnittenen Dreiecken herausgreifen, dem die Substitution V angehöre, und dann vermittelst der zu V inversen Substitution V^{-1} die Form (a, b, c) bez. ihren Halbkreis transformieren; jedesmal entspringt auf dem Wege eine zu (a, b, c) äquivalente reducierte Form.

Die μ reducierten mit (a, b, c) äquivalenten Formen lassen sich nun, wie die μ Kreisbogen des Ausgangsdreiecks, in eine geschlossene Kette von μ Gliedern an einander reihen, wobei jede folgende Form aus der vorhergehenden durch Ausübung von S oder T entsteht; zwischen zwei Anwendungen von T kommt dann die Substitution S stets ein oder mehrere Male zur Ausübung. Diese Reihe der μ Formen nennt man *eine Periode reducierter Formen. Die ganze Classe der mit* (a, b, c) *äquivalenten Formen können wir dann auch durch die so erhaltene Formenperiode repräsentieren.*

Das erste Problem aus der Theorie der Äquivalenz für die Formen von positiver Determinante haben wir jetzt in folgender Weise zu beantworten: *Sind zwei Formen* (a, b, c) *und* (a', b', c') *äquivalent, so müssen sie dieselbe Periode reducierter Formen besitzen.* Zugleich entspringt durch die beiderseitige Überführung von (a, b, c) und (a', b', c') in die reducierten Formen bei zutreffender Äquivalenz eine Substitution $\omega' = V(\omega)$, welche (a, b, c) in (a', b', c') überführt. Durch Vereinigung von V mit den hyperbolischen Substitutionen, die (a, b, c) in sich transformieren, entstehen alle übrigen Substitutionen, die gleichfalls (a, b, c) in die mit ihr äquivalente Form (a', b', c') transformieren. *Damit ist das zweite Äquivalenzproblem von selbst mit erledigt.*

§ 12. Äusseres Kennzeichen reducierter Formen. Endlichkeit der Classenanzahl.

Soll der Halbkreis, der durch die Gleichung

$$a^2(x^2 + y^2) + 2abx + ac = 0 \tag{1}$$

dargestellt wird und eine vorliegende Form (a, b, c) repräsentiert, das Ausgangsdreieck durchsetzen, so muss wenigstens einer der beiden Punkte $\omega = \varrho$, $-\varrho^2$ in seinem Innern gelegen sein. Liegen beide darin, so ist die bezügliche Form (a, b, c) Nebenreducierte; falls nur einer von beiden dem Innern dieses Kreises angehört, ist (a, b, c) Hauptreducierte. Diese beiden Punkte ϱ, $-\varrho^2$ haben aber die Coordinaten

$$x = \mp \frac{1}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Indem wir diese Werte in die Kreisgleichung (1) einsetzen, finden wir, *dass die Ungleichung*

$$a(a \mp b + c) < 0$$

entweder für das eine der beiden fraglichen Zeichen oder für beide stattfinden muss, je nachdem (a, b, c) Haupt- oder Nebenreducierte ist.

Aus der gewonnenen Ungleichung ziehen wir im Verein mit:

$$D = b^2 - ac$$

die neue:

$$a^2 \pm ab + b^2 < D.$$

Ist D gegeben, so sind die für reducierte Formen zulässigen Wertcombinationen a, b an Zahl beschränkt. Da nun c mit a, b, D zugleich gegeben ist, so existiert für gegebene Determinante nur eine endliche Zahl reducierter Formen. Um so mehr wird *die Anzahl der Classen äquivalenter Formen von positiver Determinante D eine endliche sein.*

§ 13. Existenzbeweis für die kleinste positive Lösung T, U der Pell'schen Gleichung.

Wir haben oben (p. 253) vorab nur erst historisch mitgeteilt, dass die Lösbarkeit der Pell'schen Gleichung allgemein durch Lagrange bewiesen sei. Die vorangehenden Erörterungen können wir nun aber ausbeuten, um jetzt nachträglich in anschaulicher Weise die Existenz von Lösungen der Pell'schen Gleichung durch nicht-verschwindende t, u darzuthun. Wir skizzieren den einzuschlagenden Gedankengang kurz in folgender Weise.

Bei gegebener Determinante D greife man als einfachste Form

$$(1, 0, -D)$$

auf, lehre ihre Deutung durch einen Kreis und gebe sodann Definition und äussere Kennzeichen der Reduciertheit, aus welchen letzteren insbesondere noch die Endlichkeit der Anzahl der Reducierten folgt.

Demnächst gehe man von der Form $(1, 0, -D)$ durch wiederholte Anwendung von S bez. T zu äquivalenten reducierten Formen und beginne so unter stetem Hinblick auf die Figur die Formenperiode zu bilden. Sie kann nur eine endliche Zahl von Formen umfassen, denn alle ihre Formen haben die gleiche Determinante D und sind reduciert. Somit werden wir in gekennzeichneter Weise etwa nach μ berechneten Formen zur ersten $(1, 0, -D)$ zurückgeführt. Fassen wir nunmehr die bis dahin zur Verwendung gekommenen S, T zu:

$$(1) \qquad S^a T S^b T \cdots (\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

zusammen, so haben wir eine offenbar von der Identität verschiedene Substitution erhalten, die $(1, 0, -D)$ in sich transformiert.

Jetzt bilde man wie in § 7 die allgemeine Gestalt der Substitutionen, die unsere Form in sich transformieren. Die gefundene

Substitution (1) muss zu denselben gehören, und es wird sich also schreiben lassen:

$$\alpha = T, \quad \beta = DU, \quad \gamma = U, \quad \delta = T.$$

Die dadurch definierten ganzen und von Null verschiedenen Zahlen T, U genügen wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ der Bedingung:

$$T^2 - DU^2 = 1.$$

Es ist demnach in T, U eine Lösung der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ gefunden, und zwar, wie wir wissen, gerade die kleinste Lösung, aus der alle übrigen in oben gekennzeichneter Weise hergestellt werden.

Handelt es sich um die allgemeinere Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

so gehe man von der für diesen Fall einfachsten Form $\left(\sigma, 0, -\frac{D}{\sigma}\right)$ aus und lege Schritt für Schritt die nämliche Gedankenentwicklung zurück.

Hiermit ist die Betrachtung der Theorie der quadratischen Formen, soweit wir derselben hier nachgehen wollten, zum Abschlusse gekommen.

§ 14. Transformation der Modulsubstitutionen.

Hat sonach die Modulteilung der ω-Halbebene für die Zahlentheorie schönste Bedeutung, so können wir nun umgekehrt diese letztere benutzen, um für die Modulsubstitutionen noch eine Reihe ergänzender Sätze aufzustellen. Wir bezeichnen durch

$$W(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

eine beliebige lineare Substitution von ω, die also irgend welche nur der einen Bedingung $ad - bc \gtrless 0$ genügende Coefficienten haben mag, während wir für die Modulsubstitutionen nach wie vor die Bezeichnung

$$V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

vorbehalten. Die zu W inverse Substitution schreiben wir:

$$W^{-1}(\omega) = \frac{+d\omega - b}{-c\omega + a}$$

und definieren nun eine neue Substitution V', indem wir folgende Combination der eben genannten Operationen bilden:

$$V'(\omega) = W^{-1}VW(\omega). \tag{1}$$

Man sagt dann, *V' entstehe aus V durch Transformation vermöge der Operation W*)*. Das Merkwürdige dieser weiterhin sehr wichtigen

*) Cf. „Ikos." p. 6, 7, sowie p. 232—234.

Massnahme ist, dass alle Substitutionen V', die durch Transformation vermittelst *einer und derselben* Operation W aus der Gesamtheit der Modulsubstitutionen V entstehen, *ihrerseits wie die V eine Gruppe bilden;* denn es ist:

$$W^{-1}V_1 W \cdot W^{-1}V_2 W = W^{-1}V_1 V_2 W.$$

Ordnet man der Substitution V_i der ursprünglichen Gruppe die aus ihr entspringende V_i' der „transformierten Gruppe" zu, so lehrt die letzte Gleichung überdies noch, *dass zwischen den beiderseitigen Gruppen das Verhältnis des holoedrischen Isomorphismus besteht.*

Der nächste Schritt zum Besonderen ist, dass wir nunmehr $W(\omega)$ selbst als Modulsubstitution wählen. Dann ist auf Grund von (1) auch die transformierte Substitution V' eine Modulsubstitution. Dabei lehren die einfachsten Beispiele, *dass V' im allgemeinen von V verschieden ist.* Immerhin ist doch, falls W Modulsubstitution ist, die eben gemeinte Gruppe der transformierten Substitutionen keine andere als die Modulgruppe selbst, *und also ist dergestalt unsere Modulgruppe holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen.*

Es sind dies alles Begriffe, die in den folgenden Kapiteln eine besondere Wichtigkeit erlangen; hier verfolgen wir sie zuvörderst nur nach einer Richtung. *Im Falle die transformierende Substitution W selbst eine Modulsubstitution erster Art ist, nennen wir die ursprüngliche und transformierte Modulsubstitution*

$$V = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$$

mit einander gleichberechtigt. Leicht findet man dabei explicite:

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha' &= ad\alpha - ab\gamma + cd\beta - bc\delta, \quad \beta' = bd\alpha + d^2\beta - b^2\gamma - bd\delta, \\ \gamma' &= -ac\alpha - c^2\beta + a^2\gamma + ac\delta, \quad \delta' = -bc\alpha - cd\beta + ab\gamma + ad\delta. \end{aligned}$$

Hier bilden wir noch die Summe des ersten und vierten Coefficienten α', δ':

$$\alpha' + \delta' = (ad - bc)(\alpha + \delta) = \alpha + \delta.$$

Gleichberechtigte Substitutionen haben somit gleiche Summe des ersten und vierten Coefficienten. Es kann demnach eine elliptische Substitution stets nur wieder mit einer ebensolchen der gleichen Periode gleichberechtigt sein; desgleichen kann eine parabolische Substitution nur mit einer parabolischen, eine hyperbolische nur mit einer hyperbolischen gleichberechtigt sein. In wie weit diese Sätze umkehrbar sind, soll nunmehr zum Schluss dieses Kapitels untersucht werden.

§ 15. Gleichberechtigung im Falle elliptischer und parabolischer Substitutionen.

Möge T' irgend eine elliptische Modulsubstitution der Periode zwei sein, um mit diesen zu beginnen, so gehört zu derselben als Fixpunkt der mit i äquivalente Punkt $V(i)$. Alsdann tragen die beiden an diesen Punkt heranragenden Doppeldreiecke der Modulteilung auf Grund früherer Untersuchungen die Namen V und VT, so dass

$$\omega = V(\omega''), \quad \omega' = VT(\omega'') \tag{1}$$

äquivalente Punkte dieser beiden Doppeldreiecke sind, wenn ω'' irgend ein Punkt im Ausgangsdreieck ist. Aus (1) folgt

$$\omega' = VTV^{-1}(\omega)$$

als Gleichung zwischen ω' und ω. Aber nach der Voraussetzung war T' die Substitution, welche die beiden in Rede stehenden Dreiecke in einander überführt. Da wir nun ω aufs leichteste so wählen können, dass ω mit ω' nur einfach äquivalent ist, so kommt als Darstellung von T':

$$T' = VTV^{-1}, \tag{2}$$

so dass T' aus T durch Transformation vermöge der Substitution V^{-1} entspringt. *Sonach sind alle elliptischen Substitutionen der Periode zwei mit T und also alle unter einander gleichberechtigt.*

Die elliptischen Substitutionen der Periode drei zerfallen in zwei Gattungen, je nachdem der im Sinne von p. 165 der einzelnen Substitution zugehörige Winkel ϑ gleich $\frac{2\pi}{3}$ oder $\frac{4\pi}{3}$ ist; (den damals mit ε_1 bezeichneten Punkt denken wir dabei als den in der positiven Halbebene gelegenen Fixpunkt unserer Substitution). Zur ersten Gattung gehört insbesondere die Substitution U, und wir zeigen jetzt mühelos, *dass alle übrigen Substitutionen dieser Gattung mit U und also unter einander gleichberechtigt sind.* Sei in der That U' eine Substitution dieser Gattung, deren Fixpunkt $V(\varrho)$ sein soll. Wie wir sahen, transformiert alsdann die Substitution U' das Dreieck V in das Dreieck VU. Sind demnach ω' und ω zwei einfach äquivalente Punkte dieser beiden Dreiecke, so hat man neben einander die Gleichungen:

$$\omega' = U'(\omega), \quad \omega' = VUV^{-1}(\omega),$$

aus welchen $U' = VUV^{-1}$, d. i. die Gleichberechtigung von U und U' entspringt.

In derselben Weise zeigt man, dass die in der zweiten Gattung vereinten elliptischen Substitutionen der Periode drei mit $U^{-1} = U^2$ und also überhaupt unter einander gleichberechtigt sind. *Aber eine Substitution aus der ersten dieser beiden Gattungen ist niemals mit einer*

solchen aus der zweiten Gattung gleichberechtigt. Wir beweisen das hier durch Angabe eines bequemen arithmetischen Unterscheidungszeichens für unsere beiden in Rede stehenden Gattungen. Denken wir nämlich die Coefficienten einer hierher gehörigen Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ derart fixiert, dass $\alpha + \delta = +1$ wird, *so haben die Substitutionen der ersten Gattung ein positives β und negatives γ, die Substitutionen der zweiten Gattung dagegen ein negatives β und ein positives γ.* In der That ist die allgemeinste Form einer mit $U = \begin{pmatrix}1, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}$ gleichberechtigten Substitution zufolge (2) § 14

$$\begin{pmatrix}ad + ab + cd, & b^2 + bd + d^2\\ -a^2 - ac - c^2, & -ab - bc - cd\end{pmatrix},$$

welche wirklich als Summe des ersten und vierten Coefficienten $+1$ und als zweiten Coefficienten eine positive, als dritten aber eine negative Zahl hat. Indem man sodann auch noch die mit $U^2 = \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 1\end{pmatrix}$ gleichberechtigten Substitutionen in allgemeinster Form aufstellt, verificiert man mühelos unsere Behauptungen vollständig.

Statt hier übrigens an die früheren Sätze über die Benennung benachbarter Doppeldreiecke der Modulteilung anzuknüpfen, hätten wir auch rein arithmetisch verfahren und direct mit der besonderen Gestalt der elliptischen Substitutionen arbeiten können. Eine Überlegung dieser Art bringen wir jetzt bei den parabolischen Substitutionen in Anwendung*).

Sei S' irgend eine besondere parabolische Substitution, so können wir dieselbe sogleich in der Gestalt anschreiben:

$$S' = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & 2 - \alpha\end{pmatrix}.$$

Ihr Fixpunkt ist bei $\omega = \frac{\alpha - 1}{\gamma}$ gelegen. Möge dieser Bruch $\frac{\alpha - 1}{\gamma}$ auf seine kleinste Benennung gebracht

$$\frac{\alpha - 1}{\gamma} = \frac{d}{-c}$$

lauten, so werden wir, unter λ eine gewisse ganze Zahl verstehend:

$$\alpha - 1 = \lambda d, \quad \gamma = -\lambda c$$

zu schreiben haben. S' nimmt so nach kurzer Rechnung die Gestalt an:

*) Umgekehrt könnte man wieder letztere durch eine mehr geometrisch gefasste Überlegung ersetzen.

$$S' = \begin{pmatrix} 1 + \lambda d, & \frac{\lambda d^2}{c} \\ -\lambda c, & 1 - \lambda d \end{pmatrix}.$$

Da β ganzzahlig ist, so muss λ durch c teilbar sein. Schreiben wir demgemäss $\lambda = c\varkappa$, so ist

$$S' = \begin{pmatrix} 1 + \varkappa cd, & \varkappa d^2 \\ -\varkappa c^2, & 1 - \varkappa cd \end{pmatrix}.$$

Die hierbei auftretende ganze Zahl $\varkappa$ nennen wir die *Amplitude der parabolischen Substitution* S' und bezeichnen diese letztere genauer durch $S_\varkappa'$. Schreiben wir dann kurz $S_1' = S'$, so beweist eine leichte Rechnung, dass

$$S_\varkappa' = S'^\varkappa, \quad (\varkappa = -\infty \cdots + \infty)$$

ist. *Wir haben also in den $S_\varkappa'$ die Substitutionen derjenigen cyclischen Gruppe gewonnen, deren Erzeugende die Substitution S' der Amplitude 1 ist.*

Da c und d relativ prim sind, so können wir ihnen jetzt zwei weitere ganze Zahlen a, b zugesellen, so dass:

$$ad - bc = 1$$

wird. Vermöge der Substitution W:

$$W = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

transformieren wir sodann $S'^\varkappa$ und finden nach kurzer Rechnung:

$$WS'^\varkappa W^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & \varkappa \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = S^\varkappa.$$

Leicht ergänzt man dieses Resultat zum Schlusssatz: *Zwei parabolische Substitutionen sind stets und nur dann gleichberechtigt, wenn sie dieselbe Amplitude haben.*

§ 16. Gleichberechtigung hyperbolischer Substitutionen.

Die elliptischen Substitutionen standen in engster Beziehung zu denjenigen quadratischen Formen, deren Determinante ein negatives einfaches bez. dreifaches Quadrat ist, und wir hätten für die parabolischen Substitutionen soeben in gleicher Weise die quadratischen Formen mit verschwindender Determinante heranziehen können. Jedenfalls werden wir nun aber die in Ansehung der hyperbolischen Substitutionen noch schwebenden Fragen durch Verwertung der früher für die quadratischen Formen positiver Determinante erhaltenen Sätze erledigen.

Sei eine cyclische Gruppe hyperbolischer Substitutionen gegeben, deren Erzeugende

$$V = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

ist. Die Fixpunkte derselben findet man durch Nullsetzen der quadratischen Form

$$2\gamma\omega^2 + 2(\delta - \alpha)\omega - 2\beta. \tag{1}$$

Der repräsentierende Halbkreis dieser Form sei uns zugleich Repräsentant der Substitution V. Wir merken uns überdies noch die Determinante der Form (1):

$$D = (\alpha + \delta)^2 - 4, \tag{2}$$

sowie ihren Teiler σ.

Wir haben nun gesehen, wie man die Substitutionen V^n der cyclischen Gruppe durch die unendlich vielen Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

herstellen kann. Insbesondere entsprang aus der kleinsten positiven Lösung T, U die Substitution V selbst, aus t_n und u_n aber V^n. Es war dabei

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma} = \left(\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n,$$

und wenn wir den Exponenten n hierbei wieder die *Amplitude* der Substitution V^n nennen, so kommt für dieselbe die Darstellung*):

$$n = \frac{\log\left(\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma}\right)}{\log\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}\right)}. \tag{3}$$

Wählen wir jetzt irgend eine Modulsubstitution W und transformieren durch dieselbe unsere cyclische Gruppe der hyperbolischen Substitutionen V^n. Es entspringt dabei eine holoedrisch isomorphe cyclische Gruppe hyperbolischer Substitutionen, welche

$$V'(\omega) = W^{-1}VW(\omega) \tag{4}$$

zur Erzeugenden hat. Der besonderen Substitution V^n der Amplitude n ist dabei V'^n mit der gleichen Amplitude n zugeordnet, so dass wir jedenfalls fordern werden: *Sollen zwei hyperbolische Substitu-*

*) Diese Darstellung steht insofern in engster Beziehung zu der früheren Schreibart der Substitutionen p. 164, als die dort mit k bezeichnete Zahl für die Substitution V^n gerade die Form $k = \left(\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma}\right)^2$ annimmt.

*tionen gleichberechtigt sein, so müssen sie die gleiche Amplitude in ihren bezüglichen cyclischen Untergruppen haben**).

Inzwischen ist die so gefundene Bedingung für die Gleichberechtigung zweier Substitutionen V, V' noch nicht hinreichend. Wir müssen vielmehr darüber hinaus noch beachten, dass die repräsentierenden Halbkreise der beiden Substitutionen

$$V(\omega) \text{ und } V'(\omega) = W^{-1}VW(\omega)$$

mit einander äquivalent sind, indem der eine in den anderen durch Ausführung der Substitution W^{-1} übergeht. Zum Beweise genügt es, wenn wir darthun, dass die Fixpunkte ω_1, ω_2 von V durch Ausübung von W^{-1} in diejenigen der anderen Substitution V' übergehen. Setzt man aber für ω den Wert $\omega_i' = W^{-1}(\omega_i)$, $(i = 1, 2)$, so kommt

$$V'(\omega_i') = W^{-1}VW\,W^{-1}(\omega_i) = W^{-1}(\omega_i) = \omega_i',$$

und es ist also ω_i' wirklich Fixpunkt von V'. *Gleichberechtigte hyperbolische Substitutionen V, V' haben sonach äquivalente repräsentierende Kreise***).

Hierin erkennt man nun aber auch leicht die ausreichende Ergänzung der zunächst angegebenen Bedingung, so dass wir die Frage nach der Gleichberechtigung zweier hyperbolischen Substitutionen unter Verwertung des früher für die Äquivalenz der Formen positiver Determinante erhaltenen Hauptsatzes in folgender Art beantworten: Man untersuche vorab, ob die beiden Substitutionen gleiche Amplitude haben. Trifft dies zu, so transformiere man den die eine Substitution repräsentierenden Halbkreis in oben ausführlich erörterter Weise in die μ das Ausgangsdreieck durchsetzenden Bogen und führe die nämliche Operation auch mit dem Halbkreise der anderen Substitution aus. *Die beiden Substitutionen gleicher Amplitude sind dann und nur dann gleichberechtigt, wenn wir beide Male zu demselben System von Bogen geführt werden.*

---

*) Indessen bemerken wir noch nebenbei, dass es besondere hyperbolische Substitutionen giebt, die mit ihren inversen gleichberechtigt sind, wo dann der im Texte ausgesprochene Satz in sofort ersichtlicher Weise zu ergänzen sein würde. Im einzelnen solchen Fall geht der repräsentierende Halbkreis durch unendlich viele mit $\omega = i$ äquivalente Punkte. Die bezüglichen quadratischen Formen sind solche, die mit Hauptreducierten der Gestalt $(a, b, -a)$ äquivalent sind. Offenbar wird also jede mögliche Zerlegung des Einzelwertes D in die Summe zweier Quadrate $D = b^2 + a^2$ auf Substitutionen dieser besonderen Art führen.

**) Entsprechend entnehmen wir aus der oben gegebenen Entwicklung den Satz: Gleichberechtigte elliptische oder parabolische Substitutionen haben äquivalente Fixpunkte.

§ 17. Gleichberechtigung der in der Modulgruppe enthaltenen cyclischen Untergruppen.

Endlich wollen wir zum Schluss den Begriff der Gleichberechtigung von einzelnen Substitutionen auf die cyclischen Gruppen ausdehnen, die in der Modulgruppe enthalten sind. Es liegt sehr nahe, dass wir zwei cyclische Untergruppen der Modulgruppe dann gleichberechtigt nennen werden, wenn sie sich aus zwei gleichberechtigten Modulsubstitutionen erzeugen lassen. Wenden wir diese Festsetzung zuvörderst auf die *elliptischen* Modulsubstitutionen an, so entspringt der Satz: *Alle cyclischen Untergruppen zweiter Ordnung und desgleichen auch alle cyclischen Untergruppen der dritten Ordnung sind gleichberechtigt.* Jene werden nämlich aus den elliptischen Modulsubstitutionen der Periode zwei, diese aus denjenigen der Periode drei erzeugt.

Benennen wir des weiteren eine cyclische Untergruppe der Modulgruppe als eine „umfassendste", wenn sie nicht in einer noch umfassenderen gleichfalls der Modulgruppe angehörenden cyclischen Gruppe als Untergruppe enthalten ist, *so werden alle umfassendsten cyclischen Untergruppen aus parabolischen Modulsubstitutionen mit einander gleichberechtigt sein*; denn ihre Erzeugenden sind die parabolischen Modulsubstitutionen der Amplitude 1. In der einzelnen solchen umfassendsten cyclischen Gruppe werden dann immer diejenigen Substitutionen wieder eine Untergruppe für sich bilden, deren Amplitude durch eine beliebig gewählte ganze Zahl teilbar ist, welche letztere dann die niederste bei den Substitutionen dieser Untergruppe eintretende Amplitude ist. Der allgemeine Satz ist dann der, *dass je zwei cyclische Untergruppen parabolischer Modulsubstitutionen gleichberechtigt sind, wenn die niedersten in diesem Sinne für die beiden Gruppen in Betracht kommenden Amplituden einander gleich sind.*

Anders natürlich gestalten sich die Dinge für die aus *hyperbolischen* Modulsubstitutionen bestehenden cyclischen Untergruppen. Bringen wir die gleichberechtigten Untergruppen dieser Art immer in eine Classe zusammen, *so erhalten wir leicht ersichtlich noch eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit solcher Classen*, auch wenn wir vorerst ganz allein von den umfassendsten hier in Betracht kommenden cyclischen Untergruppen handeln. Indem wir nämlich hier etwa nur primitive quadratische Formen zulassen, d. i. solche, bei denen a, b, c Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Teiler sind, haben wir offenbar den Satz, dass die eben genannten Classen gleichberechtigter cyclischer Untergruppen den Classen primitiver quadratischer Formen positiver Determinante wechselweise eindeutig zugeordnet sind. Die Anzahl der letzteren Classen ist

aber schon deshalb unendlich gross, weil es unendlich viele positive ganzzahlige D giebt. Dass übrigens in zwei gleichberechtigten umfassendsten cyclischen Gruppen hyperbolischer Modulsubstitutionen wieder gleichberechtigte Untergruppen enthalten sind, folgert man leicht, wie vorhin bei den parabolischen Modulsubstitutionen*).

Die Betrachtungen der letzten Paragraphen haben die Untersuchung der in der Modulgruppe enthaltenen cyclischen Untergruppen soweit gefördert, wie wir sie hier überhaupt geben wollten. Nachdem wir damit nun schon einen Teil unseres gruppentheoretischen Problems zur Erledigung gebracht haben, ist es jetzt an uns, zur Betrachtung nichtcyclischer Untergruppen der Modulgruppe vorzugehen.

---

*) Eine besondere Stellung nehmen dann wieder die Classen derjenigen cyclischen Untergruppen ein, die durch gewisse Modulsubstitutionen der Periode zwei in sich transformiert werden. Es sind das die Classen, welche Operationen der Gestalt $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \beta, & \delta \end{pmatrix}$ enthalten, bez. deren entsprechende Formclassen reducierte Formen der Gestalt $(a, b, -a)$ besitzen.

Viertes Kapitel.

Besprechung einer besonderen in der Modulgruppe enthaltenen Untergruppe.

In den drei voraufgehenden Kapiteln haben wir neben einer Reihe grundlegender Erörterungen unser gruppentheoretisches Grundproblem insoweit behandelt, dass wir uns über die cyclischen Untergruppen in der Modulgruppe unterrichteten. Nun aber bilden die cyclischen Untergruppen nur einen verschwindend kleinen Bruchteil aller der Modulgruppe angehörigen Untergruppen. Wollen wir also jetzt versuchen, uns auch über die nichtcyclischen Untergruppen zu orientieren. Dabei wird uns das auch oben bereits wichtige Hilfsmittel der Fundamentalbereiche von wesentlichstem Nutzen sein. Der Plan unserer Untersuchung ist der, dass wir zuvörderst eine besondere Untergruppe, die seit lange her bekannt ist, aufgreifen und an ihr alle diejenigen Begriffe erläutern, welche hernach bei der allgemeinen Untersuchung der Untergruppen massgeblich werden. Dieser besonderen Untergruppe ist das gegenwärtige Kapitel gewidmet.

§ 1. Definition der Untergruppen Γ' und $\bar{\Gamma}'$.

Zwei besondere Modulsubstitutionen erster Art, die wir, wie auch bisher schon häufig, nur durch Angabe ihrer Coefficienten namhaft machen, seien:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}.$$

Durch Combination derselben entspringt die dritte:

$$\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta''\\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta'\\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta'\end{pmatrix}.$$

Trifft es sich, dass sowohl β wie β' gerade ist, so sieht man, dass auch β'' eine gerade Zahl werden wird. Die Substitutionen mit geradem β geben also unter sich combiniert stets wieder solche, sie bilden eine Untergruppe der Modulgruppe. Auch gerade γ, γ' haben ein gerades γ'' im Gefolge, und wir können insbesondere zusammenfassend den Satz

aufstellen: *Alle Modulsubstitutionen erster Art mit geraden zweiten und dritten Coefficienten β, γ bilden für sich eine Gruppe, welche somit eine Untergruppe der Modulgruppe darstellt.* Die Coefficienten α, δ der betreffenden Substitutionen sind natürlich ungerade.

Die so definierte Untergruppe ist es, deren Untersuchung das gegenwärtige Kapitel gewidmet sein soll. Wir bedienen uns hierbei einer kurzen Bezeichnungsweise, indem wir die Gesamtgruppe der Modulsubstitutionen erster Art, d. i. die ursprüngliche Modulgruppe, durch Γ bezeichnen. Die soeben definierte Untergruppe soll daneben mit Γ' bezeichnet werden, bis eine sachgemässere Benennung für dieselbe gewonnen ist (vergl. den Schluss von § 6, p. 283).

Es handelt sich nun zuvörderst darum, für die Gruppe Γ' eine Theorie zu entwickeln, welche an der Behandlung der Gruppe Γ im zweiten Kapitel des gegenwärtigen Abschnitts ihr Modell findet. Ein Moment wird freilich im Laufe der Besprechung als wesentlich neu hinzukommen, und das ist naturgemäss *die Rückbeziehung der Gruppe Γ' auf die Gruppe Γ*, von der sie ja eine Untergruppe ist. Gerade in diesem Gesichtspunkte der Rückbeziehung auf Γ ist die Möglichkeit begründet, die in Aussicht stehende Untersuchung der Gruppe Γ' hernach zu verallgemeinern.

Von vornherein ist für uns von Wichtigkeit, dass die Gruppe Γ' gerade wie die Gesamtgruppe Γ der Erweiterung vermöge einer Spiegelung fähig ist. Hier wollen wir uns aber keineswegs auf eine allgemeine Untersuchung über die Möglichkeit einer solchen Erweiterung einlassen, vielmehr gehen wir sogleich zu derjenigen besonderen Erweiterung, welche uns im folgenden die besten Dienste leistet. Die Modulsubstitutionen mit geradem β, γ, welche also unsere Untergruppe Γ' bilden, mögen für den Zweck der gegenwärtigen sowie auch der weiter folgenden Überlegungen in irgend eine Reihenfolge gebracht durch $v_0 = 1, v_1, v_2, \cdots$ bezeichnet sein, wobei die erste, v_0, die Identität sein soll. Wir wollen zur Erweiterung alsdann $A(\omega) = -\bar{\omega}$ verwenden, so dass neben jede einzelne Substitution erster Art v_i unserer Untergruppe noch $v_i A$ als Operation zweiter Art tritt. Die leichteste Rechnung beweist, dass die Substitution A mit der Gruppe Γ' vertauschbar ist, *so dass die Gesamtheit der Operationen v_i, $v_i A$ thatsächlich wieder eine Gruppe bildet. Diese nennen wir die erweiterte Gruppe* Γ' und bezeichnen sie kurz durch $\bar{\Gamma}'$, während die Operationen zweiter Art $v_i A$ der so gewonnenen Gruppe auch wohl $\bar{v}_i$ geschrieben werden. In ganz entsprechender Weise bezeichnen wir fortan die im zweiten Kapitel gewonnene erweiterte Modulgruppe durch $\bar{\Gamma}$; *in dieser $\bar{\Gamma}$ ist dann die Gruppe Γ' als Untergruppe enthalten.*

Unsere erste Aufgabe soll jetzt die sein, Fundamentalbereiche für die Gruppen Γ' und $\bar{\Gamma}'$ zu construieren. Nach den Erfahrungen des zweiten Kapitels wird es vorteilhaft sein, in diesem Betracht mit der erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}'$ zu beginnen, indem wir dann in der That gestaltlich fest bestimmte Fundamentalbereiche für unsere Gruppen erwarten dürfen, wofern sich die Verhältnisse hier ähnlich gestalten sollten, wie im zweiten Kapitel bei der Untersuchung der Gruppen Γ, $\bar{\Gamma}$.

§ 2. Der Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}'$.

Unter den Substitutionen zweiter Art unserer erweiterten Untergruppe $\bar{\Gamma}$:

$$\bar{v}(\omega) = \frac{\alpha\bar{\omega} - \beta}{\gamma\bar{\omega} - \delta}$$

stellen diejenigen mit $\alpha = \delta$ auf Grund unserer früheren Entwicklungen Spiegelungen dar. Für die einzelne solche Spiegelung ist nach Formel (5) p. 198 der Symmetriekreis durch

$$\gamma(x^2 + y^2) - 2\alpha x + \beta = 0 \tag{1}$$

gegeben, wo nun β und γ keiner anderen Bedingung unterworfen sind, als dass sie gerade genommen werden müssen, während

$$\alpha^2 - \beta\gamma = 1 \tag{2}$$

ist.

Die Gesamtheit der in der positiven Halbebene verlaufenden Halbkreise (1) *stellt nun gerade die Gattung derjenigen Halbkreise der Modulteilung* (*Fig. 36, p. 113*) *dar, welche aus je zwei Elementardreieckseiten zusammengesetzt sind.* Wollen wir uns nämlich für die Kreise dieser Gattung allgemein die Gleichung aufstellen, so beachten wir, dass sie alle mit einem unter ihnen, etwa mit dem durch $x = 0$ dargestellten, äquivalent bezüglich Γ waren. Ist aber eine beliebige Modulsubstitution erster Art

$$\omega' = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'},$$

und lässt man ω' die imaginäre ω-Axe beschreiben, so beschreibt ω zufolge elementarer Rechnung den Kreis:

$$2\alpha'\gamma'(x^2 + y^2) + 2(\alpha'\delta' + \beta'\gamma')x + 2\beta'\delta' = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung subsumiert sich unter die Gleichungen (1); denn sie hat gerade ganze Zahlen zu Coefficienten, welche überdies der Bedingung

$$(\alpha'\delta' + \beta'\gamma')^2 - 2\alpha'\gamma' \cdot 2\beta'\delta' = 1$$

genügen. Andrerseits aber lässt sich (1) stets auf die Form (3) bringen. Benennen wir nämlich den grössten Teiler von $(\alpha + 1)$ und γ,

der doch eine gerade Zahl sein wird, durch 2τ, so definieren wir von den Coefficienten der Gleichung (1) aus die vier Zahlen α', β', γ', δ' durch:

$$\alpha' = -\frac{\gamma}{2\tau}, \quad \beta' = \frac{\alpha+1}{2\tau}, \quad \gamma' = -\tau, \quad \delta' = \frac{\beta\tau}{\alpha+1} = \frac{\tau(\alpha-1)}{\gamma}.$$

Die ersten drei derselben stellen sich sofort als *ganze* Zahlen dar, während man für die vierte den gleichen Charakter sehr leicht auf Grund von (2) erkennt. Da man endlich noch sofort verificiert, dass $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ ist, so können wir unsere vier Zahlen als Coefficienten einer gewissen Modulsubstitution erster Art ansehen. Indem wir dann die Coefficienten von (1) durch α', β', γ', δ' ausdrücken, gewinnen wir in der That eine Gleichung, welche sich unter (3) subsumiert.

Nehmen wir auf Grund dieses Resultates aus der Modulteilung, wie wir sie von früher her kennen, alle aus je vier Dreiecksseiten ge-

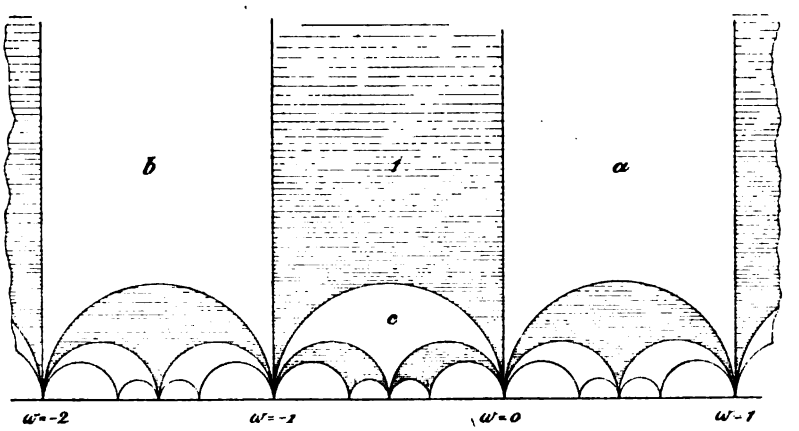


Fig. 66.

bildeten Halbkreise heraus, so verbleibt uns diejenige Teilung der ω-Halbebene, welche durch die Symmetriekreise der in der Gruppe $\bar{\Gamma}'$ enthaltenen Spiegelungen bewerkstelligt wird. Diese Massnahme ist nun gerade entgegengesetzt dem Übergange, welcher uns oben (p. 111, 112) von Fig. 34 zu Fig. 35 führte. Also gewinnen wir jetzt durch die Kreise (1) eine mit Fig. 34 kreisverwandte Teilung der ω-Halbebene in unendlich viele mit lauter verschwindenden Winkeln ausgestattete Kreisbogendreiecke. In Fig. 66 haben wir einige derselben entworfen und dieselben im Anschluss an Fig. 34 wechselweise schraffiert und frei gelassen.

Ein jedes dieser Dreiecke, z. B. das in der Figur mit 1 *bezeichnete, ist*, so behaupten wir nun, *ein Fundamentalbereich für die erweiterte Gruppe* $\bar{\Gamma}'$. Notieren wir gleich, dass unter den drei Randcurven des

so gewählten Dreiecks die beiden Geraden durch $x = 0$, $x + 1 = 0$ gegeben werden, während die dritte Seite durch $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ dargestellt ist. Die Punkte des Dreiecks 1 sind also charakterisiert durch die beiden Bedingungen:

$$(4) \qquad -1 < x \leq 0, \qquad x^2 + x + y^2 \geq 0.$$

Dass aber das Dreieck 1 thatsächlich ein Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}'$ ist, folgt nun so. Erstlich sind alle Dreiecke der Fig. 66 mit einem unter ihnen z. B. dem Dreieck 1 bezüglich $\bar{\Gamma}'$ äquivalent; denn je zwei benachbarte Dreiecke gehen durch die zum bezüglichen Symmetriekreis (1) gehörende Spiegelung $\bar{v}$ in einander über. Da diese Dreiecke aber in ihrer Gesamtheit die ganze ω-Halbebene bedecken, so existiert für jeden Punkt der letzteren wenigstens ein bezüglich der $\bar{\Gamma}'$ äquivalenter Punkt im Dreieck 1. Wären andrerseits ω', ω zwei bezüglich der $\bar{\Gamma}'$ äquivalente Punkte im Innern des Dreiecks 1, so könnte doch sicher nicht $\omega' = v(\omega)$ sein. Denn eine solche Operation v würde jedenfalls nicht die Form $\begin{pmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ haben können, da Dreieck 1 ganz innerhalb eines Fundamentalbereichs von S gelegen ist. Unsere supponierte Substitution v müsste also einen von 0 verschiedenen dritten Coefficienten γ haben, und wir setzen etwa $v = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$. Dann aber gewinnt der Satz Anwendung, dass wenigstens der eine unserer beiden äquivalenten Punkte ω', ω von einem der beiden reellen Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$, $-\frac{\delta}{\gamma}$ eine Entfernung $\leq \frac{1}{\gamma}$ besitzen muss. Unter Rücksicht darauf, dass gegenwärtig γ stets eine gerade und also α und δ ungerade Zahlen sind, folgt in der That aus den bezeichneten Lagenverhältnissen durch eine leichte Betrachtung, dass von jenen beiden Punkten ω', ω höchstens der eine dem Dreieck 1 angehören kann. Nun könnte es aber zweitens sein, dass die beiden bezüglich der $\bar{\Gamma}'$ äquivalenten Punkte ω', ω des Dreiecks 1 durch eine in jener Gruppe enthaltene Operation zweiter Art $\bar{v}$ zusammengeordnet wären. Dann spiegele man etwa den Punkt ω' an der imaginären Axe, wobei er in einen Punkt ω'' des in Fig. 66 mit a bezeichneten Dreiecks übergeht. Dieser Punkt ω'' würde dann aus ω durch eine Substitution v entspringen, was man jedoch gerade durch die eben schon benutzte Schlussfolgerung als unmöglich erkennt. Das Dreieck 1 birgt also keine zwei bezüglich der $\bar{\Gamma}'$ äquivalente Punkte und ist somit thatsächlich ein Fundamentalbereich dieser Gruppe, woraus wir nun sogleich eine Reihe weiterer Folgerungen ziehen.

§ 3. Die Erzeugenden von $\bar{\Gamma}'$ und Γ'.

Ordnen wir den gerade gefundenen Fundamentalbereich der $\bar{\Gamma}'$ der identischen Substitution 1 zu, so sind überhaupt die sämtlichen Dreiecke der in Fig. 66 angedeuteten Halbebenenteilung einzeln den Operationen v, $\bar{v}$ der $\bar{\Gamma}'$ eindeutig zugeordnet, und es entsprechen insbesondere immer die schraffierten Dreiecke den Operationen erster Art v. Hier sehen wir nun, dass Punkte ω auf der Grenze zweier benachbarten Dreiecke sich selbst bezüglich der $\bar{\Gamma}'$ immer zweifach äquivalent sind, indem sie ausser durch die identische Substitution noch durch diejenige Spiegelung in sich selbst transformiert werden, welche eben jene zwei benachbarten Dreiecke permutiert. Eine höhere als zweifache Äquivalenz mit sich selbst bezüglich der $\bar{\Gamma}'$ kommt nur für die Ecken der Dreiecke vor*); eine einzelne solche, in einem reellen rationalen Punkte ω gelegen, ist mit sich selbst ∞-fach äquivalent, da sie gemeinsame Ecke für unendlich viele Dreiecke der Fig. 66 ist.

Nachdem wir dies kurz bemerkten, verfolgen wir nunmehr die drei Spiegelungen der $\bar{\Gamma}'$, welche das Dreieck 1 der Fig. 66 in die drei unmittelbar benachbarten, nicht schraffierten Dreiecke überführen. Diese Spiegelungen nennen wir abgekürzt a, b, c in der in der Figur angezeigten Reihenfolge und berechnen sehr leicht als explicite Gestalt unserer drei Substitutionen:

$$(1) \qquad a(\omega) = -\bar{\omega}, \qquad b(\omega) = -\bar{\omega} - 2, \qquad c(\omega) = \frac{\bar{\omega}}{-2\bar{\omega} - 1},$$

(wobei natürlich a nur eine andere Schreibweise für die sonst mit A bezeichnete Operation ist). Überhaupt aber bilden diese drei Operationen a, b, c für die Gruppe $\bar{\Gamma}'$ das, was die Substitutionen A, B, C für $\bar{\Gamma}$ waren. In der That erkennt man aus der Figur, *dass a, b, c ein System von Erzeugenden für die erweiterte Gruppe $\bar{\Gamma}'$ bilden.* Jede Substitution v, $\bar{v}$ dieser Gruppe lässt sich also symbolisch als Product aus Factoren a, b, c schreiben, und wir brauchen insbesondere, um jedes solche Product zu bilden, nicht dieselbe Substitution zweimal hinter einander oder noch öfter auszuüben, da ja a, b, c als Spiegelungen den Gleichungen:

$$a^2 = 1, \qquad b^2 = 1, \qquad c^2 = 1$$

genügen. Je nachdem die Factorenanzahl eines einzelnen solchen Pro-

*) In der That kommt ja unter den Substitutionen v keine elliptische vor. Es fehlen nämlich diejenigen von der Periode drei, weil α und δ für die Substitutionen v beide ungerade sind und also $\alpha + \delta = 1$ hier ausgeschlossen bleibt; es fehlen ferner diejenigen der Periode zwei, weil bei diesen $-\beta\gamma = \alpha^2 + 1$ sein müsste, während doch $\alpha^2 + 1$ niemals eine durch 4 teilbare Zahl sein kann.

ductes gerade oder ungerade ist, wird dasselbe eine Operation erster oder zweiter Art der Gruppe $\bar{\Gamma}'$ darstellen.

Aus besagten Verhältnissen ergiebt sich für die Substitutionen v, welche für sich genommen die Gruppe Γ' bilden, dass sie sich aus den sechs unter ihnen: ab, ac, bc, ba, ca, cb werden erzeugen lassen. Aber von diesen sechs Operationen v sind die drei letzten die inversen der drei ersten, und da wir bei unserer Fassung des Gruppenbegriffs mit der einzelnen Substitution auch immer deren inverse gegeben denken, so wird man die Γ' aus den Substitutionen

$$(2) \qquad s(\omega) = ab(\omega), \qquad t(\omega) = ac(\omega), \qquad u(\omega) = bc(\omega)$$

herstellen können. Aber auch hier lässt sich noch eine Reduction vornehmen, indem ersichtlich

$$u = bc = ba \cdot ac = s^{-1}t$$

wird. Die Verhältnisse gestalten sich also ganz ähnlich, wie oben bei der Gesamtgruppe Γ (p. 219, 233). Wir haben den Satz: *Die in* (2) *definierten Substitutionen s und t sind Erzeugende der Untergruppe* Γ'. Explicit lauten diese beiden Substitutionen:

$$(3) \qquad s(\omega) = \omega + 2, \qquad t(\omega) = \frac{\omega}{2\omega + 1}.$$

Ihrer Art nach sind dieselben, wie die Formeln zeigen, parabolische Substitutionen und zwar solche der Amplitude ± 2.

§ 4. Der einfachste Fundamentalbereich für Γ'.

Wir wollen die beiden Kreisbogendreiecke 1 und a des vorigen Paragraphen zu einem grösseren Bereiche combinieren, welcher das in Fig. 67 dargestellte *Kreisbogenviereck* abgiebt. *Dieses Viereck ist ein Fundamentalbereich für die ursprüngliche Untergruppe* Γ'. Erstlich ist nämlich klar, dass, wo immer wir auch einen Punkt der ω-Halbebene fixieren mögen, derselbe stets bezüglich der Gruppe Γ' einen äquivalenten Punkt im Viereck Fig. 67 besitzt (der dessen schraffiertem oder freiem Dreieck angehört, je nachdem jener Punkt selbst in einem schraffierten oder freien Dreiecke der in Fig. 66 angedeuteten Ebenenüberdeckung gelegen

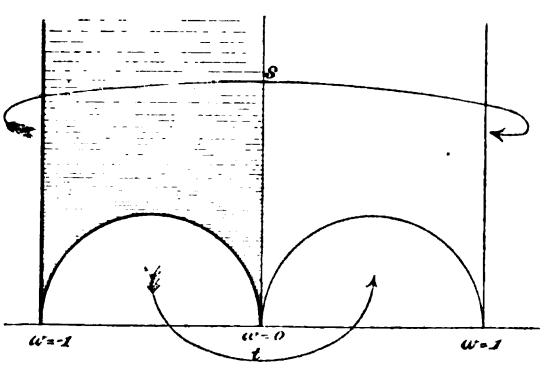


Fig. 67.

ist). Andrerseits besitzt unser Viereck keine zwei bezüglich Γ' äquivalente Punkte, was wir in der That bereits p. 274 bewiesen haben. Freilich sind bezüglich der $\overline{\Gamma}'$, wie die Figur zeigt, die Punkte des Vierecks immer zu Paaren äquivalent, indem je zwei solche stets durch die Spiegelung a zusammengeordnet werden; aber die Operation a gehört ja als von der zweiten Art der Gruppe Γ' nicht an, so dass die Punkte jener Paare einander bezüglich Γ' nicht äquivalent sind*).

Bei dieser Erörterung spielen selbstverständlich die auf der Berandung des Vierecks gelegenen Punkte eine besondere Rolle. In der That sieht man, dass die beiden Geraden, welche nach rechts und links unser Viereck abschliessen, bezüglich der Γ' äquivalent ausfallen; denn die eine von ihnen wird durch die Substitution $s(\omega) = \omega + 2$ in die andere transformiert. Desgleichen sind die beiden nach unten hin das Viereck begrenzenden Halbkreise bezüglich Γ' äquivalent, indem der eine durch die Operation $t(\omega) = \frac{\omega}{2\omega + 1}$ in den anderen übergeht. Das sind aber gerade die Erzeugenden der Gruppe Γ', so dass wir den Satz aussprechen werden: *Die Grenzkreise des Fundamentalbereichs der Γ' sind zu Paaren einander zugeordnet, und jedem dieser Paare gehört eine der erzeugenden Substitutionen der Γ' in der Weise zu, dass durch diese Substitution der eine Kreis des Paares in den anderen übergeführt wird.* In der Figur 67 ist die Zuordnung dieser Grenzkreise durch Pfeile angedeutet. Damit aber das Viereck, in Übereinstimmung mit diesen Erläuterungen, den Anforderungen eines Fundamentalbereichs für die Γ' vollends entspricht, rechnen wir fortan von den Randpunkten desselben nur die auf den in der Figur stärker markierten Grenzkreisen gelegenen dem Vierecke zu.

Auf diese letztere Bestimmung müssen wir Rücksicht nehmen, wenn wir rein arithmetisch die Bedingungen formulieren wollen, denen die Punkte des Fundamentalbereichs der Γ' genügen. Unter Rücksicht auf die Gleichungen der Grenzkreise findet man dann leicht den Satz: *Ein Punkt $\omega = x + iy$ gehört dann und nur dann dem Fundamentalbereiche der Γ' an, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

$$(1) \qquad -1 < x < +1, \qquad x^2 \pm x + y^2 \gtrless 0.$$

Dabei ist hinzuzusetzen, *dass letztere Bedingung, so lange wir das Zeichen $>$ anwenden, sowohl für das obere wie untere Zeichen gelten soll,*

*) Ganz analog gestaltete sich oben am Schlusse von II, 1 die Beziehung des Fundamentalbereichs einer cyclischen Gruppe zu demjenigen der bezüglichen erweiterten Gruppe. Auch dort konnte der letztere Bereich aus dem ersteren durch symmetrische Halbierung hergestellt werden.

dass aber das Gleichheitszeichen in derselben höchstens für das obere Zeichen + zutreffen darf.

Unser oft genanntes Kreisbogenviereck soll jetzt selbst den Namen 1 der identischen Substitution bekommen, der vorhin nur seinem schraffierten Teile beigelegt war. Der Bereich 1 wird uns dann als *Ausgangsviereck oder Ausgangsraum der Gruppe* Γ' dienen, von dem aus wir den Substitutionen v der Γ' entsprechend die Überdeckung der ganzen ω-Halbebene mit Kreisbogenvierecken leisten. Das einzelne unter ihnen soll dann wieder den Namen v der Substitution tragen, durch die es aus dem Viereck 1 entsprang. Die Gesamtheit dieser den Substitutionen v entsprechenden Vierecke werden alsdann die ω-Halbebene *einfach und lückenlos* bedecken, wie wir durch schon öfter geübte Schlussfolgerung beweisen. In der That brauchen wir aber auf diesen Nachweis hier gar nicht näher einzugehen; denn wir kommen von der bekannten in Fig. 66 angedeuteten Halbebenenüberdeckung durch Kreisbogendreiecke direct zur jetzt gemeinten Überdeckung, indem wir jedes schraffierte Dreieck v derselben mit dem benachbarten freien Dreieck va zum Kreisbogenviereck v combinieren. Man denke sich diese Operation insbesondere für die in Fig. 66 aufgenommenen Dreiecke ausgeführt, wobei man denn auch erkennt, dass das Viereck 1 rings von den vier neuen Vierecken s, s^{-1}, t, t^{-1} umlagert ist*).

§ 5. Ansatz zur Rückbeziehung der Untergruppe Γ' auf die Gesamtgruppe Γ.

Die bisherigen Entwicklungen zeigen die grösste Analogie zwischen den Gruppen Γ und Γ', deren letztere sich bis hierher in der That

*) Das Ausgangsviereck der Gruppe Γ' tritt in der neueren Litteratur bereits mehrfach auf. Man sehe z. B. die schon p. 63 genannte Arbeit von Schwarz Cr. J. Bd. 75 p. 318 und 319, sowie namentlich, was die Beziehung zur Modulteilung angeht, die gleichfalls bereits öfter genannte Arbeit von Klein in Bd. 14 der Math. Ann. p. 119 u. f. Des weiteren liegt der früher genannten Arbeit von St. Smith über die quadratischen Formen positiver Determinante der Fundamentalbereich der Gruppe Γ' als Ausgangsraum zu Grunde, eine Abweichung gegen unsere obige Darstellung, deren wir bereits bei Gelegenheit (p. 251) gedachten. Vor allem aber dürfte es interessant sein, dass sich schon bei Gauss im Verein mit den Substitutionen, welche hier die Γ' bilden, die Vorstellung eines in der complexen Ebene der den Substitutionen unterworfenen Variabelen gelegenen Bereiches findet, welcher ganz unzweideutig mit unserem Ausgangsviereck im wesentlichen übereinstimmt. Man sehe den dritten Band der Gauss'schen Werke p. 478, wo sich die Substitutionen der Γ' völlig charakterisiert finden, und wo der gemeinte Bereich durch eine Figur wiedergegeben ist, in der freilich die halbkreisförmigen Randcurven nur mangelhaft zu erkennen sind. In der That ist es aber aus den an der citierten Stelle bei Gauss vorliegenden functionentheoretischen Bemerkungen unzweifelhaft, dass Gauss die richtige Figur im Sinne hatte.

gerade so behandeln liess, wie im vorletzten Kapitel die Gruppe Γ. Nun aber soll es gelten, die Beziehung zwischen den beiden Gruppen Γ und Γ' zum Gegenstande der Untersuchung zu machen, und dabei kommen wir zu wesentlich neuen Gesichtspunkten. Da die nächsten Betrachtungen durchaus auf diese beiden Gruppen eingeschränkt bleiben, so erlauben wir uns für die Äquivalenz der Punkte der ω-Halbebene eine abgekürzte Bezeichnungsweise. Punkte, die bezüglich der Gruppe Γ' äquivalent sind, sollen kurz „relativ äquivalent" heissen, während Punkte, die bezüglich der Gesamtgruppe Γ äquivalent sind, schlechtweg „äquivalent" genannt werden sollen.

In diesem Sinne werden relativ äquivalente Punkte stets auch äquivalent heissen müssen; denn die Substitution v, welche den einen jener Punkte in den anderen transformiert, gehört als Modulsubstitution auch der Gruppe Γ an. Aber nicht jede Modulsubstitution gehört der Gruppe Γ' an, so dass nicht beliebige zwei äquivalente Punkte darum schon relativ äquivalent zu nennen sind. Es ist demnach auch sehr wohl möglich, dass im Innern des Fundamentalbereichs der Gruppe Γ' noch Paare oder Tripel u. s. w. äquivalenter Punkte ausfindig gemacht werden können. Wir wollen geradezu die Aufgabe stellen, zu untersuchen, wie es mit der Äquivalenz der Punkte im Innern des Kreisbogenvierecks Fig. 67 beschaffen ist.

Um hierüber zu entscheiden, erinnern wir daran, dass äquivalente Punkte homolog in den Doppeldreiecken der Modulteilung gelegen sind. Indem wir aber die Dreiecke der Modulteilung in unser Kreisbogenviereck eintragen, entspringt die nebenstehend abgebildete Fig. 68. Wir entnehmen aus derselben den wichtigen Satz: *Der Fundamentalbereich der Untergruppe Γ' stellt einen Complex von zwölf Elementardreiecken der Modulteilung dar, von denen die Hälfte schraffiert, die Hälfte frei ist. Daher ist der einzelne Punkt des Kreisbogenvierecks stets einer unter sechs diesem Viereck angehörigen äquivalenten Punkten.* So z. B. haben wir in Fig. 68 und zwar im Elementardreieck 1 einen Punkt ω_0 fixiert. Mit ihm sind dann die homologen Punkte $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5$ in den übrigen schraffierten Dreiecken der Figur äquivalent.

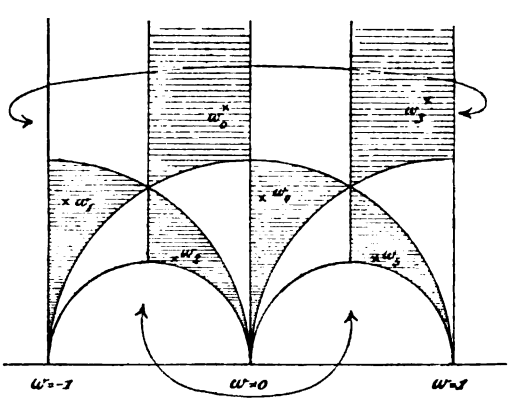


Fig. 68.

Wollen wir die Substitutionen ausrechnen, durch welche derartige sechs äquivalente Punkte $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_5$ des Kreisbogenvierecks mit einander verbunden sind, *so macht es einen Unterschied aus, ob diese Punkte schraffierten oder freien Dreiecken angehören.* Im ersteren Falle, auf welchen sich also direct Fig. 68 bezieht, nehmen wir ω_0 im Elementardreieck 1 an und finden dann nach Regeln des vorletzten Kapitels ohne Mühe

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\omega_0 = \omega_0, \quad && \omega_1 = \frac{\omega_0 + 1}{-\omega_0}, \quad && \omega_2 = \frac{-1}{\omega_0 + 1}, \\ &\omega_3 = \omega_0 + 1, \quad && \omega_4 = \frac{-1}{\omega_0}, \quad && \omega_5 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + 1}, \end{aligned}$$

sechs Substitutionen, die wir der Reihe nach durch $V_0 = 1, V_1, \cdots, V_5$ bezeichnen. Liegen unsere sechs Punkte hingegen in den sechs freien Elementardreiecken der Fig. 68 und unter ihnen etwa ω_0 im Dreieck A, so treten an Stelle der Substitutionen (1), wie man leicht zeigt,

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\omega_0 = \omega_0, \quad && \omega_1 = \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0}, \quad && \omega_2 = \frac{-1}{\omega_0 - 1}, \\ &\omega_3 = \omega_0 - 1, \quad && \omega_4 = \frac{-1}{\omega_0}, \quad && \omega_5 = \frac{\omega_0}{-\omega_0 + 1}, \end{aligned}$$

welche Substitutionen wir bez. durch $V_0' = 1, V_1', \cdots, V_5'$ bezeichnen.

Die beiden so gefundenen Reihen von je sechs Operationen V_i, V_i' stimmen nur insofern überein, als $V_0' = V_0$, $V_4' = V_4$ ist; in allen übrigen Fällen ist aber V_i' von V_i verschieden. Dieser Mangel an Übereinstimmung zwischen freien und schraffierten Elementardreiecken würde für weiter zu ziehende Folgerungen sehr störend sein, wenn er sich nicht durch einen einfachen Kunstgriff überwinden liesse. Wir erinnern daran, dass der Fundamentalbereich der nur aus Operationen *erster* Art bestehenden Gruppe Γ' früheren Erläuterungen zufolge (p. 191) gestaltlich in der mannigfaltigsten Weise gewählt werden kann. Haben wir ihn einmal in bestimmter Weise gewählt wie z. B. in Fig. 67, wo dann die Randcurven zu Paaren einander relativ äquivalent sind, so hindert nichts, dass wir an irgend einer Stelle des Randes ein Stück aus dem Bereiche herauslösen und auf dieses gesondert diejenige Substitution der Untergruppe Γ' anwenden, welche es an der bezüglichen, relativ äquivalenten Stelle des Randes anhängt; der so modificierte Bereich wird ebensowohl ein Fundamentalbereich von Γ' sein, wie der ursprüngliche. Derartige Gestaltänderungen mögen wir nun auch wiederholt anwenden, immer werden wir doch so zu neuen Bereichen geführt, die gleichfalls Fundamentalbereiche für Γ' abgeben. Um einen kurzen Ausdruck zu haben, wollen wir die in Rede stehende Operation als *„erlaubte Abänderung"* des Fundamentalbereichs benennen.

Durch erlaubte Abänderung des Fundamentalbereichs Fig. 68 können wir nun Übereinstimmung zwischen den zu den freien und schraffierten Dreiecken gehörigen Substitutionen V, V' erzielen. In der That trenne man zuvörderst vom Bereiche Fig. 68 die drei links von der Linie $x = -\frac{1}{2}$ gelegenen Elementardreiecke ab und trage sie durch Ausübung der Substitution $s(\omega) = \omega + 2$ an der rechts liegenden geraden Grenzlinie des Bereiches wieder an. Dadurch erhalten wir die nebenstehend (Fig. 69) wiedergegebene Gestalt für den Fundamentalbereich, wobei man vor allem darauf achtgeben wolle, in welcher Zuordnung nun die Randcurven relativ äquivalent sind (es ist dies in der Figur durch Pfeile angedeutet). Im jetzt erhaltenen Bereich schneide man noch die links unten und rechts unten gelegenen Elementardreiecke ab und hefte sie durch Ausführung der bezüglichen Substitutionen v an den relativ äquivalenten Stellen (d. h. in der Mitte unten) wieder an; dergestalt entspringt Fig. 70.

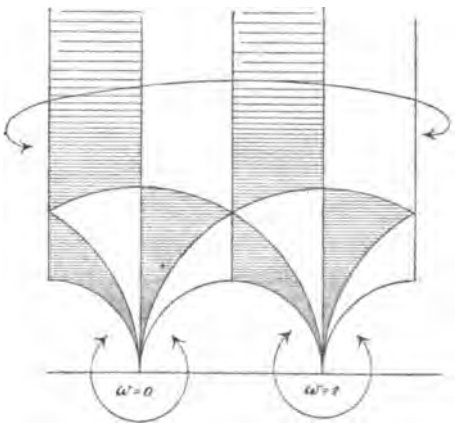


Fig. 69.

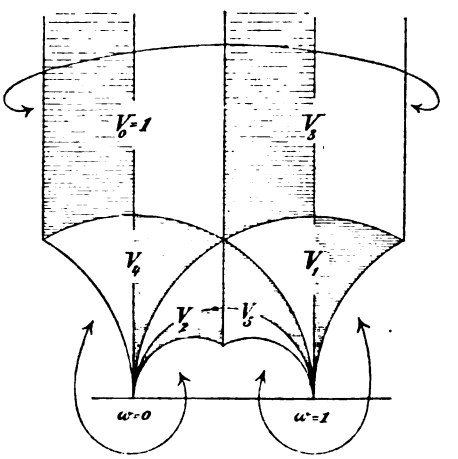


Fig. 70.

Wollen wir nun unter Zugrundelegung dieses Fundamentalbereichs die sechs Substitutionen berechnen, welche einen Punkt ω_0 etwa des Doppeldreiecks 1 in die sechs im Bereich gelegenen äquivalenten Punkte überführen, so zeigt sich thatsächlich ein Unterschied zwischen schraffierten und freien Dreiecken nicht mehr. In jedem Falle erhalten wir:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\omega_0 = \omega_0, \quad && \omega_1 = \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0}, \quad && \omega_2 = \frac{-1}{\omega_0 - 1}, \\ &\omega_3 = \omega_0 + 1, \quad && \omega_4 = \frac{-1}{\omega_0}, \quad && \omega_5 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + 1}, \end{aligned}$$

sechs Substitutionen, die wir jetzt $V_0 = 1, V_1, \cdots, V_5$ nennen wollen, da die bisher mit dieser Bezeichnung belegten Substitutionen (1) nicht

weiter in Betracht kommen. Diese V_i sind denn auch bereits in der richtigen Folge in Fig. 70 eingetragen. Den so gestalteten Fundamentalbereich (Fig. 70) für die Untergruppe Γ' wollen wir bei den nächsten Betrachtungen zu Grunde legen. Wir betonen ausdrücklich, *dass sich derselbe aus gewissen sechs Doppeldreiecken der Modulteilung zusammensetzen lässt.*

§ 6. Repräsentantensystem und Index für die Untergruppe Γ'. Bezeichnung Γ_6 statt Γ'.

Ein völlig beliebiges Doppeldreieck der Modulteilung trage im früher erörterten Sinne den Namen der Substitution V. Ist also ω' ein Punkt im „Innern" dieses Dreiecks, ω aber sein äquivalenter Punkt im Ausgangsdreieck der Gruppe Γ, so ist

$$\omega' = V(\omega). \tag{1}$$

Der Punkt ω besitzt andrerseits einen relativ äquivalenten Punkt ω'' im Fundamentalbereiche der Γ', und es sei etwa $\omega' = v_k(\omega'')$. Der so gemeinte Punkt ω'' liege nun im Doppeldreieck V_i der Fig. 70, so dass $\omega'' = V_i(\omega)$ und also weiter

$$\omega' = v_k V_i(\omega) \tag{2}$$

wird, wobei ω und ω' wieder die in (1) enthaltenen Punkte sind. Da wir aber ω' im „Innern" seines Dreiecks V annahmen, so sind die Punkte ω und ω' nur einfach äquivalent, und wir dürfen aus (1) und (2) auf die Identität der Substitutionen V und $v_k V_i$ schliessen. *Jede beliebige Modulsubstitution erster Art V lässt sich sonach in der Gestalt*:

$$V = v_k V_i \tag{3}$$

darstellen, und zwar nur in einer einzigen Weise, wie wir nun noch zeigen wollen. Gesetzt nämlich, es gäbe für V neben der Darstellung (3) noch eine zweite $v_m V_l$, so wäre

$$V_i(\omega) = v_k^{-1} v_m V_l(\omega) = v_n V_l(\omega),$$

wobei wir unter ω jeden beliebigen Punkt verstehen dürfen. Sei derselbe jetzt im Ausgangsdreieck der Gruppe Γ gelegen und zwar im „Innern" desselben, so liegen die beiden Punkte $V_i(\omega)$ und $V_l(\omega)$ im „Innern" des Fundamentalbereichs der Gruppe Γ'. Dieselben sind nun auf Grund der letzten Gleichung relativ äquivalent; deshalb müssen sie bei ihrer bezeichneten Lage coincidieren. Überdies sind dieselben auch nur *einfach* relativ äquivalent; wir haben sonach $v_k^{-1} v_m = v_n = 1$, d. i. $v_k = v_m$ und eben deshalb $V_i = V_l$, was zu zeigen war.

Wenn wir nun auf Grund des gewonnenen Satzes das Substitutionenschema anschreiben:

$$
\begin{array}{llllll}
1, & v_1, & v_2, & \cdots, & v_k, & \cdots, \\
V_1, & v_1V_1, & v_2V_1, & \cdots, & v_kV_1, & \cdots, \\
V_2, & v_1V_2, & v_2V_2, & \cdots, & v_kV_2, & \cdots, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
V_5, & v_1V_5, & v_2V_5, & \cdots, & v_kV_5, & \cdots,
\end{array} \tag{4}
$$

so umfasst dasselbe die Gesamtheit der Substitutionen der Gruppe Γ, *und es ist jede einzelne derselben auch nur einmal aufgeführt.* Die Substitutionen der Gruppe Γ erscheinen so der Untergruppe Γ' entsprechend in sechs Classen (Horizontalreihen des Schemas) angeordnet, wobei die erste Classe gerade die Substitutionen der Untergruppe Γ' umfasst. Die einzelne dieser Classen ist völlig charakterisiert durch Angabe einer einzigen ihrer Substitutionen; wir wollen sagen, dass jede solche Substitution ihre ganze Classe *repräsentiert.* Es liegt offenbar am nächsten, zu diesem Ende die in der ersten Verticalreihe des Schemas (4) untergebrachten Substitutionen $V_0 = 1, V_1, V_2, \cdots, V_5$ selbst zu verwerten. Wir drücken diese Sachlage durch den folgenden Satz aus: *Die sechs Substitutionen* $V_0 = 1, V_1, V_2, \cdots, V_5$ *bilden ein der Untergruppe* Γ' *entsprechendes Repräsentantensystem für die Gesamtgruppe* Γ *oder, ausführlicher gesprochen, für die sechs Classen, in welche sich die Substitutionen von* Γ *der Untergruppe* Γ' *entsprechend spalten.*

Im Anschluss daran wollen wir hier noch einen Ausdruck einführen, der gelegentlich schon im vorigen Abschnitt genannt wurde und in der Folge vielfach auftritt. Um die *Anzahl* der Repräsentanten V_i hervortreten zu lassen, werden wir fortan sagen, *die Gruppe* Γ' *habe als Untergruppe von* Γ *den Index sechs**). Dieser Index in Bezug auf die Gesamtheit Γ möge nun geradezu in die Bezeichnung der Untergruppe aufgenommen werden. *Wir wollen nämlich fortan statt der vorläufigen Bezeichnung* Γ' *die inhaltreichere Bezeichnung* Γ_6 *in Anwendung bringen.* In diesem Sinne könnte die Gesamtgruppe Γ auch als Γ_1 bezeichnet werden**).

---

*) Wir nehmen hier ersichtlich nur die p. 140 begonnenen Entwicklungen wieder auf. Es handelt sich hier wie auch im folgenden Paragraphen um ganz elementare Sätze der Gruppentheorie, die als solche wohlbekannt sind. Das Eigentümliche der im Texte gegebenen Darstellung liegt in der fortwährenden Bezugnahme auf die Figuren der ω-Halbebene.

**) Wie hier der Fundamentalbereich der Γ_6 sich aus *sechs* Fundamentalbereichen der Γ aufbaut, so fanden wir oben in § 4 den Fundamentalbereich der Γ' aus zwei Fundamentalbereichen der $\bar{\Gamma}'$ bestehend; in der That handelt es sich hier um einander entsprechende Sätze, indem nämlich Γ' als Untergruppe der $\bar{\Gamma}'$ vom Index zwei zu bezeichnen ist. Ebenso umfasst der Fundamentalbereich von Γ zwei Fundamentalbereiche von $\bar{\Gamma}$ (zwei Elementardreiecke). Wir

§ 7. Die Γ_6 als ausgezeichnete Untergruppe.

Sei V irgend eine beliebige Modulsubstitution erster Art, so wollen wir jetzt die Substitutionen v_k der Untergruppe Γ_6 durch V transformieren. Die einzelne Substitution v_k gehe dabei über in v_k', so dass

$$v_k' = V^{-1} v_k V \tag{1}$$

sein wird. Die Gesamtheit der so entspringenden Substitutionen v_k' bildet, wie wir wissen, wieder eine Gruppe, welche vermöge der Zuordnung von v_k und v_k' holoedrisch isomorph auf Γ_6 bezogen ist. Bezeichnen wir die Gruppe der Substitutionen v_k' mit Γ_6' und nehmen für dieselbe eine bereits im vorigen Kapitel bei den cyclischen Untergruppen zur Verwendung gekommene Ausdrucksweise wieder auf, *indem wir die Untergruppe Γ_6' mit Γ_6 innerhalb der Gesamtgruppe Γ gleichberechtigt nennen*, was wir symbolisch durch

$$\Gamma_6' = V^{-1} \Gamma_6 V \tag{2}$$

ausdrücken wollen.

Ist V eine Substitution der Gruppe Γ_6 selbst, also $V = v_l$, so folgt aus der Gruppeneigenschaft von Γ_6, dass Γ_6' identisch mit Γ_6 wird:

$$\Gamma_6 = v_l^{-1} \Gamma_6 v_l .$$

Hieraus aber folgt weiter, dass die Substitutionen der einzelnen Horizontalreihe des Schemas (4) § 6, zur Transformation von Γ_6 angewandt, stets wieder auf die nämliche zu Γ_6 gleichberechtigte Gruppe Γ_6' führen; denn es ist stets

$$(v_m V_i)^{-1} \Gamma_6 (v_m V_i) = V_i^{-1} (v_m^{-1} \Gamma_6 v_m) V_i = V_i^{-1} \Gamma_6 V_i ,$$

welches auch die besonders ausgewählte Substitution v_m ist. *Demzufolge bekommen wir bereits alle mit Γ_6 gleichberechtigten Untergruppen, wenn wir zur Transformation nur die sechs Substitutionen des Repräsentantensystems verwenden; die Zahl der mit Γ_6 gleichberechtigten Untergruppen, diese selbst als solche mitgezählt, kann daher den Index 6 der Untergruppe Γ_6 nicht überschreiten.*

Es ist aber gar nicht nötig, dass die Anzahl der verschiedenen, solchergestalt mit Γ_6 gleichberechtigten Untergruppen wirklich dem Index 6 gleichkommt, und in der That gestalten sich die Verhältnisse hier derart, *dass Γ_6 nur mit sich selbst gleichberechtigt erscheint, d. h. durch jede irgendwie gewählte Modulsubstitution erster Art V in*

haben hier überall Specialfälle eines späterhin hervortretenden allgemeinen Satzes, den wir schon hier in folgender Weise formulieren: *Wenn eine Gruppe in einer zweiten als Untergruppe vom Index μ enthalten ist, so umfasst der Fundamentalbereich der ersteren Gruppe μ Fundamentalbereiche der zweiten.*

sich transformiert wird. Greifen wir nämlich eine beliebige Substitution $v_k = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ auf und benennen zum Unterschiede die Coefficienten von V durch lateinische Buchstaben, so ist die in (1) definierte Substitution v_k' gegeben durch:

$$v_k' = \begin{pmatrix} ad\alpha + cd\beta - ab\gamma - bc\delta, & -b^2\gamma + bd(\alpha - \delta) + d^2\beta \\ a^2\gamma - ac(\alpha - \delta) - c^2\beta, & -bc\alpha - cd\beta + ab\gamma + ad\delta \end{pmatrix}.$$

Da nun bei geraden β, γ sowohl α wie δ ungerade sind, so ist $(\alpha - \delta)$ gerade, und v_k' selber gehört, welche Modulsubstitution erster Art auch V sein mag, der Untergruppe Γ_6 an.

Eine Untergruppe, welche durch *jede* Substitution der Gesamtgruppe in sich transformiert wird und also innerhalb derselben nur mit sich selbst gleichberechtigt ist, heisst *in der Gesamtgruppe ausgezeichnet oder eine ausgezeichnete Untergruppe der Gesamtgruppe*). In diesem Sinne nennen wir Γ_6 eine ausgezeichnete Untergruppe der Modulgruppe* Γ. Wir bringen das so gewonnene Resultat sogleich zu einer sehr wichtigen Verwendung.

§ 8. Endliche Gruppe G_6, der Γ_6 entsprechend. Die Γ_2 und die drei gleichberechtigten Γ_3.

Auf Grund der eben gewonnenen Sätze werden wir jetzt der ausgezeichneten Untergruppe Γ_6 eine endliche Gruppe sechster Ordnung G_6 zuordnen*), die wir dann sogleich selbst wieder in zweckmässiger Weise verwenden werden.

Wir greifen irgend zwei Modulsubstitutionen erster Art auf, die wir an der Hand des Schema (4) § 6 in der Form $v_g V_h$, $v_i V_j$ schreiben. Die erste soll also der $(h+1)^{\text{ten}}$, die zweite der $(j+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe des Schemas angehören. Wir combinieren diese beiden Substitutionen, indem wir auf die Variabele ω erst die zweite, dann die erste

---

*) Man bestätigt sofort nachträglich, dass z. B. auch die ursprüngliche Modulgruppe Γ eine ausgezeichnete Untergruppe der erweiterten $\bar{\Gamma}$, des weiteren $\Gamma' = \Gamma_6$ eine solche der $\bar{\Gamma}'$ ist. Für die Begriffsbestimmung der ausgezeichneten Untergruppen vergleiche man übrigens „Ikos." p. 6, 7, sowie die dort genannten Werke über Gruppentheorie.

**) Zur Regelung der Bezeichnungsweise führen wir hier ausdrücklich an, dass durch griechische Buchstaben Γ_μ fortan stets Untergruppen der Modulgruppe bezeichnet sein sollen, und dass die unten angehängte Zahl μ jedesmal den *Index* derselben in Bezug auf Γ bedeutet. G_n sollen anderweitig eintretende Gruppen sein, und es soll dabei immer unter der angehängten Zahl n deren *Ordnung* verstanden sein.

Substitution angewandt denken. Es entspringt dergestalt die Substitution $v_g V_h v_i V_j$. Aber auf Grund des Umstandes, dass Γ_6 ausgezeichnet in Γ enthalten ist, können wir stets

$$V_h v_i = v_k V_h$$

setzen, wo v_k eine bestimmte andere Substitution der Gruppe Γ_6 ist. Indem wir dann noch $V_h V_j$ ausrechnen, was

$$V_h V_j = v_l V_m \tag{1}$$

geben möge, schreibt sich unsere vorhin erzeugte Substitution:

$$v_g V_h v_i V_j = v_g v_k V_h V_j = v_g v_k v_l \cdot V_m = v_n V_m.$$

Infolge (1) ist der Zahlwert von m hier einzig und allein von h und j abhängig, so dass wir den Satz aussprechen: *Combiniert man in vorgeschriebener Reihenfolge zwei völlig beliebige Substitutionen aus bestimmten zwei Horizontalreihen des Schemas mit einander, so entspringt eine Substitution, die einer bestimmten dritten Horizontalreihe angehört.* Combinieren wir z. B. zwei der nämlichen Horizontalreihe angehörende Substitutionen mit einander, so finden sich durch Heranziehung von (3) p. 281 nach leichter Zwischenrechnung die Resultate: Zwei Substitutionen der zweiten Reihe geben eine solche der dritten, zwei Substitutionen der dritten Reihe aber eine solche der zweiten, während eine Substitution der zweiten Reihe mit einer solchen der dritten Reihe in beliebiger Reihenfolge verbunden stets eine der ersten Reihe angehörige ergiebt. Gehörten aber die Substitutionen entweder beide der vierten oder der fünften oder endlich der sechsten Reihe an, so entspringt durch ihre Combination stets eine solche der ersten Reihe*). Es beruht dies Verhalten, wie wir ausdrücklich betonen, nur darauf, dass Γ_6 eine ausgezeichnete Untergruppe von Γ ist.

Diese Verhältnisse gestatten jetzt eine neue Auffassungsweise, die wir durch folgende Überlegung einführen. Bei dem eben erhaltenen Satze war die Unterscheidung der Substitutionen einer und derselben Horizontalreihe des Schemas verwischt, während dafür die verschiedenen Horizontalreihen gegen einander strenge gesondert waren. Wir werden jetzt dementsprechend die Substitutionen jeder einzelnen unserer Horizontalreihen und insbesondere die Substitutionen v der Untergruppe Γ_6 als von einander nur unwesentlich verschieden ansehen**), was wir dadurch ausdrücken wollen, dass wir unter Einführung eines Äquivalenzzeichens

$$v_g \sim v_h, \quad v_g V_i \sim v_h V_i$$

*) Man vergl. übrigens die sogleich folgenden Formeln (3).

**) Wir machen schon hier darauf aufmerksam, dass wir diesen Schritt baldigst (in § 11, p. 294) durch eine elegante geometrische Massnahme stützen werden.

schreiben, gleichgültig welche ganzen Zahlen hier g und h sind. Wir können dementsprechend sagen: *Sobald wir die Substitutionen der Untergruppe Γ_6 als unter einander nicht verschieden ansehen, reduciert sich die Gesamtheit der Modulsubstitutionen erster Art auf nur sechs verschiedene Operationen $V_0', V_1', \cdots, V_5'$ (wobei V_i' noch eine ganz willkürliche Operation der $(i+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe des oft genannten Schemas sein kann).*

Zwei unter den sechs gewählten Substitutionen V_i' geben mit einander combiniert eine Substitution, welche im Sinne der gerade getroffenen Verabredung mit einer dritten unter ihnen für identisch gilt:

$$V_i' V_k' \sim V_l' . \tag{2}$$

Dabei werden wir den am Eingang des Paragraphen entwickelten Satz nochmals dahin aussprechen, *dass den beiden in* (2) *gerade vorliegenden Zahlen i, k diese ganz bestimmte Zahl l zugeordnet ist, völlig unabhängig davon, welche besondere Substitution V_i' wir aus der einzelnen Horizontalreihe auswählten.* Wir wollen demnach für V_i' kurz wieder V_i und insbesondere für V_0' 1 schreiben, indem wir zu vorliegendem Zwecke statt der allgemeinen V_i' wieder die p. 281 eingeführten Repräsentanten der sechs Horizontalreihen heranziehen. Einige besondere Fälle der Formel (2), aus denen sich alle übrigen Combinationen unserer sechs Substitutionen leicht herstellen lassen, haben wir hier zusammengestellt:

$$\begin{aligned} &V_1^2 \sim V_2 \ , \quad V_2^2 \sim V_1 \ , \quad V_1 V_2 \sim 1 \ , \\ &V_3^2 \sim 1 \ , \quad V_4^2 \sim 1 \ , \quad V_5^2 \sim 1 \ , \\ &V_1 V_3 \sim V_5 , \quad V_1 V_4 \sim V_3 , \quad V_1 V_5 \sim V_4 . \end{aligned} \tag{3}$$

Jetzt werden wir offenbar auf Grund der Formeln (2), (3) den Satz aussprechen können: *Vermöge unserer neuen Auffassung bilden die Operationen V_i eine Gruppe; dieselbe ist von sechster Ordnung, so dass wir sie als G_6 benennen werden, und erweist sich vermöge* (3) *als eine Diedergruppe.* Wir wiederholen: *Die Gesamtgruppe Γ reduciert sich auf eine Diedergruppe G_6, sobald man die sämtlichen Substitutionen der Γ_6 mit einer unter ihnen z. B. der Identität* 1 *als identisch erachtet.*

Endlich führen wir für diese Verhältnisse eine kurze Bezeichnungsweise ein, welche die Sachlage in besonders charakteristischer Weise kennzeichnet. Wir können nämlich offenbar sagen, *dass zwischen einer Diedergruppe G_6 und der Modulgruppe Γ das Verhältnis des Isomorphismus vorliegt; freilich ist dies ein Isomorphismus von unendlich hoher Meroedrie.* Der einzelnen Operation V_i der G_6, welche man sich in irgend einer Form gegeben denken kann*), wird dabei die Gesamtheit der in einer bestimmten Horizontalreihe von (4) § 6 enthaltenen Modulsubstitutionen

*) Man denke z. B. an die in „Ikos." zur Behandlung kommenden Diedergruppen G_6.

zugeordnet sein; der einzelnen Modulsubstitution aber entspricht umgekehrt nur eine bestimmte Operation der G_6. Es ist bei isomorpher Zuordnung zweier Gruppen ein allgemeiner Satz, dass der identischen Substitution 1 der Gruppe kleinerer Ordnung in der anderen Gruppe die Substitutionen einer in dieser ausgezeichneten Untergruppe zugeordnet sind. Das trifft hier, wie wir bemerken, in der That zu, indem der Operation 1 der G_6 die Substitutionen v der Γ_6 entsprechen.

Hier nun sogleich unsere weitere Verwertung der Diedergruppe G_6. Innerhalb derselben kommen zwei Arten cyclischer Untergruppen in Betracht*). Erstlich haben wir eine in der G_6 ausgezeichnete Untergruppe dritter Ordnung G_3, welche die Substitutionen 1, V_1, V_2 umfasst, sodann sind drei gleichberechtigte G_2 der zweiten Ordnung zu nennen, welche einzeln neben der Identität 1 noch die Substitutionen V_3 bez. V_4, V_5 enthalten. *Jeder dieser vier Untergruppen ist nun in der isomorphen Gruppe* Γ *nötwendig eine Untergruppe zugeordnet,* so dass wir dergestalt im ganzen zur Kenntnis von vier neuen Untergruppen der Modulgruppe gelangen. Da haben wir erstlich der G_3 entsprechend eine Untergruppe, in welcher die Substitutionen der ersten drei Reihen des Schemas (4) § 6 vereint sind. Wollen wir ihr entsprechend die Substitutionen der Gesamtgruppe Γ in ein Schema anordnen analog, wie (4) § 6 der Γ_6 entspricht, so ordnen sich die ersten drei Reihen von (4) § 6 nun in der ersten Horizontalreihe des neuen Schemas an, die folgenden drei Reihen von (4) § 6 aber in einer zweiten. *Wir haben also eine Untergruppe vom Index zwei,* Γ_2, *gefunden und bestätigen noch mühelos, dass sie in* Γ *ausgezeichnet enthalten ist.*

In völlig gleicher Weise finden wir, *dass den drei gleichberechtigten Untergruppen* G_2 *der* G_6 *in der Modulgruppe drei gleichberechtigte Untergruppen vom Index drei* Γ_3, Γ_3', Γ_3'' *entsprechen,* welche einzeln neben den Substitutionen der Γ_6 bez. noch diejenigen der vierten, fünften und sechsten Reihe (4) § 6 umfassen. In der That folgt ja die Existenz dieser Untergruppen auch schon direct aus den in der mittleren Reihe von (3) angegebenen Formeln. Nur dass sie gleichberechtigt sind, könnte man auch noch auf directem Wege zu bestätigen wünschen. Aber in der That findet man durch Rückgang auf die unter (3) p. 281 angegebene Bedeutung der Substitutionen V_k

$$V_1^{-1} \cdot v_g V_3 \cdot V_1 = v_h \cdot V_1^{-1} V_3 V_1 = v_h V_5,$$

sowie andrerseits

*) Man sehe über die Structur der Diedergruppe „Ikos." p. 9 u. f. und vergleiche übrigens auch die Formelgruppe (3) des Textes.

$$V_2^{-1} \cdot v_m V_3 \cdot V_2 = v_n \cdot V_2^{-1} V_3 V_2 = v_n V_4,$$

wodurch die Gleichberechtigung der drei in Rede stehenden Untergruppen Γ_3 zur Evidenz gebracht ist.

§ 9. Die Fundamentalbereiche F_3 der gleichberechtigten Γ_3.

Für die drei gleichberechtigten Untergruppen Γ_3 des vorigen Paragraphen sollen nunmehr zugehörige Fundamentalbereiche angegeben werden, was durch zweckmässigen Gebrauch des Fundamentalbereichs der Untergruppe Γ_6 ohne besondere Mühe gelingt. Beginnen wir sogleich mit der ersten unter unseren drei Gruppen Γ_3, welche die Substitutionen v_k, $v_k V_3$ enthält, erinnern uns der expliciten Gestalt der V_3, welche keine andere ist als die Substitution S, und nehmen übrigens den Fundamentalbereich der Γ_6 in seiner ursprünglichen durch Fig. 67 oder 68 (p. 276, 279) gegebenen Gestalt an.

Da Γ_6 in der vorliegenden Γ_3 als Untergruppe enthalten ist, so kann man für irgend einen beliebig in der Halbebene aufgegriffenen Punkt einen bezüglich der Γ_3 äquivalenten im Bereich Fig. 68 sicher nachweisen. Liegt dann etwa dieser äquivalente Punkt nicht von selbst schon innerhalb der beiden zur imaginären Axe parallelen Geraden $x = \pm \frac{1}{2}$, so können wir ihn ersichtlich durch Ausübung der Substitution $V_3 = S$ oder $V_3^{-1} = S^{-1}$, welche ja beide der Γ_3 angehören, in den zwischen diesen beiden Geraden verlaufenden Teil des Bereiches Fig. 68 hinein verlegen. Dieser hierneben in Fig. 71 zur Darstellung gebrachte Teil des Fundamentalbereichs der Γ_6 weist sonach für jeden Punkt der Halbebene einen bezüglich der Γ_3 äquivalenten auf. Aber es kann andrerseits keine zwei bezüglich der Γ_3 äquivalente Punkte ω, ω' in seinem Innern geben. Sicher ist nämlich ausgeschlossen, dass zwei solche etwa existierende Punkte durch eine Substitution v mit einander correspondieren. Es wäre somit

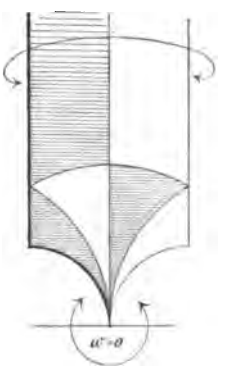


Fig. 71.

$$\omega' = v_k V_3(\omega).$$

Nun ist aber bei der Lage von ω entweder $V_3(\omega)$ oder $V_3^{-1}(\omega)$ im Bereiche der Fig. 68 gelegen. Nennen wir diesen Punkt ω'', so wäre $\omega = V_3^{\pm 1}(\omega'')$ und $\omega' = v_k V_3 V_3^{\pm 1}(\omega'') = v_l(\omega'')$, eine Gleichung, die deshalb unmöglich ist, weil wir in Fig. 68 einen Fundamentalbereich der Γ_6 besitzen. *Wir erkennen sonach in Figur* 71 *einen Fundamental-*

bereich der Gruppe Γ_3*) und haben nur noch festzusetzen, welche Randpunkte dem Bereiche zugehören sollen. In der That sind diese ja wieder paarweise bezüglich der Γ_3 äquivalent, indem die linke gerade Grenzlinie durch Anwendung von $V_3 = S$ in die rechte übergeht, die beiden unteren kreisförmigen Randcurven aber vermöge der Substitution $v = t$ correspondieren. Diesem Sachverhalte entsprechende Festsetzungen, welche wohl keiner weiteren Erläuterung bedürfen, sind in Fig. 71 angedeutet.

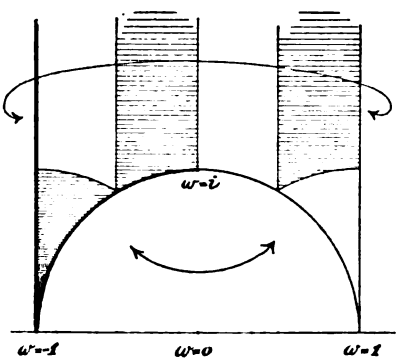


Fig. 72.

Für die beiden Gruppen Γ_3' und Γ_3'' tritt eine völlig analoge Überlegung ein, die wir eben deshalb hier nicht ins einzelne auszuführen brauchen. Bei der Γ_3' beachte man, dass V_4 mit der Substitution T identisch ist, und dass deshalb in dem in Fig. 72 angedeuteten Bereiche für jeden Punkt der Halbebene ein bezüglich Γ_3' äquivalenter zu finden ist. Da sich aber auch keine zwei bezüglich Γ_3' äquivalente Punkte in demselben finden lassen, *so ist er Fundamentalbereich von* Γ_3'. Ebenso findet man den Fundamentalbereich für Γ_3'' in der in Fig. 73 gegebenen Gestalt.

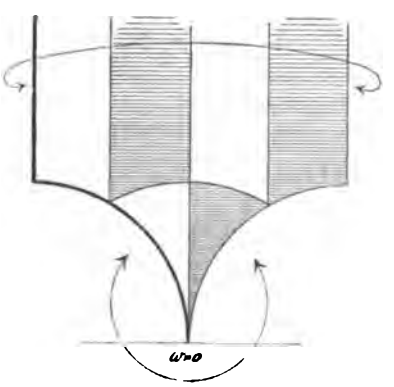


Fig. 73.

Hier ist es nun besonders lehrreich, die Beziehungen der drei gefundenen Fundamentalbereiche unter einander näher zu verfolgen, und wir entwickeln zuvörderst einen darauf bezüglichen allgemeinen Satz. Irgend eine unserer bisher gefundenen Untergruppen nennen wir Γ_μ und bezeichnen deren Substitutionen vorübergehend selbst wieder durch $1, v_1, v_2, \cdots$, während ihr Fundamentalbereich F_μ heissen soll. Es giebt dann zum beliebigen Punkt ω' der Halbebene nur einen bezüglich Γ_μ äquivalenten Punkt ω in F_μ:

$$\omega' = v_k(\omega). \tag{1}$$

*) Wir haben hier eine neue Bestätigung des in der Note p. 284 angegebenen Satzes. In der That bemerke man, dass Γ_6 innerhalb der Γ_3 Untergruppe vom Index zwei ist; dem entspricht es denn, dass sich der Fundamentalbereich der Γ_6 aus

Jetzt führen wir irgend eine beliebige Modulsubstitution erster Art V aus, die wir uns wieder im Sinne von p. 166 durch eine „Bewegung" der Halbebene in sich bewerkstelligt denken. Der Fundamentalbereich F_μ gehe dergestalt über in den Bereich F_μ', wobei die neuen Randcurven gerade in der Folge einander zugeordnet sein sollen, wie die ursprünglichen. Zugleich gehen durch unsere Transformation die beiden soeben mit ω und ω' bezeichneten, durch (1) verbundenen Punkte in $\omega_1 = V(\omega)$ und $\omega_1' = V(\omega')$ über, welche letztere dann offenbar durch:

$$\omega_1' = V v_k V^{-1}(\omega_1)$$

verbunden sind. Unter Rücksicht auf die Bedeutung von F_μ folgt sonach ohne weiteres, dass ein beliebiger Punkt der Halbebene in einen und nur einen Punkt des Bereiches F_μ' durch eine Substitution aus der Reihe Vv_0V^{-1}, Vv_1V^{-1}, Vv_2V^{-1}, $\cdots$ übergeführt werden kann. Aber das sind gerade die Substitutionen der mit Γ_μ gleichberechtigten Untergruppe $\Gamma_\mu' = V\Gamma_\mu V^{-1}$, so dass wir den Satz gewonnen haben: *Transformieren wir irgend eine vorliegende Untergruppe durch eine Modulsubstitution erster Art V, so erhalten wir einen Fundamentalbereich der neuen Untergruppe aus dem der ersteren, indem wir auf diesen die zu V inverse Substitution V^{-1} ausüben.*

Diesen Satz wolle man nun durch Einzelbetrachtung der drei für die Untergruppen Γ_3 angegebenen Fundamentalbereiche bestätigen. Es ist, wie man durch explicite Rechnung sofort beweist, z. B.

$$T^{-1}\Gamma_3 T = \Gamma_3'', \quad S^{-1}\Gamma_3' S = \Gamma_3''. \tag{2}$$

Demgemäss muss der in Fig. 71 gezeichnete Bereich durch Ausführung der Substitution T in den in Fig. 73 dargestellten Bereich übergehen. Bei der Eigenart der früher ausführlich geschilderten, T entsprechenden Ebenenbewegung ist dies sofort evident. Wenden wir des ferneren, der zweiten Gleichung (2) entsprechend, auf den Bereich Fig. 72 die Substitution S^{-1} an, so erhalten wir den hierneben (Fig. 74) angegebenen Bereich, der ein Fundamentalbereich der Untergruppe Γ_3'' sein muss. Derselbe hat nun freilich nicht direct die in Fig. 73 angegebene Gestalt, doch geht er leicht ersichtlich durch „erlaubte Abänderung" in diese über. In der

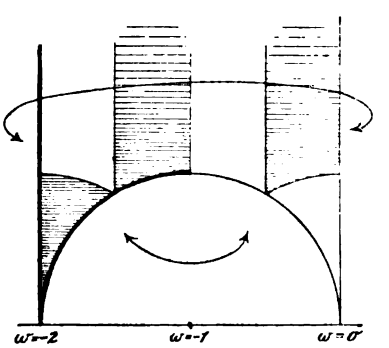


Fig. 74.

zwei Fundamentalbereichen der Γ_3 zusammensetzen lässt, was am anschaulichsten durch Vergleich der Figuren 71 und 69 (p. 281) hervortritt.

That brauchen wir nur vom Bereiche Fig. 74 das links von der Geraden $x = -1$ gelegene Stück desselben abzutrennen und für sich vermöge der zur Untergruppe gehörenden Substitution S^2 zu transformieren, um dergestalt direct zu Fig. 73 zurückzugelangen.

An dem jetzt vorliegenden Material der zu den Γ_3 gehörigen Fundamentalbereiche hat sich sonach unser allgemeiner Satz über die Fundamentalbereiche gleichberechtigter Untergruppen völlig bestätigt.

§ 10. Erneute Betrachtung des Fundamentalbereichs F_6 der Untergruppe Γ_6.

Zu neuen Gesichtspunkten gelangen wir durch Anwendung des allgemeinen im vorigen Paragraphen gewonnenen Satzes auf den Fundamentalbereich F_6 der ausgezeichneten Untergruppe Γ_6. Indem wir auf F_6 die Substitution erster Art V^{-1} ausüben, geht dieser Bereich in F_6' über, der als Fundamentalbereich zu der mit Γ_6 gleichberechtigten Untergruppe $\Gamma_6' = V^{-1}\Gamma_6 V$ gehört. Aber als ausgezeichnete Untergruppe ist Γ_6 nur mit sich selbst gleichberechtigt, so dass auch F_6' Fundamentalbereich von Γ_6 ist und also durch erlaubte Abänderung in F_6 selbst übergeführt werden kann. *Von erlaubter Abänderung abgesehen wird sonach der Fundamentalbereich F_6 der ausgezeichneten Untergruppe Γ_6 durch jede Modulsubstitution erster Art in sich selbst transformiert.*

Wenn wir diesen Satz explicite an den Figuren prüfen wollen, so ist keineswegs erforderlich, dass wir nun auch jede Modulsubstitution erster Art zur Ausübung bringen und dabei das Verhalten von F_6 prüfen. Es genügt vielmehr, die sechs Substitutionen des Repräsentantensystems oder, wofern wir, was hier zweckmässiger ist, die in Fig. 68 (p. 279) gegebene Gestalt des Fundamentalbereichs F_6 zu Grunde legen, diejenigen sechs Substitutionen auszuüben, durch welche das Elementardreieck 1 dieser Figur in deren sechs schraffierte Dreiecke übergeführt wird; denn die Substitutionen v der Γ_6 selbst werden ja F_6 sicher von erlaubter Abänderung abgesehen in sich überführen. Aber wir können hier noch eine weitere Reduction vornehmen. Zeigt sich nämlich, dass F_6 im oft genannten Sinne sowohl durch S als T in sich übergeführt wird, so wird dieser Bereich auch durch jede andere Modulsubstitution in sich transformiert, denn jede lässt sich aus S und T erzeugen.

Die Wirkung dieser beiden Operationen wolle man nun in der That an Fig. 68 verfolgen. Aufs leichteste erledigt sich zunächst die Substitution T; denn bei der Art, wie die Elementardreiecke der Modulteilung durch Ausübung der Substitution T paarweise permutiert werden, ist sofort evident, dass T den in Fig. 68 gezeichneten Dreiecks-

complex gerade in sich überführt, wobei dann aber auch die durch die Pfeile angedeutete Beziehung der Randcurven auf einander nach wie vor dieselbe ist. Wenden wir S auf F_6 an, so bekommen wir zuvörderst einen zwischen den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 2$ gelegenen Bereich F_6'. Indessen machen wir hier von der erlaubten Abänderung Gebrauch, dass wir die rechts von $x = 1$ liegende Hälfte von F_6' abtrennen und vermöge der zur Γ_6 gehörenden Substitution S^{-2} an der relativ äquivalenten Stelle wieder anhängen. Dergestalt wird man wiederum zur Gestalt Fig. 68 von F_6 zurückgeführt, so dass sich die oben angegebene Eigenschaft dieses Bereiches thatsächlich bestätigt hat. Übrigens bemerkt man leicht, dass sich bei derartigen Transformationen von F_6 in sich eine feste Regel über die Zugehörigkeit der Randpunkte zum Bereich nicht aufrecht erhalten lässt. Rechnen wir z. B. die in Fig. 67 (p. 276) stark markierten Randcurven des Bereichs F_6 demselben zu und üben nun etwa die Operation T aus, so werden diese stark gezeichneten Randcurven gerade in die beiden anderen Seiten des Kreisbogenvierecks F_6 übergeführt. Zweckmässiger Weise wird man also hier überhaupt unentschieden lassen, welche von je zwei einander zugeordneten Randcurven des Bereiches F_6 diesem zugehören soll.

Die Ausübung der Operationen S und T hat sich hier noch einigermassen einfach bewerkstelligen lassen. Wollten wir aber auch noch andere Operationen V direct ausüben, ohne von ihrer Zusammensetzung aus S und T Gebrauch zu machen, so würden wir schwerfälligen Betrachtungsweisen nicht immer aus dem Wege gehen können. In der That wird man auch bei Untersuchungen der vorliegenden Art den fortwährenden Gebrauch „erlaubter Abänderungen“ nur als einen Notbehelf ansehen müssen, den wir um so lieber vermeiden werden, da es wirklich eine andere Massnahme giebt, welche die gerade gefundenen Eigenschaften von F_6 zur unmittelbaren Anschauung bringt. Bei diesen Eigenschaften ist, wie man bemerkt, einzig die Aufeinanderfolge der Elementardreiecke von F_6 wesentlich, wie sie sich in deren Lagerung und in der durch die Pfeile der Fig. 68 angedeuteten Zuordnung der Randcurven des Bereiches F_6 ausspricht. Jede etwa stetig verlaufende Formänderung von F_6, welche die Aufeinanderfolge der Dreiecke dieses Bereiches intact lässt, giebt uns daher eine neue Gestalt für F_6, welche ihrerseits ebenfalls geeignet ist, die am Eingang des Paragraphen aufgestellte Eigenschaft von F_6 der Anschauung vorzuführen. Wir wollen uns dementsprechend jetzt F_6 aus dem Zusammenhang der ω-Halbebene herausgeschnitten denken, und eine besondere stetige Formänderung mit dem so isolierten Bereiche vornehmen. Die

so entstehende neue Gestalt unseres Bereiches erweist sich dann thatsächlich zur Veranschaulichung der in Rede stehenden Eigenschaften von F_6 besonders geeignet, wie wir denn auch auf diesem Wege zum weiteren Verfolg der in den voraufgehenden §§ 8 und 9 gegebenen Entwicklungen wichtigste Hilfsmittel gewinnen werden.

§ 11. Zusammenlegung des Fundamentalbereichs F_6 zur diedrisch geteilten Kugel. Beziehung der Diederteilung auf die Modulteilung.

Wir haben bereits oben (vgl. Fig. 20 p. 79) Gelegenheit gehabt, von einer gewissen stetigen Formänderung eines Kreisbogendreiecks mit paarweise auf einander bezogenen Randpunkten zu handeln, aus welchem wir damals eine einfach bedeckte Ebene herstellten. Einen ähnlichen Änderungsprocess wollen wir jetzt mit dem Kreisbogenviereck Fig. 68 (p. 279) vornehmen, dessen Randpunkte ja auch in der durch die Pfeile angezeigten Weise zu Paaren auf einander bezogen sind. Möge das Viereck eine stetig verlaufende Dehnung erfahren, wobei die einander zugeordneten Randpunkte mehr und mehr einander genähert werden. Es schien zweck-

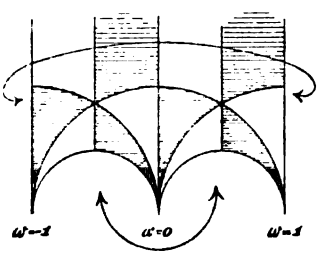


Fig. 75a.

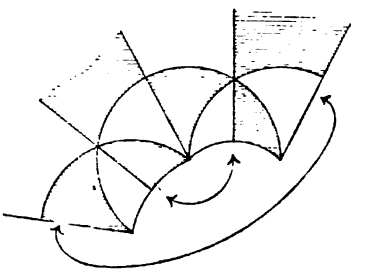


Fig. 75b.

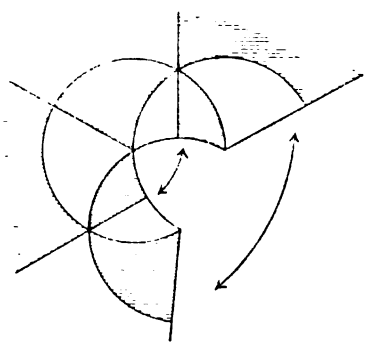


Fig. 75c.

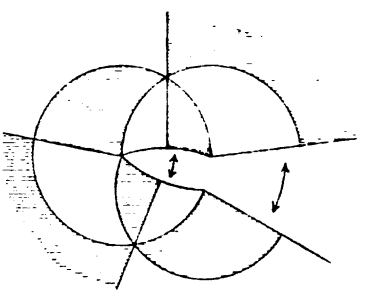


Fig. 75d.

mässig, diesen Vorgang durch eine Reihe von Zeichnungen zu erläutern, die in Fig. 75a, b, c, d zusammengestellt sind*). Dieselben überheben uns

*) Ersichtlich stehen die geometrischen Massnahmen des Textes in engster

der Mühe, noch weiter bei den Einzelheiten der Formänderung zu verweilen, und wir werden demnach sogleich das endliche Resultat derselben in Augenschein nehmen. Wir wollen nämlich schliesslich die auf einander bezogenen Randpunkte, welche in der ω-Halbebene bezüglich Γ_6 äquivalent waren, zur Coincidenz bringen und geradezu zusammengeheftet uns vorstellen. So entspringt Fig. 76, in welcher wir direct unsere frühere Fig. 12 (p. 70) wieder erkennen. Wenn wir nun noch zur Projection dieser Figur auf die Kugeloberfläche gehen, wie sie oben Fig. 13 (p. 72) giebt, so haben wir diejenige Gestalt erhalten, in welche wir den Bereich F_6 umwandeln wollten. Wir haben so das Resultat: *Durch stetige Deformation des Fundamentalbereichs der Untergruppe Γ_6 kann man aus demselben die diedrisch geteilte Kugel* (Fig. 13) *herstellen.*

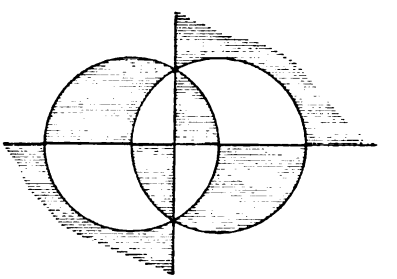


Fig. 76.

Dass wir soeben am Schlusse der stetigen Formänderung geradezu die diedrisch geteilte Kugel erhielten, wird für die Anschaulichkeit der durchgeführten Massnahme nur ein Gewinn sein. Inzwischen können wir den Deformationsprocess von F_6, der schliesslich zur Zusammenheftung der auf einander bezogenen Randcurven von F_6 führt, noch in mannigfaltigst abgeänderter Weise durchführen. Da hätten wir die diedrisch geteilte Ebene oder Kugel in irgend einer verzerrten Form gewonnen; aber immer wären die „Lagenverhältnisse" der Dreiecke gegen einander doch die nämlichen geblieben, und wir könnten in der That auch jede solchergestalt entstehende Figur zu der Mehrzahl der Anwendungen benutzen, die wir mit Fig. 76 im Sinne haben. — Bemerken wir übrigens hier sogleich, dass sich in analoger Weise auch die Bereiche F_3 der Γ_3 zu einfach überdeckten Ebenen (oder Kugeln) zusammenlegen lassen, wie wir das in einem der nächsten Paragraphen wirklich durchführen werden. Die Verallgemeinerung unserer Massnahme besprechen wir im nächsten Kapitel; dieselbe wird für unsere gruppentheoretischen, sowie functionentheoretischen Erörterungen allgemein von weitgehendster Bedeutung sein.

Beziehung zu den p. 81, 82 durchgeführten Überlegungen (insbesondere vergleiche man die damaligen Figuren 24 und 25 mit den jetzigen 75b, c, d). Die Verwandtschaft der beiderseitigen Entwicklungen werden wir späterhin mit Hilfe von bezüglichen functionentheoretischen Sätzen des folgenden Abschnitts leicht überblicken.

Kehren wir nunmehr zum Fundamentalbereich F_6 und zur gewonnenen abgeänderten Form desselben zurück. Es erscheint zuvörderst als das Wichtigste, dass relativ äquivalente Punkte in der neuen Gestalt von F_6 zu identischen geworden sind. Diese Bemerkung bezieht sich zunächst nur auf die Randpunkte des Fundamentalbereichs in der ω-Halbebene, man kann sie aber auch leicht auf die Punkte der ω-Halbebene überhaupt ausdehnen. Die Dreiecke des Fundamentalbereichs F_6 sind den Dreiecken der Diederteilung (Fig. 13, p. 72) wechselweise eindeutig zugeordnet. Wir können aber auch ohne Störung dieser Sachlage die Auffassung in folgender Weise verallgemeinern. Das Doppeldreieck 1 des Bereiches F_6 ordnen wir demjenigen Doppeldreieck der Diederteilung zu, in welches jenes bei der beschriebenen Umgestaltung von F_6 übergeführt wird, wobei dann auch die Seiten des einen Dreiecks eindeutig denen des anderen zugeordnet sind. Nun wollen wir überhaupt jedem Dreiecke der Modulteilung ein Dreieck der Diederteilung zuweisen, indem wir für die Beziehung der Modulteilung auf die Diederteilung die Bestimmung aufstellen, *dass benachbarten Dreiecken der einen Teilung immer im gleichen Sinne benachbarte Dreiecke der anderen Teilung zugeordnet sein sollen.* „Im gleichen Sinne benachbart" nennen wir die Dreiecke jedes dieser beiden Paare deshalb, weil sie so neben einander liegen sollen, dass die gemeinsame Seite des einen Dreieckpaares auch wirklich der gemeinsamen Seite des andern Paares entspricht. Durch unsere Festsetzungen sind übrigens die Dreiecke der einen Teilung denen der anderen nur erst als ganze zugeordnet, wobei freilich die Ecken und Seiten des einen Dreiecks denen eines ihm entsprechenden Dreiecks der anderen Teilung eindeutig zugewiesen sind. Inzwischen erleichtert es die Ausdrucksweise weiterhin sehr, wenn wir auch die inneren Punkte des einen Dreiecks denen des anderen eindeutig zuweisen. Wie wir dies des näheren ausführen, bleibt hier willkürlich; nur werden wir so zuordnen, dass ein stetiger Weg im einen Dreieck einem gleichfalls stetig verlaufenden Wege im anderen entspricht. Überdies geben wir folgende Vorschrift: Zeigt sich, dass ausser einem ersten Moduldreiecke noch ein zweites durch unsere Festsetzungen einem gewissen Diederdreiecke zugeordnet ist, so weisen wir die Punkte des letzteren den Punkten dieses zweiten Moduldreiecks derart zu, *dass äquivalente Punkte jener beiden Moduldreiecke jedesmal dem nämlichen Punkte des Diederdreiecks entsprechen.*

Man sieht, dass solchergestalt thatsächlich die Beziehung von F_6 auf die Diederteilung, wie wir sie vorhin durch Fig. 75 hergestellt hatten, getroffen wird. Inzwischen hat unsere jetzige Auffassung einen weiteren Spielraum. Mögen wir nämlich von irgend einem Punkte ω in F_6 eine

stetig verlaufende Bahn zum relativ äquivalenten Punkte $s(\omega)$ ziehen und andrerseits bei der festgesetzten Beziehung der Modulteilung auf die Diederteilung in der letzteren den entsprechenden Weg verzeichnen. Dieser wird in dem ω zugeordneten Punkte beginnen und wird, wie man mühelos sieht, auf geschlossenem Wege zuletzt zu seinem Anfangspunkte zurückführen. Das also ist jetzt überhaupt die Sachlage, *dass je zwei relativ äquivalente Punkte ω auf denselben Punkt der Diederteilung bezogen sind.* In Übereinstimmung hiermit werden wir sagen dürfen: *Einem einzelnen Doppeldreieck der Modulteilung entspricht immer ein bestimmtes Doppeldreieck der Diederteilung, während umgekehrt dem einzelnen Doppeldreieck dieser letzteren Teilung stets die Gesamtheit der unendlich vielen mit einem bestimmten Doppeldreieck von F_6 relativ äquivalenten Moduldreiecke entspricht.*

Durch die Zusammenlegung von F_6 zur Diederteilung haben wir sonach erreicht, dass den abstracten Vorstellungen, welche den Ausführungen des § 8 zu Grunde liegen, eine concrete geometrische Deutung zuerteilt ist. Dort wollten wir alle Substitutionen V_i, $v_1 V_i$, $v_2 V_i$, $\cdots$ für identisch ansehen: Hier sind beim Fortgang von der ω-Halbebene zum Dieder thatsächlich alle jenen Substitutionen zugeordneten Doppeldreiecke in ein einziges Doppeldreieck der Diederteilung übergegangen.

Alle diese Ausführungen finden in entsprechender Weise auch auf die Fundamentalbereiche F_3 der Γ_3 Anwendung, wie wir wenigstens zum Teil baldigst belegen werden. Vorerst aber fügen wir hier sogleich diejenigen weiter sich hier anschliessenden besonderen Folgerungen an, welche allein bei der Γ_6, als einer „ausgezeichneten" Untergruppe, statthaben.

§ 12. Deutung der Gruppe G_6 an der diedrisch geteilten Kugel. Regularität des Fundamentalbereichs F_6.

Hat sich soeben die neue Gestalt, in welche wir den Fundamentalbereich F_6 überführten, bereits für die geometrische Deutung der den § 8 begründenden Überlegungen als zweckmässig erwiesen, so werden wir dieselbe jetzt vor allem auch für die Entwicklungen des vorletzten Paragraphen (p. 292, 293) verwerten. Der in der ω-Halbebene lagernde Fundamentalbereich F_6 der Γ_6 als einer *ausgezeichneten* Untergruppe der Modulgruppe hatte die Eigenschaft, durch die sechs Substitutionen $1, V_1, V_2, \cdots, V_5$ von erlaubten Abänderungen abgesehen in sich selbst übergeführt zu werden. Das kommt nun in sehr viel anschaulicherer Weise bei der Diederteilung zur Geltung. Bei ihr haben wir in der That nicht nötig, immer erst noch erlaubte Abänderungen vorzu-

nehmen, wie sie das Operieren mit dem ursprünglichen Bereiche F_6 erschwerten: *Die Diederteilung geht ohne weiteres durch die sechs Operationen, welche ein einzelnes ihrer Doppeldreiecke in ein anderes überführen, in sich selbst über.*

Hiermit haben wir nun für die Gruppe G_6, die wir im § 8 der „ausgezeichneten" Untergruppe Γ_6 zuordneten, die zweckmässigste Deutung gewonnen. Mögen bei der Umformung, die wir mit dem Fundamentalbereich F_6 vornahmen und die uns zur Diederteilung hinführte, die Doppeldreiecke unverändert ihre Namen 1, V_1, V_2, $\cdots$, V_5 behalten haben. Da werden wir dann offenbar der Operation der G_6, die wir oben durch V_k bezeichneten, diejenige Diederdrehung zuordnen, welche das Diederdreieck 1 nach V_k verschiebt. Man erkennt (durch Rückgang auf die „Modulsubstitutionen" V_k) aufs leichteste, *dass hierdurch G_6 auf die Gruppe der Diederdrehungen holoedrisch isomorph bezogen ist.* Der Diedertypus unserer G_6, den wir oben (p. 287) in abstracter Weise erschlossen hatten, wird also durch die Zusammenlegung des Bereiches F_6 von vornherein evident.

Jetzt wollen wir umgekehrt den Namen der „regulären" Kugelteilung, welcher doch u. a. auch für die Diederteilung im Gebrauch ist, zugleich auf den Fundamentalbereich F_6 der ω-Halbebene übertragen. *Wir wollen denselben selbst einen regulären nennen und bezeichnen also als Regularität die oft genannte Eigenschaft des Bereiches F_6, durch alle sechs Operationen des Repräsentantensystems der Γ_6 von erlaubter Abänderung abgesehen in sich transformiert zu werden.* Wir werden (im folgenden Paragraphen) demgegenüber die Fundamentalbereiche der Untergruppen Γ_3 (Fig. 71—73) als irregulär bezeichnen. Die hier in Rede stehende Eigenschaft des Fundamentalbereichs F_6, durch alle sechs Operationen 1, V_1, V_2, $\cdots$, V_5 in sich übergeführt zu werden, war übrigens, wie wir schon wiederholt betonten, eine Folge des Umstandes, dass Γ_6 in der Gesamtgruppe Γ ausgezeichnet ist. *Die Regularität des Fundamentalbereichs F_6 ist sonach die geometrische Erscheinungsform der Thatsache, dass Γ_6 ausgezeichnete Untergruppe der Modulgruppe Γ ist.*

Äusserlich lässt sich die genannte Regularität zur vollen Anschaulichkeit allein an dem zur Diederkugel zusammengelegten Bereich F_6 bringen, wo sie sich durch die regelmässige Anordnung der sechs Doppeldreiecke ausspricht. Vor allem ist es wichtig, dass wir hier schliesslich noch die Ecken der Elementardreiecke im zusammengelegten Bereich F_6 näher in Augenschein nehmen, welche wir in sofort verständlicher Weise als mit ϱ bez. i und $i\infty$ äquivalente Punkte benennen. Man bemerkt zunächst: *Während die Punkte von F_6 im all-*

gemeinen zu je sechs äquivalent sind, tritt für diese Ecken eine Reduction ein, indem wir offenbar zwei mit ϱ *und je drei mit* i *und* $i\infty$ *äquivalente Punkte in* F_6 *zu verzeichnen haben* (cf. Fig. 76, p. 295). Ist aber einer der beiden mit ϱ äquivalenten Punkte von sechs Elementardreiecken umlagert, *so verlangt offenbar die Regularität von* F_6, *dass dies auch vom anderen gilt;* ist einer der drei mit $i\infty$ äquivalenten Eckpunkte von vier Elementardreiecken umlagert, so gilt zufolge der Regularität das Gleiche von den beiden anderen u. s. w., Sätze, deren Zutreffen man ja sofort durch den Anblick der Diederteilung bestätigt.

§ 13. Zusammenbiegung der Fundamentalbereiche F_3 zu einfach bedeckten Ebenen. Irregularität der F_3.

Wie wir schon in Aussicht nahmen, wollen wir nun auch die Fundamentalbereiche F_3 der drei gleichberechtigten Untergruppen Γ_3 in ganz ähnlicher Weise einer stetigen Umformung unterwerfen, wie soeben den Bereich F_6. Wir werden dergestalt einerseits die Irregularität der F_3 figürlich erläutern, des weiteren aber werden wir so (im folgenden Paragraphen) zu wichtigen neuen Betrachtungen vorgehen, welche sich auf die Symmetrie unserer Fundamentalbereiche beziehen.

In Fig. 71 (p. 289) ist der Fundamentalbereich F_3 der ersten unserer drei Untergruppen Γ_3 zur Darstellung gebracht. Wollen wir denselben in der That einer derartigen stetigen Formänderung unterziehen, dass die auf einander bezogenen Randcurven bis zur Coincidenz zusammengebogen werden. Das ist des näheren in Fig. 77a, b, c ausgeführt; des leichteren

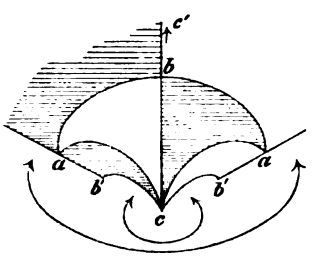


Fig. 77a.

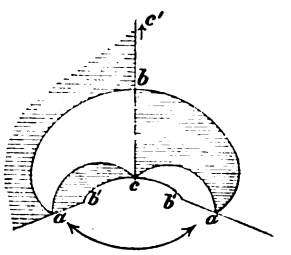


Fig. 77b.

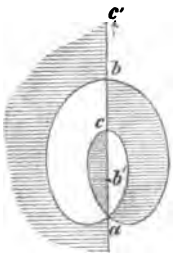


Fig. 77c.

Überblicks wegen haben wir die Ecken der Elementardreiecke durch Buchstaben bezeichnet, und zwar benannten wir die mit ϱ äquivalenten Ecken von F_3 durch a, die mit i äquivalenten durch b, b', endlich die mit $i\infty$ äquivalenten Punkte c, c', wie dies die drei Figuren 77 anzeigen.

Die in Fig. 77c gegebene Zeichnung stellt uns den fertig zusammengebogenen Bereich F_3 bei möglichst bequemer Anordnung seiner

Teile dar. Die Ecken der Elementardreiecke sind jetzt ohne Ausnahme auf der verticalen Geraden der neuen Figur gelegen, der Punkt c' ist im Unendlichen geblieben. Die beiden Elementardreiecke, welche in der ω-Halbebene das Doppeldreieck T zusammensetzten, sind auch in der neuen Gestalt von F_3 noch eigentliche Dreiecke mit geraden oder stetig gekrümmten Seiten. Alle übrigen Dreiecke der ursprünglichen Gestalt von F_3 sind dagegen, strenge genommen, Zweiecke geworden; inzwischen bezeichnen wir sie nach wie vor als Dreiecke, die dann in der einen Ecke (b' bez. c') einen Winkel von 180^0 besitzen. Dem schraffierten Ausgangsdreieck der ω-Halbebene entspricht in der dritten Fig. 77 das links ausserhalb gelegene schraffierte Dreieck mit den Ecken a, b, c', deren letztere dem Punkte $\omega = i\infty$ zugeordnet ist.

Die gegenseitigen Lagenverhältnisse der sechs Elementardreiecke von F_3 werden jedenfalls noch deutlicher hervortreten, wenn wir die neue, geschlossene Gestalt von F_3 auf die Kugeloberfläche übertragen; es wird so zugleich die scheinbare Sonderstellung des gerade erwähnten, unendlich fernen Eckpunktes c' zum Fortfall kommen. Die stereographische Projection der Figur 77c auf die Kugeloberfläche wollen wir derart vornehmen, dass die verticale Gerade jener Figur ein grösster Kreis der Kugel werde, auf dem die drei Punkte a, b, c äquidistant gelegen sind. Die linke Seite unserer Figur 77c überträgt sich alsdann auf die eine durch jenen grössten Kreis abgeschnittene Halbkugel, die wir (von aussen gesehen) in Fig. 78b gezeichnet haben. Die andere Halbkugel trägt eine Einteilung in drei Bereiche, welche den in Fig. 78b dargestellten bezüglich der Ebene des öfters genannten grössten Kugelkreises genau symmetrisch ist; nur wird dabei, wie ein Blick auf Fig. 77c oder auch auf die in Fig. 78a gegebene Ansicht der Kugel bestätigt, einem schraffierten Dreieck jedesmal ein freies entsprechen und umgekehrt.

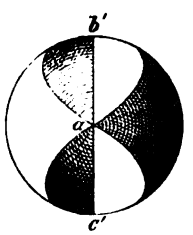


Fig. 78a.

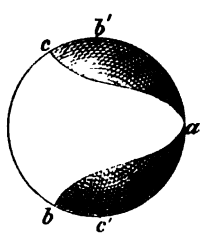


Fig. 78b.

Ziehen wir jetzt auch die beiden anderen Gruppen Γ_3', Γ_3'' des § 8 mit in Betracht. Dieselben waren mit Γ_3 gleichberechtigt, und dem entsprach die Thatsache, dass der Fundamentalbereich F_3 der Γ_3 durch Ausübung gewisser Modulsubstitutionen in die Fundamentalbereiche F_3' und F_3'' der beiden Gruppen Γ_3', Γ_3'' übergeführt werden konnte. Dabei mussten freilich, wenn wir solcherart die in Fig. 72 und 73 angegebenen Gestalten von F_3' bez. F_3'' erreichen wollten, möglicher Weise erst noch erlaubte Abänderungen vorgenommen

werden. Wollen wir aber nun auch unsere Bereiche F_3' und F_3'' durch Zusammenbiegung auf einander bezogener Randcurven umformen, so ist es ja ganz gleichgiltig, ob wir von den Figuren 72, 73 ausgehen oder von irgend welchen anderen, aus ihnen durch erlaubte Abänderungen entspringenden. Wir könnten also auch für F_3' und F_3'' direct von denjenigen Gestalten ausgehen, welche durch Ausübung der Modulsubstitutionen T bez. S^{-1} aus F_3 entsprangen (p. 291). Da aber bedenke man, dass die Wirkung dieser Modulsubstitutionen auf F_3 gleichfalls durch eine stetig verlaufende Umformung dieses Bereichs erreicht werden kann*); *es werden demnach offenbar durch Zusammenbiegung des Fundamentalbereichs F_3' bez. F_3'' der mit Γ_3 gleichberechtigten Untergruppen Γ_3', Γ_3'' Figuren entspringen, welche in der allgemeinen Anordnung ihrer Teile, auf die es hier allein ankommt, von der Figur* 77 c, *bez.* 78 *nicht verschieden sein können.*

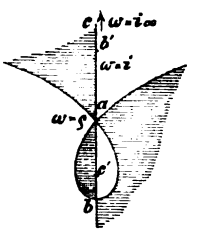


Fig. 79.

Die nähere Ausführung, die wir hier für F_3' durchführen, bestätigt dies. Man wird leicht die stetige Umformung des in Fig. 72 dargestellten Bereiches vornehmen und gelangt am Schlusse derselben zur Fig. 79, in welcher ausser der Benennung der Ecken auch noch einige bezügliche Werte von ω zur leichteren Orientierung hinzugesetzt sind. Die so gewonnene Figur ist nun in der That, was die Lagenverhältnisse ihrer Dreiecke angeht, von der Figur 77 c gar nicht verschieden. Wenn das in den ebenen Figuren noch nicht hinreichend deutlich zu Tage tritt, so wolle man Fig. 79 wiederum stereographisch auf die Kugeloberfläche projicieren. Richten wir diese Projection wieder so ein, dass die verticale Gerade in Fig. 79 auf der Kugel ein grösster Kreis wird und auf ihm die drei Punkte a, b, c äquidistant liegen, so werden wir in der That gerade wieder zur Fig. 78 zurückgeführt. Man beachte dabei noch als wichtig, *dass nun das schraffierte Dreieck mit den Ecken a, b', c dem elementaren Ausgangsdreieck der ω-Halbebene zugeordnet ist.* Auf ganz entsprechende Weise würden wir auch von F_3'' aus zur Fig. 78 gelangen; dann aber ist dem Ausgangsdreieck der ω-Halbebene das dritte, auf der unteren, in Fig. 78 b nicht sichtbaren Halbkugel gelegene schraffierte Dreieck zugeordnet.

In den Figuren 78 tritt nun die Irregularität der F_3 deutlich zu Tage. Betrachten wir z. B. die Ecken der Dreiecke, so haben wir unter ihnen zwei, wie wir kurz sagen, mit i äquivalente Punkte b und b'; dieselben sind aber keineswegs für Fig. 78 gleichbedeutend, vielmehr ist der erste von ihnen, nämlich b, von vier, der andere b' von

*) Im Sinne der §§ 2—5 in II, 1.

zweien der sechs Elementardreiecke der Fig. 78 umlagert. Weiter haben wir zwei mit $i\infty$ äquivalente Punkte, nämlich c und c', und auch hier ist wieder der erste von vier, der andere von nur zwei Dreiecken umgeben.

Wir können uns auch noch in folgender Weise von der Irregularität unseres Bereiches F_3 Rechenschaft ablegen: Gäbe es im Repräsentantensystem der Γ_3 (von der Identität abgesehen) eine Substitution, welche F_3 in sich überführte, möglicherweise unter Zuhilfenahme erlaubter Abänderungen, so müsste die in den Fig. 78 dargestellte Kugeloberfläche mit ihrer Einteilung in sechs Teilbereiche derart in sich verschoben werden können, dass die Teilung mit sich selbst zur Deckung käme. Hier werden wir nun freilich keineswegs verlangen, dass die Verschiebung der Kugel in sich eine blosse congruente Verschiebung sein soll, wie es bei der diedrisch geteilten Kugel der Fall ist; denn wir haben ja auch bei Herstellung der in den Fig. 78 gegebenen Kugelteilung gar nicht auf irgend welche bestimmte metrische Verhältnisse, sondern nur auf die Lagenbeziehungen der Dreiecke Gewicht gelegt. Demgemäss müssten wir der in Rede stehenden Kugeloberfläche bei ihrer Verschiebung in sich irgend welche stetig verlaufende Dehnungen oder Zusammenziehungen gestatten. Wir können das sogar noch abstracter auffassen, indem wir sagen: *Die Kugeloberfläche müsste eine stetige eindeutige Beziehung auf sich selbst zulassen, bei der ihre Einteilung in sechs abwechselnd schraffierte und freie Dreiecke wieder sich selbst entspräche.* Des näheren müsste dabei, da unserer eindeutigen Beziehung eine Modulsubstitution erster Art zu Grunde liegen sollte, ein schraffiertes Dreieck jedesmal einem ebensolchen entsprechen, wie auch ein freies wieder nur einem freien; jeder Ecke eines Dreiecks aber müsste stets wieder eine gleichartige Ecke zugeordnet sein.

Unter Berücksichtigung dieser Gesichtspunkte versuche man nun die Kugelteilung der Fig. 78 eindeutig auf sich selbst zu beziehen. Der Kreis mit den Ecken a, b', $c \cdots$ muss notwendig sich selbst entsprechen, und auf ihm ist insbesondere der Punkt a sich selbst zugeordnet. Der Punkt b könnte entweder sich selbst oder dem Punkte b' zugeordnet sein; aber letzteres ist deshalb undenkbar, weil b von vier, b' nur von zwei Elementardreiecken umgeben ist. In analoger Weise findet man, dass überhaupt alle Punkte a, b, b', c, c' notwendig sich selbst entsprechen, womit denn der Satz evident ist: *Unsere Kugelteilung lässt nur eine eindeutige Beziehung beabsichtigter Art auf sich selbst zu, und das ist die identische, bei der jeder Punkt sich selbst entspricht.* Dieses ist aber in der That, was wir hier zeigen wollten.

§ 14. Die Symmetrie der Bereiche F_3. Der regulär-symmetrische Bereich F_6.

Hat sich die betrachtete Kugelteilung nun auch in der That als irregulär erwiesen, so gestattet sie doch noch eine solche stetige eindeutige Beziehung auf sich selbst, bei der ein schraffiertes Dreieck jedesmal einem freien und umgekehrt entspricht. In der That bemerkte man ja bereits, dass unsere Kugelteilung (Fig. 78) in der Ebene des im vorigen Paragraphen wiederholt genannten grössten Kreises eine Symmetrieebene besass, was denn auch sofort in den ebenen Figuren 77c und 79 evident ist. Spiegelung an den verticalen Geraden dieser Figuren bringt dieselben (unter gleichzeitigem Wechsel der Schraffierung) mit sich selbst zur Deckung.

Die gefundenen Symmetrieverhältnisse haben nun umgekehrt ihre wichtigste gruppentheoretische Bedeutung, und wir gehen, um sie zu erkennen, etwa zur ursprünglichen Gestalt von F_3 (Fig. 71, p. 289) zurück. Die soeben gefundene Symmetrielinie (d. i. der oft genannte grösste Kreis der Fig. 78) zerlegt sich beim Rückgang zu Fig. 71 teils in die imaginäre ω-Axe, teils in die zwei Paare von Randcurven, welche Figur 71 nach aussen abschliessen. Diese Linien sind Kreise der Modulteilung, und nun werden wir die besprochene Symmetrie dahin interpretieren, *dass durch Spiegelung an den gemeinten Kreisen der Modulteilung der Fundamentalbereich F_3 (unter Wechsel der Schraffierung und von erlaubten Abänderungen abgesehen) in sich selbst übergeführt wird.* Thatsächlich ist dies für die Spiegelung A auch in der ω-Halbebene sofort evident; aber auch für die anderen hier in Betracht kommenden Spiegelungen $\bar{V}$ können wir uns von der Richtigkeit des gerade behaupteten Satzes durch directe Betrachtung der Fig. 71 überzeugen. *Umgekehrt aber wird der Fundamentalbereich F_3 nicht mit sich selbst symmetrisch sein können bezüglich irgend eines der übrigen, ihn durchziehenden Kreise der Modulteilung.*

Jetzt überzeuge man sich durch eine Betrachtung, die derjenigen in § 9 durchaus gleichkommt, von der Richtigkeit des folgenden Satzes: Transformieren wir F_3 vermöge der Modulsubstitution zweiter Art $\bar{V}$, so erhalten wir aus F_3 einen Fundamentalbereich für die mit Γ_3 in der erweiterten Modulgruppe $\bar{\Gamma}$ gleichberechtigte Untergruppe $\bar{V}\Gamma_3\bar{V}^{-1}$. *Zeigt sich dabei, dass der so gewonnene Fundamentalbereich durch erlaubte Abänderungen wieder in F_3 übergeführt werden kann, so ist Γ_3 mit $\bar{V}$ vertauschbar.* Durch Anwendung dieses Satzes auf die vorab entwickelten geometrischen Verhältnisse gewinnen wir das Resultat: *Die Untergruppe Γ_3 ist mit jeder solchen Spiegelung V vertauschbar, in Bezug auf*

deren Spiegelkreis F_3 in oft genanntem Sinne mit sich selbst symmetrisch ist. Insbesondere ist also:

$$A\Gamma_3 = \Gamma_3 A, \quad B\Gamma_3 = \Gamma_3 B. \tag{1}$$

Demgegenüber ist aus dem Vergleich von Fig. 71 und 73 sofort deutlich, dass

$$C\Gamma_3 C = \Gamma_3'' \tag{2}$$

sein wird; denn in der That geht F_3 durch Ausübung der Spiegelung C in F_3'' über.

Wir führten hier die Betrachtung ins einzelne nur für Γ_3 durch; denn sie erledigt sich für die beiden anderen Gruppen Γ_3', Γ_3'' genau in analoger Weise. Begnügen wir uns also in Ansehung dieser letzteren Gruppen damit, dass wir etwa angeben, wie die drei erzeugenden Operationen A, B, C der $\bar{\Gamma}$ die Γ_3' und Γ_3'' transformieren. In diesem Betracht liest man ohne Mühe aus den bezüglichen Fundamentalbereichen (Fig. 72, 73) die nachfolgenden Resultate ab:

$$\begin{aligned} &A\Gamma_3' A = \Gamma_3', \quad B\Gamma_3' B = \Gamma_3'', \quad C\Gamma_3' C = \Gamma_3', \\ &A\Gamma_3'' A = \Gamma_3'', \quad B\Gamma_3'' B = \Gamma_3', \quad C\Gamma_3'' C = \Gamma_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Bei der bekannten Darstellung der Operationen S und T durch A, B, C (cf. Formeln (4) p. 233) erhält man von hier aus die Formeln (2) p. 291 sofort wieder*).

Unsere soeben auf die Symmetrie der F_3 gegründeten gruppentheoretischen Betrachtungen finden nun endlich auch noch ausgedehnte Anwendung auf die Gruppe Γ_6. Wirklich ist ja die Diederteilung (Fig. 13, p. 72) mit sich selbst bezüglich aller ihrer vier Kreise symmetrisch und geht damit ausser durch die sechs Diederdrehungen noch durch sechs Operationen zweiter Art in sich über. Wir schliessen sofort: *Der Fundamentalbereich F_6 geht durch Spiegelung an irgend einem denselben durchziehenden Kreise der Modulteilung, sowie damit überhaupt durch jede Modulsubstitution zweiter Art* (möglicherweise abgesehen von erlaubten Abänderungen) *in sich über.* Für die Spiegelungen A, B, C ist dies an der ursprünglichen Gestalt von F_6 (Fig. 68, p. 279) auch leicht direct evident. Die soeben gefundene Eigenart des Bereiches F_6 wollen wir kurz dadurch kennzeichnen, *dass wir den Bereich F_6, bez. die Anordnung seiner zwölf Elementardreiecke regulär-symmetrisch nennen;*

*) Man bemerke noch: Indem z. B. Γ_3 mit der Spiegelung A vertauschbar ist, wird diese Gruppe im früheren Sinne der Erweiterung vermöge A fähig. Wir erhalten so eine erweiterte Gruppe $\bar{\Gamma}_3$, in welcher neben jeder schon in Γ_3 enthaltenen Modulsubstitution erster Art V auch noch die Operation zweiter Art VA sich findet. Ein Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}_3$ wird uns alsdann durch eine der beiden symmetrischen Hälften geliefert, in welche F_3 (Fig. 71) durch die imaginäre ω-Axe zerlegt wird.

*die regulär-symmetrische Teilung des Dieders bez. des Fundamentalbereiches F_6 ist uns dann ersichtlich das geometrische Bild für Thatsache, dass Γ_6 in der erweiterten Modulgruppe $\bar{\Gamma}$ ausgezeichnet enthalten ist**).

Selbstverständlich erscheinen noch die beiden folgenden Sätze, die wir hier nur deshalb namhaft machen, weil wir späterhin unter allgemeineren Voraussetzungen zu ihnen zurückkommen werden: *Ist nur erst bekannt, dass F_6 bezüglich der drei zu den Spiegelungen A, B, C gehörenden Symmetriekreise symmetrisch ist, so ist F_6 deshalb bereits im Sinne von* § 12 (p. 297) *regulär und überdies an allen Kreisen der Modulteilung* (immer von erlaubten Abänderungen abgesehen) *symmetrisch;* denn A, B, C waren Erzeugende von $\bar{\Gamma}$. Andrerseits aber: *Bemerken wir nur, dass F_6 regulär und an einem Kreise der Modulteilung symmetrisch ist, so ist F_6 deshalb schon an allen übrigen Kreisen dieser Teilung symmetrisch.*

Wir haben nunmehr an den Untergruppen Γ_3 und Γ_6 alle diejenigen Begriffsbestimmungen in ausführlicher Weise zur Erläuterung gebracht, welche jetzt sogleich für die Exposition einer allgemeinen Theorie der Untergruppen der Modulgruppe grundlegend sein werden. Indem wir aber im folgenden Kapitel zu der gerade genannten Untersuchung sehr allgemeiner Art aufrücken, werden wir dabei immer unsere Γ_3 und Γ_6 als zweckmässige Einzelbeispiele im Sinne behalten müssen.

§ 15. Vorläufige Bemerkungen über die functionentheoretische Bedeutung der Untergruppe Γ_6.

Wir nehmen hier noch Gelegenheit, auf die Beziehung unserer Untergruppe Γ_6 zu gewissen functionentheoretischen Sätzen des dritten Kapitels im ersten Abschnitt hinzuweisen, eine Beziehung, die so unmittelbar auf der Hand liegt, dass wir unseren jetzigen Gedankengang kaum unterbrechen, indem wir sie heranziehen. Wir lernten damals (p. 101) in

$$(1) \qquad \omega(\lambda) = s(0,\ 0,\ 0;\ \lambda)$$

eine Function kennen, welche die Halbebene von λ auf ein Kreis-

---

*) Γ_6 erscheint sonach überhaupt durch jede Operation zweiter Art der Erweiterung fähig. Doch kommen wir aus leicht ersichtlichem Grunde bereits zu allen hier möglichen erweiterten Gruppen $\bar{\Gamma}_6$, wenn wir Γ_6 der Reihe nach mit den sechs Operationen zweiter Art A, $V_1 A$, $V_2 A$, $\cdots$, $V_5 A$ combinieren, $V_1, V_2, \cdots$ in der Bedeutung von § 6 (p. 282) gebraucht. Die durch Erweiterung mit A entspringende $\bar{\Gamma}_6$ ist die im Anfang des Kapitels ausführlich betrachtete $\bar{\Gamma}'$.

bogendreieck der ω-Ebene mit lauter verschwindenden Winkeln abbildete. Wie dieses Kreisbogendreieck, dessen Ecken die Punkte

$$\lambda = 0,\ 1,\ \infty$$

abbildeten, in der ω-Ebene orientiert war, blieb oben (p. 111, 112) unentschieden. Machen wir hier einige ergänzende Mitteilungen darüber, die gleichwohl auch hier noch einen vorläufigen Charakter tragen sollen, da wir erst im folgenden Abschnitt auf Gegenstände dieser Art ausführlich eingehen.

Man erinnere sich zuvörderst, dass ein einzelnes Elementardreieck der Modulteilung ein conformes Abbild der positiven oder negativen J-Halbebene ist. Auf den Kreisen der Modulteilung nimmt also $J(\omega)$ stets reelle Werte an, und Fig. 36 (p. 113) lehrt, dass auf den Kreisen der einen Gattung (aus je zwei Dreiecksseiten bestehend) J stets positiv und ≥ 1 ist, während auf den Kreisen der anderen Gattung die übrigen reellen Werte von J sich finden.

Man ziehe des weiteren Gleichung (5) p. 15 zwischen λ und J heran oder besser sogleich Fig. 12 (p. 70), welche jene Gleichung versinnlicht. Man liest aus dieser Figur ab, dass ein reelles λ ein positives reelles $J \geq 1$ zur Folge hat, und dass umgekehrt für ein solches J auch stets λ reell ist. Es entspringt so der Satz: Auf den Kreisen der zur Γ_6 gehörigen Dreiecksteilung (Fig. 66, p. 273), welche ja gerade aus den Kreisen jener einen Gattung der Modulteilung bestand, wird $\lambda(\omega)$ stets reell sein; umgekehrt werden aber andere Punkte ω keine reellen Werte $\lambda(\omega)$ tragen. Daher denn das Resultat: *Ein geeigneter Ausgangszweig der Function $\omega(\lambda)$ bildet die eine Halbebene λ auf das im Anschluss an die $\overline{\Gamma}_6$ oben* (p. 273) *mit dem Namen* 1 *belegte Kreisbogendreieck ab, während das Kreisbogenviereck, welches im Anschluss an die Γ_6 den Namen* 1 *bekam* (Fig. 67, p. 276), *das durch den genannten Zweig entworfene conforme Abbild der gesamten λ-Ebene ist.*

Dieser Verhältnisse wegen kamen wir auch zur diedrischen Einteilung der λ-Ebene, wenn wir den Fundamentalbereich F_6 der Γ_6 durch Zusammenbiegung seiner auf einander bezogenen Randcurven deformierten (p. 294); denn die Ebene λ wird ja, wie wir früher sahen, durch ihre Beziehung zur J-Ebene gerade diedrisch eingeteilt. Die endliche Gruppe G_6, von der im Voraufgehenden so oft die Rede war, findet dabei ihren analytischen Ausdruck in den sechs linearen Substitutionen von λ, welche die Relation zwischen λ und J in sich transformieren. Diese linearen Substitutionen lauteten (cf. p. 15):

$$\lambda' = \lambda, \qquad \lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \lambda' = \frac{1}{1 - \lambda},$$

$$\lambda' = 1 - \lambda, \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

und wir bemerken, dass sie gerade in dieser Reihenfolge den oben durch $V_0, V_1, \cdots, V_5$ bezeichneten Substitutionen (3), p. 281 entsprechen.

Mag es genügen insoweit auf diese Verhältnisse eingegangen zu sein, deren endgiltige Erledigung, wie wir schon bemerkten, erst dem folgenden Abschnitte vorbehalten bleibt. Es geht aus diesen Erörterungen hervor (was später von den Gesamtentwicklungen des gegenwärtigen zweiten Abschnitts gelten wird), *dass die Betrachtungen des nun zu Ende geführten Kapitels und insbesondere die dabei gegebenen Figuren nicht nur eine gruppentheoretische, sondern auch eine functionentheoretische Bedeutung haben.*

Fünftes Kapitel.

Allgemeiner Ansatz für die Behandlung der Untergruppen der Modulgruppe.

Das gegenwärtige Kapitel soll zeigen, dass die soeben bei der Behandlung der Gruppe Γ_6 massgeblich gewesenen Begriffe für die sämtlichen der Modulgruppe angehörenden Untergruppen ihre Brauchbarkeit behalten. Wir nehmen bei den Erörterungen dieses Kapitels irgend eine solche Untergruppe als gegeben an und werden mit gewissen auf sie bezüglichen gruppentheoretischen Sätzen sowie namentlich mit einem ihr zugehörigen Fundamentalbereiche zu arbeiten haben. Zum voraus bemerken wir gleich, dass es sich zunächst nur um Modulsubstitutionen erster Art und also um Untergruppen von Γ handeln soll; Erweiterungen durch Modulsubstitutionen zweiter Art werden freilich schon im Laufe des Kapitels zwischendurch wieder in Betracht kommen. Alle Überlegungen, die wir durchführen werden, haben in den Entwicklungen des vorigen Kapitels ihr Modell; der Leser wird also gut thun, bei irgend welchen ihm entgegentretenden Schwierigkeiten immer wieder auf die ausführlicheren Darlegungen im vorigen Kapitel zurückzugehen.

Es wird kaum nötig sein, die Wichtigkeit der Überlegungen des gegenwärtigen, sowie übrigens auch des folgenden Kapitels für die ganze Theorie der elliptischen Modulfunctionen noch besonders zu betonen; sie bilden zusammen mit den functionentheoretischen Betrachtungen des folgenden Abschnitts, welche sich unmittelbar an dieselben anschliessen, das eigentliche Fundament der genannten Theorie*).

§ 1. Index und Repräsentantensystem einer gegebenen Untergruppe.

Sei durch irgend eine Untersuchung die Existenz einer Untergruppe Γ' der Modulgruppe Γ erkannt, so wollen wir für Γ' zunächst

*) Vergl. hierzu wiederholt die p. 142 unter dem Texte genannten Abhandlungen von Klein im 14ten Bande der Math. Annalen (1878), sodann besonders noch dessen Note: *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen,* in den Münchener Berichten vom Dec. 1879, (Math. Annalen Bd. 17, p. 62). Es sind dortselbst die grundlegenden Gesichtspunkte für die Entwicklungen des Textes skizziert.

die in § 6 des vorigen Kapitels für die Γ_6 durchgeführte Untersuchung verallgemeinern. Die Gruppe Γ', die als nicht-cyclisch angenommen wird, ist von unendlich hoher Ordnung*); wir denken ihre unendlich vielen Substitutionen in irgend einer Reihenfolge durch

$$v_0 = 1, \quad v_1, \quad v_2, \cdots$$

bezeichnet. Sei nun V_1 eine Operation der Gesamtgruppe, die nicht zugleich der Untergruppe Γ' angehört. Man zeigt dann, wie in den Elementen der Gruppentheorie, dass die in den beiden Reihen

$$\begin{array}{llll} 1, & v_1, & v_2, & v_3, \cdots \\ V_1, & v_1 V_1, & v_2 V_1, & v_3 V_1, \cdots \end{array}$$

aufgeführten Substitutionen durchgehends von einander verschieden sind. Giebt es überdies noch eine weitere Modulsubstitution erster Art V_2, die sich in keiner der beiden geschriebenen Reihen findet, so kommen mit ihr gleich alle unendlich vielen Substitutionen $v_k V_2$ der Gruppe Γ als neu hinzu, die wir in einer weiteren Horizontalreihe den beiden schon aufgestellten anreihen. Giebt es wiederum noch eine neue Modulsubstitution erster Art V_3, so reihen wir mit ihr alle Substitutionen $v_k V_3$ an und verfahren in ersichtlicher Weise nach dieser Vorschrift weiter.

Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder kann unsere Untergruppe Γ' so beschaffen sein, dass, soweit wir auch Horizontalreihen immer aufs neue nach der gegebenen Vorschrift anreihen mögen, doch immer noch Modulsubstitutionen in der Gesamtgruppe Γ übrig bleiben, die noch nicht untergebracht sind und demnach zu neuen Horizontalreihen Anlass geben. Andrerseits kann es sein, dass sich alle Operationen der Gruppe Γ in der endlichen Zahl von, sagen wir, μ Horizontalreihen:

$$(1) \qquad \begin{array}{llll} 1, & v_1, & v_2, & \cdots \\ V_1, & v_1 V_1, & v_2 V_1, & \cdots \\ V_2, & v_1 V_2, & v_2 V_2, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{\mu-1}, & v_1 V_{\mu-1}, & v_2 V_{\mu-1}, & \cdots \end{array}$$

*) In der That giebt es in der Modulgruppe keine nicht-cyclischen Untergruppen endlicher Ordnung. Sollten nämlich solche existieren, so müssten sie laut „Ikos." p. 116 u. f. die Structur einer der in der Theorie der regulären Körper auftretenden Gruppen haben. Da es aber nur cyclische Untergruppen zweiter und dritter Ordnung in der Modulgruppe giebt, so könnten nicht-cyclische Untergruppen endlicher Ordnung derselben höchstens noch den Dieder- oder Tetraedertypus zeigen. Dass sich aber solche Untergruppen aus Modulsubstitutionen erster Art nicht aufbauen lassen, zeigt man mühelos direct.

erschöpfend unterbringen lassen, wobei im aufgestellten Schema nun auch jede Operation der Gruppe Γ nur einmal genannt ist.

Für beide Arten von Untergruppen werden wir weiterhin eine grosse Mannigfaltigkeit von Beispielen kennen lernen. Indes wollen wir doch vorab unsere Begriffsbestimmungen an den Untergruppen der letzteren Art befestigen, für welche also die Operationen der Gesamtgruppe Γ sich in der *endlichen* Zahl von μ Reihen (1) anordnen lassen. Elementare Betrachtungen zeigen, dass diese Anzahl der Horizontalreihen ganz allein durch die vorgelegte Gruppe Γ' bedingt ist und nicht etwa noch von der Auswahl der Substitutionen $V_1, V_2, \cdots$ abhängt. Die fragliche Anzahl werden wir also als ein Attribut der Gruppe Γ' ansehen müssen *und nennen sie den Index der Untergruppe* Γ' *in Bezug auf die Gesamtgruppe* Γ. Wie oben möge fortan auch allgemein der Index μ mit in die Bezeichnung der gerade betrachteten Untergruppe aufgenommen werden, indem wir Γ_μ statt Γ' schreiben*).

Die einzelne Reihe in dem der Untergruppe Γ_μ entsprechenden Schema (1) kann eindeutig durch Angabe einer einzelnen ihrer Substitutionen charakterisiert werden. Indem wir also aus jeder Horizontalreihe (1) nach Belieben eine Substitution herausgreifen, erhalten wir das, *was wir ein Repräsentantensystem der Untergruppe* Γ_μ *bezüglich der Gesamtgruppe* Γ *nennen werden.* Ein solches Repräsentantensystem werden z. B. die μ Substitutionen $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu-1}$ bilden, welche die erste Verticalreihe im Schema (1) zusammensetzen. Besitzt die gerade betrachtete Untergruppe keinen endlichen Index μ, so wird natürlich auch die Zahl der ein Repräsentantensystem bildenden Substitutionen unbegrenzt gross werden.

§ 2. Herstellung eines zur vorliegenden Untergruppe Γ_μ gehörenden Fundamentalbereichs F_μ.

Wir verbinden mit diesen Überlegungen jetzt die erneute Betrachtung der Modulteilung.

Möge eine Untergruppe Γ_μ der Modulgruppe von endlichem Index μ vorliegen. Zwei bezüglich derselben äquivalente Punkte ω oder auch zwei Doppeldreiecke der Modulteilung, welche also durch eine Substitution v_k der Untergruppe in einander übergeführt werden, nennen wir kurz „relativ äquivalent". Die folgende Überlegung, welche übrigens im Princip mit der Betrachtung des vorigen Paragraphen übereinkommt, wird uns dann mit einem *Fundamentalbereich* für Γ_μ versehen und ergiebt über-

*) Wir haben hier nur der Vollständigkeit halber diese elementar-gruppentheoretische Erörterung von p. 140 des ersten Abschnitts nochmals kurz skizziert.

dies denselben sogleich in einer zweckmässigen Gestalt. Wie im vorigen Kapitel der Fundamentalbereich F_6 der Γ_6 sich aus sechs Doppeldreiecken aufbauen liess, *welche den sechs Substitutionen eines Repräsentantensystems zugeordnet waren*, so wird nun, wie wir sogleich voraus bemerken, der mit F_μ zu bezeichnende Fundamentalbereich der Γ_μ aus μ Doppeldreiecken bestehen, deren zugehörige Substitutionen V ein Repräsentantensystem für Γ_μ abgeben. Und wie F_6 ein *durchaus zusammenhängender Bereich* war, so wird auch F_μ, in zweckmässiger Weise construiert, aus einem einzigen Stücke bestehen.

Jedenfalls soll F_μ das Doppeldreieck 1 enthalten, von dem ausgehend wir nun durch successive Anfügung immer neuer Doppeldreiecke nach gewisser Vorschrift den ganzen Bereich F_μ construieren wollen. Doppeldreieck 1 ist von einem Kranze weiterer Doppeldreiecke der Modulteilung umgeben, welche jedenfalls nicht alle mit 1 relativ äquivalent sind*). Wählen wir eines derselben, das wir um der Allgemeinheit willen V_1' nennen, aus und verknüpfen es mit 1 zu einem Complex von zwei Doppeldreiecken. Aus dem nun diesen Complex umgebenden Kranze von Doppeldreiecken wählen wir ein drittes aus, das weder mit 1, noch mit V_1' relativ äquivalent ist und fügen selbiges (wofern sich ein solches im gedachten Dreieckskranze überhaupt ausfindig machen lässt) jenen beiden ersten Dreiecken 1, V_1' an, mit denen es nun einen zusammenhängenden Complex von drei Doppeldreiecken bildet. So fahren wir fort, indem wir immer wieder aufs neue, solange es möglich ist, dem gerade erreichten zusammenhängenden Dreieckscomplex aus den benachbarten Doppeldreiecken ein solches weiter anhängen, das nicht schon mit einem Doppeldreiecke des bereits gebildeten Complexes relativ äquivalent ist.

Aber der beschriebene Process muss alsbald zum Abschluss kommen, da man doch für unsere Untergruppe vom Index μ überhaupt im ganzen nur μ Doppeldreiecke ausfindig machen kann, von denen keine zwei relativ äquivalent sind. Indem wir also in bezeichneter Weise $\mu_0 \leqq \mu$ Doppeldreiecke zu einem zusammenhängenden Complex vereint haben, wird nun jedes demselben nach aussen gerade benachbarte Doppeldreieck D_a mit einem im Complex liegenden Doppeldreiecke D_i relativ äquivalent sein. Da beachte man dann weiter, dass D_i notwendig hart am Rande des Complexes liegen wird; denn eines der D_a benachbarten Doppeldreiecke gehört dem Complexe an und ist doch mit einem D_i benachbarten Dreiecke relativ äquivalent, welches letztere

*) Sonst enthielte Γ_μ die Substitutionen S und T und würde mit der Gesamtheit Γ identisch sein.

eben deshalb dem Complexe nicht angehören kann. Es wird solchergestalt D_i mit einer seiner Seiten eine Randcurve des Complexes liefern, welche mit einer anderen von D_a gelieferten Randcurve relativ äquivalent ist. *Die Randcurven des Dreieckscomplexes sind hiernach paarweise einander als relativ äquivalent zugeordnet.* Wir wollen daraufhin dem von unseren Dreiecken überdeckten Bereiche insofern fortan eine schärfere Definition geben, *als wir immer nur die Punkte der einen von zwei dergestalt einander zugewiesenen Randcurven dem Complexe zurechnen.*

Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun sehr leicht zu erkennen, *dass wir in dem construierten Complexe von Doppeldreiecken bereits einen vollen Fundamentalbereich der Untergruppe* Γ_μ *besitzen.*

In der That können sich erstlich in demselben keine zwei relativ äquivalente Punkte finden. Solche zwei Punkte müssten nämlich homolog in zwei Doppeldreiecken gelegen sein, welche dann ersichtlich nach ihrer ganzen Ausdehnung relativ äquivalent wären. Wofern nun unsere zwei Punkte nicht gerade auf dem Rande des Dreieckscomplexes gelegen sind, müssten aber diese beiden als relativ äquivalent erkannten Doppeldreiecke dem Complexe angehören, was doch bei der Art, wie wir denselben aufbauten, ausgeschlossen erscheint. Die auf dem Rande des Complexes gelegenen Punkte werden freilich immer zu Paaren relativ äquivalent sein; in diesem Betracht aber haben wir schon vorab die notwendige Festsetzung gemacht.

Des weiteren aber werden wir für einen beliebigen der positiven Halbebene angehörigen Punkt ω einen relativ äquivalenten im Innern des oft genannten Complexes nachweisen können. Ziehen wir nämlich von einem beliebigen Punkte ω_0 des Complexes eine ganz in der positiven Halbebene verlaufende Linie nach dem gewählten Punkte ω und durchlaufen dieselbe von ω_0 an. Ein erster Teil unserer Linie liegt im Complexe; an einer bestimmten Stelle aber überschreiten wir dessen Grenze und durchlaufen demnächst das hart an der Grenze liegende äussere Dreieck D_a. Dieses jedoch ist mit einem Dreieck D_i des Complexes relativ äquivalent, und wir können also für den nun folgenden Teil unserer Bahn einen relativ äquivalenten Weg ausfindig machen, der zuvörderst jenes Dreieck D_i, demnächst aber eine Reihe weiterer Dreiecke der Modulteilung durchsetzt. Indem wir so gleichzeitig zwei relativ äquivalente Wege beschrieben denken, wird dieser letztere zunächst im Innern des Complexes verlaufende Weg alsbald wieder an einer neuen Stelle dessen Grenze überschreiten, um nun in D_a' einzutreten. Ist dann wieder D_a' mit D_i' relativ äquivalent, so wiederholen wir unsere Zurückwerfung in das Innere des Complexes auch für das nächste Stück der nach ω führenden Bahn und so fort.

Leicht sieht man, wie diese Überlegung zum Abschluss kommen wird. Unsere ursprüngliche Bahn von ω_0 nach ω durchsetzt nur eine endliche Zahl von Dreiecken, da sie ganz innerhalb der positiven Halbebene verlaufen sollte. Dieselbe überträgt sich demnach auch nur auf eine endliche Zahl in bezeichneter Weise mit Stücken der Bahn relativ äquivalenter Linien, die den Complex durchziehen. Die letzte derselben wird in einem Punkte ω' des Complexes zu Ende kommen, wenn gleichzeitig ausserhalb der Endpunkt ω der Bahn erreicht ist. Jener erstere Endpunkt ω' ist sonach in der That ein mit ω relativ äquivalenter Punkt im Innern des Dreieckscomplexes.

Hiermit aber ist der in Aussicht genommene Beweis vollständig geführt.

Dass die soeben mit μ_0 bezeichnete Anzahl der Doppeldreiecke unseres Complexes gerade mit dem Index μ der Untergruppe Γ_μ in Übereinstimmung sein muss, ist nun leicht hinterher zu erkennen. In der That muss ja F_μ für jedes beliebig ausgewählte Doppeldreieck der Modulteilung ein relativ äquivalentes aufweisen. Aber die zu relativ äquivalenten Doppeldreiecken gehörenden Substitutionen stehen in der nämlichen Horizontalreihe des Schemas (1) p. 309. Wir sehen also, dass μ_0 nicht kleiner als μ sein kann, was mit $\mu_0 \leqq \mu$ in der That $\mu_0 = \mu$ ergiebt. — Die μ Substitutionen, deren bezügliche Dreiecke den construierten Fundamentalbereich zusammensetzen, werden wir geradezu, wie oben bei der Γ_6, zum Repräsentantensystem für die Γ_μ wählen können.

Seiner Gestalt nach ist der erhaltene Fundamentalbereich F_μ ein *einfach zusammenhängendes Kreisbogenpolygon* mit paarweise auf einander bezogenen Rändern. Wir werden denselben demnach auch sehr häufig als *Fundamentalpolygon* (cf. Math. Ann. Bd. 14, p. 133) bezeichnen. Übrigens ist die Gestalt unseres Bereiches F_μ im hohen Grade willkürlich. Immer könnte man beliebige Stücke am Rande des Bereiches ausschneiden und dieselben dafür vermöge der gerade in Betracht kommenden Substitutionen an den bezüglichen relativ äquivalenten Randstellen wieder anheften. Die beiden Ufer des Schnittes, vermöge dessen wir das betreffende Stück aus F_μ auslösten, liefern dann für die neue Form dieses Bereiches zwei auf einander bezogene Randcurven. Wir werden diese Massnahme wie oben als *„erlaubte Abänderung"* des Fundamentalbereichs F_μ bezeichnen und dieselbe im folgenden des öfteren zur Verwendung bringen. Dabei soll es sich aber immer nur um Abtrennung eines oder mehrerer *ganzer* Elementardreiecke handeln, so dass F_μ auch nach Ausführung der Abänderung immer wieder von gewissen Kreisen der Modulteilung begrenzt erscheint.

Letzten Endes sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass die Überlegungen des gegenwärtigen Paragraphen ausnahmslos in Kraft bleiben auch für den Fall einer Untergruppe von unendlich hohem Index, wie man durch Recapitulation des durchlaufenen Gedankengangs leicht bestätigen wird. Da erhalten wir dann freilich als Fundamentalbereich F_∞ ein einfach zusammenhängendes Kreisbogenpolygon von unendlich vielen Seiten, von dem aber im übrigen alle die Bemerkungen gelten, welche wir soeben auf den Fall eines endlichen μ bezogen.

§ 3. Überdeckung der ω-Halbebene mit Polygonen, die der Untergruppe Γ_μ entsprechen. Erzeugung der Γ_μ.

Möge für irgend eine vorgelegte Untergruppe Γ_μ in obbeschriebener Weise ein Fundamentalpolygon F_μ construiert sein, das also aus einem einfach zusammenhängenden Complex von 2μ bez. auch unendlich vielen Elementardreiecken besteht (je nachdem wir mit einer Untergruppe von endlichem oder unendlich hohem Index zu thun haben). Vermöge einer beliebigen Substitution v_k der Untergruppe Γ_μ wird F_μ in ein neues Polygon übergeführt, welches wir $F_\mu^{(k)}$ nennen wollen. Denke man sich dann der Gesamtheit der Substitutionen der Untergruppe Γ_μ entsprechend in der ω-Halbebene alle zugehörigen Polygone $F_\mu^{(0)} = F_\mu$, $F_\mu^{(1)}$, $F_\mu^{(2)}, \cdots$ entworfen. Da treten nun völlig allgemein die Verhältnisse ein, die wir oben bereits für die Gesamtgruppe Γ wie auch für Γ_6 kennen lernten. Da F_μ einen Fundamentalbereich für Γ_μ bildet, so ziehen wir wieder als eine unmittelbare Folgerung aus der Begriffsbestimmung des Fundamentalbereichs: *Jene Polygone $F_\mu^{(k)}$ werden in ihrer Gesamtheit die Halbebene vollständig überdecken, ohne dass irgendwo zwei von ihnen über einander träten; sie werden sich vielmehr allenthalben glatt an einander legen, ohne irgendwo zu collidieren.*

Benennen wir nunmehr wie früher das einzelne Polygon nach der Substitution v_k, vermöge deren es aus F_μ hervorgeht, selbst als v_k, so wollen wir nunmehr denjenigen Kranz von Polygonen in Betracht ziehen, welcher das erste 1 oder F_μ rings umgiebt. Mag die Zahl dieser Polygone m sein, wo alsdann m für Untergruppen von endlichem Index stets endlich, für solche von unendlich hohem Index im allgemeinen auch unendlich gross sein wird. Wir denken geradezu die auf diese m Polygone bezüglichen Operationen der Untergruppe durch $v_1, v_2, \cdots, v_m$ bezeichnet und also in der gedachten Reihe der Substitutionen von Γ_μ nächst der Identität $v_0 = 1$ an erster Stelle untergebracht. Nun hat das Polygon $v_i = F_\mu^{(i)}$ mit dem Fundamental-

polygon 1 $= F_\mu$ eine Randcurve gemein. Es wird demgemäss die Substitution v_i eine bestimmte andere Randcurve von F_μ in die eben gemeinte überführen, welche also mit jener relativ äquivalent sein muss. Auf solche Weise zeigt sich: *Die m Substitutionen $v_1, v_2, \cdots, v_m$ sind diejenigen, welche die relative Äquivalenz der paarweise auf einander bezogenen Randcurven von F_μ vermitteln; dabei findet sich neben der einzelnen Substitution v_i unter diesen m Substitutionen auch stets deren inverse $v_i^{-1} = v_k$.*

Ist jetzt v irgend ein beliebiges unter den Polygonen, mit denen wir die ω-Halbebene bedeckten, so ist auch dieses wieder von m weiteren Polygonen umkränzt. Die Namen der letzteren bringen wir gerade wie oben an entsprechender Stelle bei der Γ_6 in Erfahrung; es sind offenbar diese: $vv_1, vv_2, \cdots, vv_m$. Wenn wir also vom Polygon 1 immer zu benachbarten Polygonen fortgehen, werden wir für alle diese auf Namen geführt, die sich in der Form $v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \cdots$ darstellen, wobei $i_1, i_2, i_3, \cdots$ jedesmal Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, $\cdots$, m sind. Da wir aber durch Fortgang zu benachbarten Polygonen überhaupt zu *jedem* vorhandenen Polygone gelangen können, so entspringt der Satz, *dass sich jede Operation der Untergruppe Γ_μ als eine Combination der m Operationen $v_1, v_2, \cdots, v_m$ darstellen lässt. Diese m Substitutionen bilden also ein System von Erzeugenden für die Untergruppe Γ_μ.* Die Anzahl m dieser Erzeugenden ist, wie sich hier von selbst ergiebt, für Untergruppen von endlichem Index jederzeit selbst *endlich**), für Untergruppen von unendlich hohem Index ist sie aber *im allgemeinen selbst unendlich gross***).

§ 4. Transformation von Untergruppen. Gleichberechtigte und ausgezeichnete Untergruppen.

Die Erörterungen über Transformation der Untergruppen Γ_3 und Γ_6 im vorigen Kapitel und die daraus gezogenen Folgerungen übertragen sich ebenfalls ohne weiteres auf den allgemeinen Fall. Transformieren wir die Substitutionen v_k einer vorgelegten Untergruppe Γ_μ durch eine beliebig gewählte Modulsubstitution erster Art V und schreiben dabei

$$v_k' = V^{-1} v_k V,$$

---

*) Wollten wir den Satz, dass mit jeder Substitution auch ihre inverse als gegeben gilt, strenge handhaben, so würden wir das System der Erzeugenden $v_1, v_2, \cdots, v_m$ offenbar noch weiter reducieren können.

**) In der That kann die letzte Behauptung nur beschränkt ausgesprochen werden. Nehmen wir z. B. als Notbehelf für die Veranschaulichung des Falles $\mu = \infty$ eine *cyclische* Untergruppe der Modulgruppe, so ist bei ihr m sogar nur gleich 2.

so bilden die Substitutionen v_k' wieder eine Untergruppe, die Γ_μ' heissen mag, und die durch die Zuordnung von v_k' zu v_k holoedrisch isomorph auf Γ_μ bezogen ist. Wir sagen, Γ_μ' *entstehe aus* Γ_μ *durch Transformation vermöge* V:

$$\Gamma_\mu' = V^{-1}\Gamma_\mu V, \tag{1}$$

und nennen Γ_μ' *und* Γ_μ *innerhalb der Gesamtgruppe* Γ *gleichberechtigt.*

Ist v_k eine Substitution der Untergruppe Γ_μ, so ist $v_k^{-1}\Gamma_\mu v_k = \Gamma_\mu$ infolge der Gruppeneigenschaft von Γ_μ. Des weiteren folgt:

$$(v_k V_i)^{-1}\Gamma_\mu(v_k V_i) = V_i^{-1}v_k^{-1}\Gamma_\mu v_k V_i = V_i^{-1}\Gamma_\mu V_i,$$

wobei V_i ein beliebiger der μ von uns für die Untergruppe Γ_μ gewählten Repräsentanten sein soll. Wir werden demnach bereits alle mit Γ_μ gleichberechtigten Untergruppen gewinnen, wenn wir zur Transformation von Γ_μ nur die μ Substitutionen des zugehörigen Repräsentantensystems zulassen. *Demgemäss ist die Anzahl* ν *der verschiedenen mit* Γ_μ *gleichberechtigten Untergruppen* (Γ_μ *selbst als solche immer mitgezählt*) *gleich oder kleiner als* μ*); wir wollen sie durch Γ_μ, Γ_μ', $\cdots$, $\Gamma_\mu^{(\nu-1)}$ bezeichnen.

Im äussersten Falle kann eine Untergruppe einzig mit sich selbst gleichberechtigt sein. Sie wird dann durch jede Modulsubstitution erster Art in sich transformiert; man kann auch sagen, jede Modulsubstitution erster Art sei mit der Untergruppe Γ_μ vertauschbar, da man in der That in diesem Falle (1) in die Form setzen kann:

$$V\Gamma_\mu = \Gamma_\mu V.$$

Untergruppen Γ_μ *dieser Art heissen in der Gesamtgruppe* Γ *ausgezeichnet.* Dieselben werden alsbald eine bevorzugte Stellung einnehmen. Um eine Untergruppe Γ_μ als ausgezeichnet in der Gesamtgruppe zu erkennen, genügt es übrigens ersichtlich, die Vertauschbarkeit von S und von T mit derselben darzuthun.

Weiter werden wir nun neben den Modulsubstitutionen erster Art auch solche der zweiten Art zur Transformation zulassen.

Um hier vorab kurz zu recapitulieren, so wird sich jede Modulsubstitution zweiter Art auf die Form $v_k V_i A$ bringen lassen, für v_k und V_i die bisherige Bedeutung beibehalten. Offenbar kann man somit die gesamten Operationen der erweiterten Modulgruppe $\bar{\Gamma}$, der Γ_μ entsprechend, in ein Schema von 2μ Horizontalreihen einreihen, dessen erste Hälfte gerade das Schema (1), p. 309 darstellt, während die Substitutionen der letzten μ Horizontalreihen aus jenem Schema (1) einfach dadurch entstehen, dass man die einzelne Substitution $v_k V_i$ desselben mit A zu $v_k V_i A$ verbindet. Wir werden sagen, Γ_μ *sei innerhalb*

*) Eine wesentliche Verschärfung dieses Satzes folgt weiter unten in § 8, p. 326.

der $\bar{\Gamma}$ als Untergruppe des Index 2μ enthalten, wobei man dann als zugehöriges Repräsentantensystem zweckmässiger Weise die 2μ Operationen $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu-1}, A, V_1A, \cdots, V_{\mu-1}A$ *auswählt.*

Jetzt werden wir offenbar schon alle mit Γ_μ innerhalb der erweiterten Modulgruppe gleichberechtigten Untergruppen gewinnen, wenn wir Γ_μ vermöge der Operationen des eben ausgewählten Repräsentantensystems transformieren. Wir erhalten da erstlich die ν bereits innerhalb Γ mit Γ_μ gleichberechtigten Gruppen $\Gamma_\mu, \Gamma'_\mu, \cdots, \Gamma_\mu^{(\nu-1)}$ wieder, und werden alsdann jede einzelne derselben noch vermöge A zu transformieren haben, um in

$$\begin{array}{c} \Gamma_\mu, \quad \Gamma'_\mu, \cdots, \Gamma_\mu^{(\nu-1)}, \\ A\Gamma_\mu A, \; A\Gamma'_\mu A, \cdots, A\Gamma_\mu^{(\nu-1)}A \end{array} \tag{2}$$

die Gesamtheit der mit Γ_μ innerhalb $\bar{\Gamma}$ gleichberechtigten Untergruppen zu besitzen.

Hier hat man nun zwischen zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Eine elementare Betrachtung zeigt, dass in der zweiten Reihe (2) ν verschiedene, gleichfalls bereits innerhalb der ursprünglichen Γ gleichberechtigte Untergruppen stehen. Diese letzteren Gruppen werden entweder von den ν Gruppen der ersten Reihe (2) durchgehends verschieden sein, oder beide Reihen stellen, von der Reihenfolge abgesehen, die nämlichen ν Untergruppen dar (letzterer Fall findet bei den Γ_3 des vorigen Kapitels statt). *Im ersteren dieser beiden Fälle ist Γ_μ innerhalb $\bar{\Gamma}$ eine von 2ν gleichberechtigten Untergruppen. Wir haben alsdann den beiden Reihen* (2) *entsprechend zwei Systeme von je ν innerhalb der ursprünglichen Γ gleichberechtigten Untergruppen; diese beiden Systeme sind noch nicht innerhalb Γ gleichberechtigt, sie werden es indessen innerhalb der erweiterten $\bar{\Gamma}$. Im zweiten Falle ist Γ_μ auch in der erweiterten $\bar{\Gamma}$ nur mit jenen ν Untergruppen gleichberechtigt, die auch schon innerhalb der ursprünglichen Γ gleichberechtigt ausfielen.*

Weiter bemerkt man sofort, dass im ersten der beiden eben unterschiedenen Fälle Γ_μ mit keiner einzigen Operation zweiter Art vertauschbar ist (was sogleich auch von den übrigen Untergruppen (2) gilt). *Jetzt also ist Γ_μ nicht der Erweiterung durch eine Operation zweiter Art fähig.* Im letzteren Falle dagegen ist $A\Gamma_\mu A$ eine auch schon innerhalb Γ mit Γ_μ gleichberechtigte Untergruppe, etwa $V_i^{-1}\Gamma_\mu V_i$, und wir folgern dann aus $A\Gamma_\mu A = V_i^{-1}\Gamma_\mu V_i$, *dass nunmehr Γ_μ mit der Operation zweiter Art $\bar{V} = V_iA$ vertauschbar ist und also durch Combination mit derselben eine erweiterte $\bar{\Gamma}_\mu$ bildet.* Wir mussten hier an Stelle der früher allein zur Geltung gekommenen Erweiterungen durch Spiege-

lungen allgemeiner solche durch Operationen zweiter Art heranziehen. Dabei kommen wir immer auf jenen specielleren Fall zurück, so oft die erweiterte $\bar{\Gamma}_\mu$ wenigstens eine Spiegelung enthält; ersichtlich wäre nämlich Γ_μ mit dieser vertauschbar und würde mit ihr combiniert die gerade betrachtete $\bar{\Gamma}_\mu$ ergeben. Von vornherein freilich scheint die Existenz auch solcher Γ_μ nicht ausgeschlossen, die keine einzige Spiegelung enthalten. Inzwischen ist kein einziges Beispiel einer derartigen $\bar{\Gamma}_\mu$ bekannt, und es werden in der That fernerhin allein wieder die Erweiterungen durch Spiegelungen in Betracht kommen*).

Letzten Endes machen wir auch hier wieder den besonders wichtigen Specialfall $\nu = 1$ namhaft. Wir haben alsdann eine in der ursprünglichen Γ ausgezeichnete Untergruppe Γ_μ, *welche nun offenbar entweder auch in der erweiterten* $\bar{\Gamma}$ *ausgezeichnet ist oder innerhalb der letzteren eine von zwei gleichberechtigten Untergruppen darstellt, deren andere durch* $A\Gamma_\mu A$ *gegeben ist.* Wir merken uns schliesslich noch den ohne weiteres einleuchtenden Satz: Ist eine vorgelegte Untergruppe Γ_μ mit den Spiegelungen A, B, C vertauschbar, so ist sie in der erweiterten Modulgruppe ausgezeichnet enthalten.

§ 5. Von den Fundamentalpolygonen gleichberechtigter und ausgezeichneter Untergruppen.

Für irgend eine vorgelegte Untergruppe Γ_μ von endlichem oder unendlich hohem Index μ sei in F_μ ein aus den μ Doppeldreiecken $1, V_1, V_2, \ldots, V_{\mu-1}$ bestehendes Fundamentalpolygon in früher erklärter Weise gewonnen. Auf F_μ wollen wir dann die Modulsubstitution erster Art V_i^{-1} anwenden, welche das Doppeldreieck V_i des Fundamentalpolygons F_μ nach dem Ausgangsdreieck 1 verlegt. Möge der aus F_μ solchergestalt entspringende Bereich $F_\mu^{(i)}$ heissen. Die Zuordnung der Randcurven von F_μ soll bei dieser Transformation eine Veränderung nicht erlitten haben, d. h. in $F_\mu^{(i)}$ sollen immer zwei solche Randcurven auf einander bezogen sein, die in ihrer ursprünglichen Lage als Randcurven von F_μ bereits einander zugeordnet waren. Sind zwei der letzteren K' und K, so hatten wir

*) Die erweiterten Gruppen $\bar{\Gamma}$ und $\bar{\Gamma}_6$ enthielten nicht nur selbst unendlich viele Spiegelungen, sondern konnten *ausschliesslich* aus Spiegelungen erzeugt werden. Es hatte dieser Umstand die wichtige Folge, dass die Fundamentalbereiche jener Gruppen von vornherein gestaltlich fest bestimmt waren. Die weiterhin in Betracht kommenden Gruppen $\bar{\Gamma}_\mu$ sind, wie eingehendere Untersuchungen zeigen, im allgemeinen nicht mehr ausschliesslich aus Spiegelungen erzeugbar. Demgemäss fällt auch der Vorzug der gestaltlichen Bestimmtheit für die Fundamentalbereiche dieser Gruppen $\bar{\Gamma}_\mu$ hinweg.

(1) $$K' = v_k(K),$$

wo k unter Beibehaltung der Bezeichnung des § 3 eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \cdots, m$ ist. Durch Ausführung der Substitution V_i^{-1} gehe jetzt K in $K_1 = V_i^{-1}(K)$ und K' in $K_1' = V_i^{-1}(K')$ über. Als Beziehung zwischen K_1' und K_1 findet sich dann aus (1)

$$K_1' = V_i^{-1} v_k V_i(K_1),$$

so dass $V_i^{-1} v_k V_i$, $(k = 1, 2, \cdots, m)$ die Substitutionen sind, welche die auf einander bezogenen Randcurven von $F_\mu^{(i)}$ in einander überführen. Das sind aber gerade die erzeugenden Substitutionen der mit Γ_μ gleichberechtigten Untergruppe

$$\Gamma_\mu' = V_i^{-1} \Gamma_\mu V_i,$$

so dass $F_\mu^{(i)}$ ein Fundamentalbereich dieser Γ_μ' sein wird. *Durch Ausführung der μ Substitutionen V_i^{-1} gewinnen wir demnach aus dem Polygon F_μ der Untergruppe Γ_μ die Polygone aller mit Γ_μ innerhalb der Gruppe Γ gleichberechtigten Untergruppen.*

Wird die Untergruppe Γ_μ durch V_i^{-1} in sich transformiert, so muss sich das also an der Gestalt des Fundamentalbereichs F_μ dahin aussprechen, dass $F_\mu^{(i)}$ durch erlaubte Abänderung in F_μ übergeführt werden kann. *Das Fundamentalpolygon F_μ einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ von Γ muss demgemäss, von erlaubter Abänderung abgesehen, durch alle μ Substitutionen V_i^{-1} und also überhaupt durch jede Modulsubstitution erster Art in sich transformiert werden. Ein Fundamentalpolygon dieser Art wollen wir regulär nennen**). Die Regularität eines Fundamentalpolygons wird bereits hinlänglich dadurch erkannt, dass ein solches (von erlaubter Abänderung abgesehen) durch die beiden Substitutionen S und T in sich transformiert wird**).

Ganz ähnlich gestalten sich die Verhältnisse bei Transformation einer Untergruppe Γ_μ durch eine Operation zweiter Art. Gehen wir z. B. vermöge der Spiegelung $\overline{V}$ zu der mit Γ_μ innerhalb $\overline{\Gamma}$ gleichberechtigten Gruppe $\Gamma_\mu' = \overline{V} \Gamma_\mu \overline{V}$, so werden wir einen Fundamentalbereich für diese aus dem zu Γ_μ gehörenden Polygone F_μ herstellen, indem wir letzteres am Symmetriekreise von $\overline{V}$ zur Spiegelung bringen, wobei man natürlich die Schraffierung der Elementardreiecke umzuändern hat und je zwei Randcurven des neuen Bereichs immer dann zusammenordnen muss, wenn sie vor Ausführung von $\overline{V}$ als

---

*) Eingehende Bemerkungen über die Regularität folgen weiter unten in § 10, p. 333 u. f., wo dann auch die bezüglichen Litteraturnachweise gegeben sind.

**) Bezüglich der typischen Form eines derartigen regulären Fundamentalpolygons müssen wir auf die künftigen Beispiele verweisen.

Kanten des ursprünglichen F_μ einander zugewiesen waren. Da ergiebt sich insbesondere der Satz: *Eine Untergruppe Γ_μ ist der Erweiterung vermöge der Spiegelung $\bar{V}$ fähig unter der Bedingung, dass das Polygon F_μ von Γ_μ durch die Spiegelung $\bar{V}$, von erlaubter Abänderung abgesehen, in sich selbst übergeführt wird.* Wir wollen F_μ in dem Falle *bezüglich des Spiegelkreises von $\bar{V}$ mit sich selbst symmetrisch* nennen. Ist insonderheit $\bar{V} = A$, so wird man demgemäss die Elementardreiecke von F_μ derart anordnen können, dass die Gestalt von F_μ im elementaren Sinne Symmetrie an der imaginären ω-Axe aufweist. Die eine der beiden durch diese Axe abgeschnittenen Hälften von F_μ bildet alsdann einen Fundamentalbereich für die aus Γ_μ durch Erweiterung vermöge A entspringende Untergruppe $\bar{\Gamma}_\mu$. Welche Randpunkte diesem Bereiche zuzurechnen sind, und wie die Randcurven desselben zu Paaren einander zuzuordnen sind, entscheidet man im Einzelfalle leicht von der Gestalt des Bereiches F_μ aus.

Ist Γ_μ nicht nur in Γ, sondern sogar innerhalb der erweiterten Modulgruppe $\bar{\Gamma}$ ausgezeichnet, so ist F_μ bezüglich *aller* diesen Bereich durchziehenden Kreise, von erlaubter Abänderung abgesehen, mit sich selbst symmetrisch. *Ein Fundamentalpolygon dieser Art soll regulär-symmetrisch heissen, da es in der That auch stets Regularität im obigen Sinne besitzen wird.* Um ein Polygon F_μ als regulär-symmetrisch zu erkennen, genügt es schon, die Symmetrie desselben an den Spiegelkreisen der drei Operationen A, B, C zu constatieren*).

§ 6. Von den endlichen Gruppen G_μ und $G_{2\mu}$, welche einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ entsprechen.

Die Entwicklungen, welche in § 8 des vorigen Kapitels für die ausgezeichnete Untergruppe Γ_6 durchgeführt wurden, übertragen sich jetzt fast Wort für Wort auf den allgemeinen Fall einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ von endlichem oder nicht-endlichem Index μ. Ziehen wir nämlich das der ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ entsprechende Schema (1) p. 309 heran, so beweisen wir durch eine Schlussfolgerung, die derjenigen in § 8 des vorigen Kapitels bis ins einzelne gleicht, den Satz: *Combiniert man in vorgeschriebener Reihenfolge zwei völlig beliebige Substitutionen aus bestimmten zwei Horizontalreihen des eben gemeinten Schema, so entspringt eine Substitution, die einer bestimmten dritten Horizontalreihe angehört.*

---

*) Auch über die Symmetrie der Fundamentalpolygone vergleiche man unten in § 10 und 11, p. 333 u. f., noch weitergehende Bemerkungen.

Hier werden wir nun wieder gerade wie oben den vorliegenden Verhältnissen zweckmässiger Weise dadurch Rechnung tragen, dass wir uns entschliessen, *die Substitutionen v der Untergruppe* Γ_μ *zeitweise als von einander nicht verschieden anzusehen.* Wir bezeichnen dies durch das Äquivalenzzeichen:

$$v_g \sim v_h$$

und haben dann als unmittelbare Folgerung daraus $v_g V_i \sim v_h V_i$ anzumerken. Infolge dieses letzten Umstandes gelten uns alle in der einzelnen Horizontalreihe unseres Schemas untergebrachten Operationen als nicht verschieden, und also entspringt nun allgemein der Satz: *Falls wir die Substitutionen der in der Gesamtheit* Γ *ausgezeichneten Untergruppe* Γ_μ *als von einander nicht verschieden ansehen, reducieren sich die Operationen der Gesamtgruppe* Γ *auf nur* μ *verschiedene.*

Als diese μ verschiedenen Substitutionen werden wir je eine aus der einzelnen Horizontalreihe des Schemas nach Belieben auswählen und mögen so etwa das System der Substitutionen $V_0', V_1', V_2', \cdots, V_{\mu-1}'$ erlangt haben. Es ist dann

$$V_i' V_k' \sim V_l', \tag{1}$$

und wir werden dem am Eingang des Paragraphen aufgestellten Satze nun dahin Ausdruck geben, *dass den beiden in* (1) *gerade vorliegenden Zahlen i, k diese ganz bestimmte Zahl l in der bezeichneten Weise zugeordnet ist, völlig unabhängig davon, welche besondere Substitution* V' *wir aus der einzelnen Horizontalreihe auswählten.* Nehmen wir demnach fortan als Substitutionen V_i' wieder diejenigen μ Modulsubstitutionen erster Art, welche den μ Doppeldreiecken eines für Γ_μ etwa ausgewählten Fundamentalbereichs F_μ entsprechen, und schreiben also $V_i' = V_i$ und insbesondere $V_0' = V_0 = 1$.

Der Formel $V_i V_k \sim V_l$ werden wir jetzt dadurch eine präcise Deutung verschaffen, dass wir sagen: *Die* μ *Operationen* $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu-1}$ *bilden infolge unserer Verabredung eine Gruppe* G_μ, *deren Ordnung* μ *mit dem Index der ausgezeichneten Untergruppe* Γ_μ *übereinstimmt und also jenachdem endlich oder unendlich hoch ist.* Der erste Satz des vorliegenden Paragraphen lehrt dann, *dass diese Gruppe* G_μ *isomorph auf die Modulgruppe* Γ *bezogen werden kann,* nämlich dadurch, dass wir der einzelnen Operation der G_μ, deren „Symbol" V_i ist, alle diejenigen Modulsubstitutionen erster Art zuordnen, welche in der $(i+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe des oft genannten Schemas enthalten sind. *Der Isomorphismus von* G_μ *und* Γ *ist also ein solcher von unendlich hoher Meroedrie.*

Diese Sätze sind durchgängig nur dann in Geltung, wenn Γ_μ ausgezeichnete Untergruppe von Γ ist. Haben wir in Γ_μ sogar eine in

der erweiterten Modulgruppe $\bar{\Gamma}$ ausgezeichnete Untergruppe, so gestatten die geschehenen Entwicklungen dementsprechend eine weitere Ergänzung. Da denke man an das schon soeben eingeführte Schema von 2μ Horizontalreihen, in welches sich der Γ_μ entsprechend die Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}$ anordnen lassen. *Setzen wir dann wieder* $v_\varrho \sim v_k$, *so reducieren sich die Substitutionen der* $\bar{\Gamma}$ *auf nur* 2μ *verschiedene, als welche wir* $1, V_1, \cdots, V_{\mu-1}, A, V_1A, \cdots, V_{\mu-1}A$ *annehmen.* Unter Aufrechterhaltung unserer Festsetzung $v_\varrho \sim v_k$ werden wir dann den Satz gewinnen, dass jene 2μ Operationen *eine Gruppe* $G_{2\mu}$ bilden. *Aus dem Umstande, dass* Γ_μ *in der erweiterten Modulgruppe* $\bar{\Gamma}$ *ausgezeichnet sein sollte, entspringt also die Möglichkeit, in sofort ersichtlicher Weise zwischen den Gruppen* $G_{2\mu}$ *und* $\bar{\Gamma}$ *einen Isomorphismus von unendlich hoher Meroedrie zu begründen.* Auch dieser Satz wird späterhin von Bedeutung werden; vorab freilich wollen wir ausschliesslich bei der G_μ verweilen und die aus der Betrachtung dieser Gruppe zu gewinnende Ausbeute für die Behandlung unseres gruppentheoretischen Grundproblems in allgemeinen Zügen skizzieren.

§ 7. Allgemeine Gesichtspunkte für die Zerlegung der Gruppen G_μ in ihre Untergruppen.

Die Gruppen G_μ, welche wir soeben den ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ der Modulgruppe Γ hinzugesellten, spielen in der Folge eine überaus wichtige Rolle, und es ist namentlich die Zerlegung der einzelnen G_μ in die Gesamtheit ihrer Untergruppen eines unserer wichtigsten Hilfsmittel zur Auffindung von Untergruppen der Modulgruppe. Ehe wir diese Behauptung des näheren erläutern, wollen wir vorerst eine Reihe von Gesichtspunkten erörtern, welche weiterhin bei Zerlegung solcher Gruppen G_μ massgeblich sein werden. Die Regeln, die wir hier (und im folgenden Paragraphen) entwickeln wollen, haben übrigens durchaus allgemein gruppentheoretische Bedeutung und gehören zu den verbreitetsten Hilfsmitteln gruppentheoretischer Untersuchungen; natürlich werden wir diesen allgemeinen Entwicklungen hier nur insoweit nachgehen, wie wir sie künftighin notwendig zur Hand haben müssen. Wir setzen dabei zunächst μ als endlich voraus und gehen erst am Schlusse des gegenwärtigen Paragraphen auf die Frage ein, inwieweit unsere Erörterungen für den Fall $\mu = \infty$ Giltigkeit behalten.

Liege eine Gruppe unserer Art G_μ der endlichen Ordnung μ vor, so bezeichnen wir deren Operationen wie bisher durch die Symbole $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu-1}$, die dann im gegenwärtigen Sinne ihren Cha-

rakter als Modulsubstitutionen eingebüsst haben*). Sei G_τ eine Untergruppe von G_μ, so ist τ Teiler von μ, und wir setzen

$$\mu = \tau \cdot \mu_\tau, \tag{1}$$

unter μ_τ den ganzzahligen Quotienten von μ und τ verstanden. Bezeichnen wir, dem bisherigen Brauche entsprechend, diejenigen unter den Operationen V_k, welche die Untergruppe G_τ zusammensetzen, im speciellen durch $1, v_1, v_2, \cdots, v_{\tau-1}$, so bringen wir durch bekannte Überlegung die μ Operationen von G_μ in dem rechteckigen Schema unter:

$$\begin{array}{llll} 1, & v_1, & \cdots, & v_{\tau-1} \\ V_{a_1}, & v_1 V_{a_1}, & \cdots, & v_{\tau-1} V_{a_1} \\ V_{a_2}, & v_1 V_{a_2}, & \cdots, & v_{\tau-1} V_{a_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ V_{a_{\mu_\tau-1}}, & v_1 V_{a_{\mu_\tau-1}}, & \cdots, & v_{\tau-1} V_{a_{\mu_\tau-1}}, \end{array} \tag{2}$$

das wir fortan kurz S_{μ_τ} nennen wollen. Wir werden demnach sagen, *G_τ besitze als Untergruppe von G_μ den Index μ_τ*, und wir wählen die μ_τ Operationen der ersten Verticalreihe von S_{μ_τ} zum *Repräsentantensystem für G_τ*, Begriffe, welche den oben für die Modulgruppe eingeführten genau nachgebildet sind.

Jetzt bemerke man weiter: Sind zwei Operationen V_i, V_k der G_μ mit der Untergruppe G_τ vertauschbar, so gilt dies auch von der dritten $V_i V_k$. Sammeln wir also alle mit G_τ vertauschbaren Operationen, so besitzen wir in ihnen die Operationen einer Untergruppe $G_{\tau'}$, welche ersichtlich G_τ in sich enthalten wird. Wir schliessen hieraus zunächst, dass der Teiler τ' von μ ein Multiplum von τ darstellt; umgekehrt folgt dann aus

$$\mu = \tau \cdot \mu_\tau = \tau' \cdot \mu_{\tau'}, \tag{3}$$

dass $\mu_{\tau'}$ Teiler von μ_τ sein wird. Wir denken übrigens die Operationen von $G_{\tau'}$ durch $1, v_1, v_2, \cdots, v_{\tau'-1}$ bezeichnet (wobei die τ Operationen von G_τ an erster Stelle aufgeführt sind) und wählen $1, V_{a'_1}, V_{a'_2}, \cdots, V_{a'_{\mu_{\tau'}-1}}$ zum Repräsentantensystem für $G_{\tau'}$.

Die construierte Gruppe $G_{\tau'}$ umfasst gerade alle diejenigen Operationen, welche G_τ in sich transformieren; sie ist also die umfassendste Untergruppe von G_μ, innerhalb deren G_τ ausgezeichnet ist. Wollen wir zur kurzen Charakteristik dieser Sachlage die Ausdrucksweise verabreden, *G_τ sei relativ ausgezeichnet, nämlich ausgezeichnet in der umfassendsten*

*) In § 10 (p. 386) werden wir für die Operationen der G_μ wieder eine concrete Bedeutung gewinnen (man vgl. übrigens § 12 des vorigen Kapitels, p. 297).

Untergruppe $G_{\tau'}$. Unter diesen Umständen behaupten wir, *dass* G_τ *innerhalb der Gesamtgruppe* G_μ *eine von* $\mu_{\tau'}$ *gleichberechtigten Untergruppen ist, die wir in der Form schreiben können*:

$$(4) \qquad G_\tau,\ V_{a'_1}^{-1} G_\tau V_{a'_1},\ \cdots,\ V_{a'_{\mu_{\tau'}-1}}^{-1} G_\tau V_{a'_{\mu_{\tau'}-1}}.$$

In der That können von den Gruppen (4) keine zwei identisch sein. Wäre nämlich etwa

$$V_{a'_i}^{-1} G_\tau V_{a'_i} = V_{a'_k}^{-1} G_\tau V_{a'_k}, \quad \left(i \gtrless k\right),$$

so würde $V_{a'_i} V_{a'_k}^{-1}$ die Gruppe G_τ in sich transformieren und also eine Operation v_l aus der Reihe 1, $v_1, \cdots, v_{\tau'-1}$ sein. Wir würden dann für $V_{a'_i}$ die Form $V_{a'_i} = v_l V_{a'_k}$ berechnen, was gegen die Eigenschaft der Operationen 1, $V_{a'_1}$, $V_{a'_2}, \cdots$, ein Repräsentantensystem für $G_{\tau'}$ vorzustellen, verstiesse. Dass andrerseits ausser den Gruppen (4) nicht noch weitere mit G_τ gleichberechtigt sind, folgt aus dem Umstande, dass die Operationen der einzelnen Horizontalreihe des zu $G_{\tau'}$ gehörenden Schema $S_{\mu_{\tau'}}$ ersichtlich G_τ je in *dieselbe* andere Gruppe transformieren werden.

Vor allem merken wir uns noch den Satz an: *Die Anzahl* $\mu_{\tau'}$ *der mit* G_τ *gleichberechtigten Untergruppen* (*sie selbst stets mitgerechnet*) *ist ein Teiler des zu* G_τ *gehörenden Index* μ_τ.

Der Fortgang von einer Untergruppe G_τ zu derjenigen umfassendsten Untergruppe $G_{\tau'}$, in welcher jene relativ ausgezeichnet ist, wird künftighin in den durchzuführenden Einzelfällen ein oft wiederholt anzuwendendes Hilfsmittel sein. Welcher Gang für unsere Untersuchung dabei einzuschlagen ist, können wir in allgemeinen Zügen so skizzieren: Unser Ziel ist Aufzählung aller Untergruppen von G_μ. Wir werden dabei zuvörderst durch Wiederholung der einzelnen Operationen von G_μ deren Perioden bestimmen, um solchergestalt zur Kenntnis der *cyclischen* Untergruppen von G_μ zu gelangen. Man ordne sodann immer die gleichberechtigten unter diesen cyclischen Untergruppen zusammen und zähle deren Anzahl ab. Haben wir etwa $\mu_{\tau'}$ gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_τ der Ordnung τ gefunden, so entspringt vermöge unserer obigen Überlegung sofort der Satz, *dass die einzelne unter ihnen relativ ausgezeichnet in einer Gruppe* $G_{\tau'}$ *der Ordnung* $\tau' = \tau \cdot \frac{\mu_\tau}{\mu_{\tau'}}$ *ist*. Diese neuen Gruppen $G_{\tau'}$ mögen dann wieder ein System von $\mu_{\tau''}$ gleichberechtigten bilden, so entspringt aufs neue der Satz, dass die einzelne $G_{\tau'}$ relativ ausgezeichnet ist in einer $G_{\tau''}$ der Ordnung $\tau'' = \tau' \cdot \frac{\mu_{\tau'}}{\mu_{\tau''}}$. Diese Schlussweise kommt ersichtlich immer

dann zu Ende, wenn wir zu einem System von gleichberechtigten Untergruppen gelangt sind, deren Anzahl mit ihrer Ordnung multipliciert die Ordnung μ der Gesamtgruppe G_μ ergiebt. So sehr man nun betonen muss, dass diese Methode noch keineswegs ohne weiteres Gewähr leistet, zur Gesamtheit der Untergruppen von G_μ zu führen, so wird sie gleichwohl in allen späterhin zur Sprache kommenden Einzelfällen von Gruppen G_μ mit grösster Leichtigkeit zur Kenntnis der weitaus grössten Zahl in Betracht kommender Untergruppen thatsächlich hinleiten*).

Gehen wir nun zum Falle $\mu = \infty$. Bei einer G_∞ wird in dem Schema, welches wir (2) entsprechend für irgend eine in Betracht kommende Untergruppe G_τ herstellen, entweder die Anzahl der Horizontal- oder die der Verticalreihen oder gar beide zugleich unendlich gross. Das hindert nicht, von einem endlichen oder unendlich hohen Index der Untergruppe G_τ zu sprechen, sowie für dieselbe ein Repräsentantensystem aufzustellen. Des weiteren bleiben die Erörterungen über die umfassendste Untergruppe, in der eine andere relativ ausgezeichnet ist, vollständig in Geltung. Aber freilich bleibt hier für eine grössere Anzahl verschiedener Möglichkeiten Raum; eine Untergruppe G_τ kann in der Gesamtgruppe G_∞ ausgezeichnet sein, sie kann mit einer endlichen, ja schliesslich auch mit einer unendlich grossen Zahl weiterer Untergruppen von G_∞ gleichberechtigt sein.

Übrigens ist die Zerlegung einer G_∞ ein Problem, das möglicherweise infolge seiner Compliciertheit einer übersichtlichen Lösung überhaupt nicht fähig ist, während demgegenüber die Zerlegung einer G_μ von endlicher Ordnung immer durch eine endliche Anzahl von Schritten zu Ende gebracht werden kann. In der That werden wir auch unsere oben gegebene Zerlegungsregel immer nur auf Fälle endlicher Ordnungen μ anwenden.

§ 8. Bedeutung des vorigen Paragraphen für unser gruppentheoretisches Grundproblem. Planmässige Erledigung des letzteren.

Indem wir nunmehr die Bedeutung aufweisen wollen, welche der Zerlegung einer der in § 6, p. 320 aufgetretenen Gruppen G_μ für die

*) Die im vorigen Kapitel besprochene G_6 ist noch nicht hinreichend compliciert, um die abstracten Regeln des Textes zweckmässig zu illustrieren; wir müssen vielmehr auf die späteren bezüglichen Beispiele verweisen. Inzwischen ist ja die gegebene Regel für die Zerlegung jeder Gruppe verwendbar, und man versäume insbesondere nicht z. B. die Ikosaedergruppe G_{60} nach dieser Regel zu zerlegen. Im Texte können wir an dieser Stelle wegen Mangel an Raum ein Beispiel nicht einflechten.

Lösung unseres Grundproblems zukommt, gehen wir davon aus, dass die einzelne jener Gruppen G_μ isomorph auf die Modulgruppe bezogen wurde. Einer Modulsubstitution erster Art entsprach dabei immer eine und nur eine Operation von G_μ, umgekehrt entsprachen einer Operation von G_μ bestimmte Modulsubstitutionen in unendlicher Zahl. Insbesondere waren der identischen Operation von G_μ die Modulsubstitutionen der ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ zugeordnet, die allererst zur Bildung der Gruppe G_μ Anlass gab.

Bei dieser Sachlage ist nun der einzelnen Untergruppe G_τ auf Grund der hier in Betracht kommenden Sätze der Gruppentheorie eine bestimmte Untergruppe der Modulgruppe Γ zugeordnet. Dieselbe wird aus denjenigen Modulsubstitutionen bestehen, welche den Operationen der Untergruppe G_τ durch den Isomorphismus zugeordnet sind, und also werden wir für diese Untergruppe der Modulgruppe Γ ein Schema gewinnen, wenn wir im Schema (2), p. 323, der Gruppe G_τ an Stelle der einzelnen Operation alle ihr entsprechenden Modulsubstitutionen setzen. Wir haben so den Satz gewonnen: *Der einzelnen Untergruppe G_τ von G_μ entspricht eindeutig eine bestimmte Untergruppe Γ_{μ_τ} der Gruppe Γ vom Index μ_τ, wobei ersichtlich Γ_{μ_τ} ihrerseits die Gruppe Γ_μ als Untergruppe in sich enthält.*

Umgekehrt gewinnen wir aber auf diesem Wege auch die Gesamtheit derjenigen Untergruppen der Modulgruppe, die Γ_μ in sich enthalten. Irgend eine solche Untergruppe wird nämlich, da sie Γ_μ enthält, aus den Substitutionen einer gewissen Anzahl von Horizontalreihen des zu Γ_μ gehörenden Schemas zusammengesetzt sein. Die Zahl dieser Horizontalreihen möge τ sein; dann werden die τ Operationen von G_μ, welche jenen Horizontalreihen zugeordnet sind, notwendig eine Untergruppe G_τ von G_μ bilden, die also der gedachten Untergruppe der Modulgruppe eindeutig zugeordnet ist, und von der aus wir demnach jene Untergruppe von Γ in oben gekennzeichneter Weise hätten erlangen können.

Ist G_τ nun innerhalb $G_{\tau'}$, also relativ ausgezeichnet, so zeigt man auf Grund des hier vorliegenden Isomorphismus ohne Mühe, dass auch die entsprechenden Gruppen Γ_{μ_τ} und $\Gamma_{\mu_{\tau'}}$ in dem nämlichen Verhältnisse zu einander stehen. *Insbesondere wird Γ_{μ_τ} in der umfassendsten Gruppe $\Gamma_{\mu_{\tau'}}$ relativ ausgezeichnet sein, wenn $G_{\tau'}$ die umfassendste Untergruppe ist, in der G_τ ausgezeichnet ist.* Ist also G_τ innerhalb G_μ mit $\mu_{\tau'}$ Untergruppen gleichberechtigt, so ist entsprechend Γ_{μ_τ} eine von $\mu_{\tau'}$ innerhalb Γ gleichberechtigten Untergruppen. Da hierbei $\mu_{\tau'}$ Teiler von μ_τ ist, so kommt der Satz (cf. Note p. 316): *Die Anzahl der mit einer vorliegenden Untergruppe von endlichem Index innerhalb der*

Gesamtheit Γ *gleichberechtigten Untergruppen ist stets ein Teiler dieses Index.*

Infolge dieser Sachlage erscheint es nun angezeigt, bei Aufsuchung von Untergruppen der Modulgruppe zuvörderst *das Hauptaugenmerk auf die Gewinnung ausgezeichneter Untergruppen* Γ_μ *zu legen, um alsdann zu den nicht ausgezeichneten Untergruppen von der Zerlegung der bezüglichen Gruppen* G_μ *aus vorzudringen.* Diese Bemerkung gewinnt um so mehr Bedeutung, als sich zeigen lässt, *dass eine Untergruppe irgend welcher Art* Γ_μ *von endlichem Index stets eine Untergruppe* Γ_M *von gleichfalls endlichem Index in sich enthält, die in der Gesamtgruppe* Γ *ausgezeichnet ist.*

Ehe wir diese Behauptung darthun, wolle man den Satz erhärten, dass die gemeinsamen Substitutionen zweier beliebigen Untergruppen Γ_{μ_1}, Γ_{μ_2} der endlichen Indices μ_1, μ_2 eine Untergruppe Γ_{μ_3} bilden, deren Index $\mu_3 \leqq \mu_1 \cdot \mu_2$ ist. Sind nämlich die Operationen der Γ_{μ_1} durch $1, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \cdots$ bezeichnet, ein Repräsentantensystem für diese Untergruppe aber durch $1, V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, \cdots, V_{\mu_1-1}^{(1)}$, so wollen wir die Operationen $v_k^{(1)}$ jener ersten Γ_{μ_1} jetzt der zweiten Gruppe Γ_{μ_2} entsprechend in ein Schema anordnen. In der ersten Reihe desselben werden die Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} gemeinsamen Substitutionen $1, v_1, v_2, \cdots$ aufzuschreiben sein, während ersichtlich die Zahl der Horizontalreihen dieses Schemas $\mu_2' \leqq \mu_2$ sein wird. Wollen wir dieselben durch die besonderen Substitutionen $1, V_1^{(2)}, V_2^{(2)}, \cdots, V_{\mu_2'-1}^{(2)}$ repräsentieren. Eine beliebige Modulsubstitution V gestattet jetzt die Darstellung:

$$V = v_g^{(1)} V_i^{(1)} = v_h V_k^{(2)} V_i^{(1)}, \quad (i = 0, 1, \cdots, \mu_1 - 1;\ k = 0, 1, \cdots, \mu_2' - 1).$$

Die $\mu_3 = \mu_1 \mu_2' \leqq \mu_1 \mu_2$ Substitutionen $V_k^{(2)} V_i^{(1)}$ bilden demgemäss ein Repräsentantensystem für die Gruppe Γ_{μ_3} der Substitutionen

$$1, v_1, v_2, \cdots, v_k \cdots,$$

welche zugleich in Γ_{μ_1} und Γ_{μ_2} enthalten sind, so dass in der That unsere obige Behauptung bezüglich der Γ_{μ_3} sich bestätigt.

Kehren wir nun zur oben vorgelegten Untergruppe Γ_μ von endlichem Index μ zurück. Mögen im ganzen die ν Gruppen

$$\Gamma_\mu, \Gamma_\mu', \cdots, \Gamma_\mu^{(\nu-1)} \tag{1}$$

innerhalb Γ mit Γ_μ gleichberechtigt sein, so ist ν als Teiler von μ gleichfalls endlich. Man schliesst nun sofort aus dem eben bewiesenen Zwischensatze, dass die gemeinsamen Substitutionen der ν Gruppen (1) eine Untergruppe Γ_M von *endlichem* Index $M \leqq \mu^\nu$ bilden. *Diese* Γ_M *aber ist innerhalb* Γ *ausgezeichnet.* Transformieren wir nämlich durch die beliebige Modulsubstitution erster Art V, so ist den durch diese

Transformation aus (1) entstehenden ν Untergruppen die Gruppe $\Gamma'_M = V^{-1}\Gamma_M V$ gemein. Aber diese ν transformierten Gruppen stellen ja die ν Gruppen (1) nur vielleicht in anderer Reihenfolge dar, so dass in der That stets $\Gamma'_M = \Gamma_M$ ist, welches auch die Substitution V sein mag. Zugleich entspringt aus unserer Überlegung der Satz: *Die solchergestalt gefundene Gruppe* Γ_M *ist die umfassendste in der Gesamtheit* Γ *ausgezeichnete Untergruppe, welche in der vorgelegten Untergruppe* Γ_μ *enthalten ist.*

Hätte man also Kenntnis erlangt von der Gesamtheit ausgezeichneter Untergruppen der Modulgruppe von *endlichem* Index, so würde alsdann die Aufstellung *aller* nicht-ausgezeichneten Untergruppen von endlichem Index auf die Zerlegung von Gruppen *endlicher* Ordnung in ihre Untergruppen zurückkommen.

§ 9. Zusammenbiegung des Fundamentalbereichs F_μ zur geschlossenen Fläche. Geschlecht p einer Untergruppe Γ_μ. Beziehung zur ω-Halbebene.

Es hat in § 11 des vorigen Kapitels (p. 294) zur Deutung der damals in Betracht kommenden Verhältnisse die besten Dienste gethan, dass wir den Fundamentalbereich F_6 der Γ_6 aus der ω-Halbebene herausschnitten und aus demselben durch Zusammenbiegung der auf einander bezogenen Randcurven eine geschlossene Fläche herstellten. Wir werden zur besseren Deutung unserer letzten Erörterungen versuchen, eine ähnliche Massnahme allgemein für irgend eine vorgelegte ausgezeichnete oder nicht-ausgezeichnete Untergruppe Γ_μ durchzuführen. Übrigens betonen wir hier ausdrücklich, dass unsere nächstfolgenden Betrachtungen sich nur erst auf die Untergruppen eines endlichen Index μ beziehen sollen. Dass sie wesentlich auch für $\mu = \infty$ bestehen bleiben, werden wir späterhin an ausführlich zu betrachtenden Beispielen bemerken.

Denken wir uns also das Fundamentalpolygon F_μ einer Untergruppe Γ_μ in irgend einer particulären Weise gewählt und schneiden dasselbe längs seiner Randcurven aus der ω-Halbebene heraus. Diese Randcurven des so isolierten einfach zusammenhängenden Bereiches sind paarweise auf einander bezogen, und nun denken wir frei im Raume eine Deformation von F_μ vorgenommen, bei der die auf einander bezogenen Randcurven einander angenähert werden; schliesslich sollen sie sogar zusammengeheftet werden, und zwar so, dass je zwei vordem relativ äquivalente Randpunkte von F_μ nun zur Coincidenz gebracht sind. Der Deformationsprocess, den wir dabei verwenden, hat

nur der einen Bedingung zu genügen, überall stetig zu verlaufen. *Wir haben auf dem Wege aus dem Polygon F_μ eine geschlossene Fläche hergestellt, die wir auch wieder F_μ nennen, und die eine sogleich noch näher zu betrachtende Einteilung in 2μ abwechselnd schraffierte und freie Dreiecke trägt.* Die Gestalt dieser geschlossenen Fläche ist noch im hohen Grade willkürlich, und wir wollen entgegen unserer oben bei der Γ_6 verfolgten Massnahme in diesem Betracht besondere Verabredungen hier nicht treffen. Haben wir also einmal eine particuläre Gestalt für die Fläche F_μ erhalten, so wird es erlaubt sein, dieselbe hinterher noch einer ganz beliebigen nur ohne Zerreissen vor sich gehenden stetigen Formänderung zu unterwerfen; der Gebrauch, den wir hier von der geschlossenen Fläche F_μ zu machen gedenken, wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Für die in Rede stehende, geschlossene Fläche F_μ ist es nun völlig gleichgiltig, von welcher besonderen Gestalt des Polygons F_μ in der ω-Halbebene wir ausgingen. In der That ziehe man diejenigen Linienzüge auf der Fläche in Betracht, welche aus den zusammengehefteten Randcurven des Polygons hervorgingen. Wir werden dieselben offenbar als ein „Schnittssystem" der Fläche im Riemann'schen Sinne auffassen können (durch welches dieselbe dann in eine einfach zusammenhängende Fläche zerschnitten wird). Da heisst nun „erlaubte Abänderung", wie wir sie für das Polygon F_μ in der ω-Halbebene definierten, nichts anderes, als „Ersetzung des gezogenen Schnittsystems durch ein neues", eine Operation also, die an der Fläche F_μ selbst keinerlei Änderung hervorbringt.

Wollen wir uns insbesondere sogleich ansehen, welche Sätze sich betreffs der Aufeinanderfolge der 2μ Elementardreiecke aufstellen lassen, die unsere Fläche F_μ netzartig umspannen. Wir werden dabei speciell die Umgebungen derjenigen Punkte der Fläche in Augenschein nehmen, welche aus den Ecken der Dreiecke des Polygons F_μ entspringen und die wir in sofort verständlicher Weise als Punkte bezeichnen, die mit ϱ, i oder $i\infty$ äquivalent sind. Ein einzelner von den mit ϱ äquivalenten Punkten der Fläche kann erstlich von sechs Elementardreiecken umlagert sein, eine Sachlage, die uns von der ω-Halbebene her sehr geläufig ist. Andrerseits könnte es aber auch sein, dass derselbe nur von zwei Elementardreiecken umlagert ist. Immer dann tritt dies ein, wenn in der Γ_μ diejenige elliptische Modulsubstitution der Periode drei enthalten ist, welche den in Rede stehenden Punkt in der ω-Halbebene zum Fixpunkt hat. Der fragliche Punkt wird alsdann auf dem Rande des Polygons F_μ liegen, da die sechs ihn umgebenden Moduldreiecke zu je drei relativ äquivalent werden. Man dehnt diese Be-

trachtung sofort auf die mit i und $i\infty$ äquivalenten Punkte aus*). Beim Ausspruch des entspringenden allgemeinen Satzes bedienen wir uns der sogleich verständlichen Ausdrucksweise, dass wir von der Umgebung eines der in Rede stehenden Punkte sagen, sie werde von einer gewissen Anzahl „im Cyclus zusammenhängender Dreiecke" gebildet. Dann haben wir den Satz: *Bei einem mit ϱ äquivalenten Punkte der Fläche hängen entweder sechs oder zwei Elementardreiecke im Cyclus zusammen.* Entsprechend findet man, *dass bei einem mit i äquivalenten Punkte entweder vier oder zwei Elementardreiecke im Cyclus zusammenhängen;* letzteres in dem Falle, dass die zu dem bezüglichen Punkte der ω-Halbebene als Fixpunkte gehörige elliptische Modulsubstitution der Periode zwei in der Γ_μ enthalten ist. *Endlich wird ein mit $i\infty$ äquivalenter Punkt von $2n$ Elementardreiecken rings umlagert sein, wo n irgend eine beliebige ganze Zahl ist.* Um sie im Einzelfall zu bestimmen, müssen wir auf den bezüglichen rationalen reellen Punkt ω zurückgehen und die zu ihm als Fixpunkt gehörigen parabolischen Substitutionen aufstellen. Denken wir dieselben nach der Grösse ihrer Amplitude in eine Reihe angeordnet, so ist diejenige der Amplitude n die erste von ihnen, welche der Untergruppe Γ_μ angehört. — Für alle diese Sätze sind die im vorigen Kapitel betrachteten Untergruppen zweckmässige Beispiele, bei deren ausführlicher Betrachtung wir indes hier nicht noch einmal verweilen können.

Bei der Untergruppe Γ_6 des vorigen Kapitels waren die Verhältnisse insofern äusserst einfache, als sich die Polygone F_3 und F_6 direct zu einer Kugeloberfläche zusammenbiegen liessen. Im allgemeinen müssen wir aber durchaus der Möglichkeit Raum geben, dass wir unter unseren geschlossenen Flächen F_μ auch solche finden, die einen höheren Zusammenhang als die Kugeloberfläche darbieten. Allgemein misst man bekanntlich die Höhe des Zusammenhanges einer geschlossenen Fläche durch die Anzahl der Querschnitte, durch welche dieselbe in solcher Weise zerschnitten wird, dass sie, obwohl selbst noch zusammenhängend, durch jeden erneut noch hinzukommenden Querschnitt

*) Im speciellen bemerken wir noch für die parabolischen Substitutionen: Ist V eine in der Γ_μ enthaltene parabolische Substitution mit dem Fixpunkte ω_0, so giebt es einen mit ω_0 relativ äquivalenten Punkt, an den sich das Polygon F_μ der Γ_μ mit einer Spitze heranzieht. Wir haben diesen an gegenwärtiger Stelle sofort einleuchtenden Satz nur deshalb angeführt, um auf die Möglichkeit seiner Verallgemeinerung für die bei den s-Functionen (1), p. 103, auftretenden Gruppen linearer Substitutionen aufmerksam zu machen. In der That sind es Betrachtungen dieser Art, durch welche man die betreffs der parabolischen Substitutionen oben (p. 178) geschehene Behauptung zu verificieren vermag.

in getrennte Stücke zerlegt wird*). Ist diese übrigens stets gerade Anzahl $2p$, so spricht man von *einem Geschlechte p der geschlossenen Fläche F_μ*. Diese Zahl p erscheint durch Vermittlung der geschlossenen Fläche F_μ eindeutig auch dem Polygon F_μ und der Untergruppe Γ_μ zugeordnet. Wir werden dieselbe also als ein Attribut der Untergruppe fassen und demnach fortan *von einem Geschlechte p einer vorgelegten Untergruppe Γ_μ sprechen* (cf. Math. Ann. Bd. 17, p. 64).

Die Kugeloberfläche ist eine Fläche des Geschlechtes $p = 0$. Zu einer solchen aber liessen sich im vorigen Kapitel das Fundamentalviereck der Untergruppe Γ_6 sowie die Fundamentalbereiche F_3 der Untergruppen Γ_3 zusammenlegen. Die im vorigen Kapitel betrachteten Untergruppen Γ_6 und Γ_3 sind also solche vom Geschlechte $p = 0$. Besonders verdient es aber betont zu werden, *dass auch die Gesamtgruppe Γ ein Geschlecht $p = 0$ besitzt*. In der That wird man ja das Doppeldreieck 1 der Modulteilung, wenn wir es nach oben gegebener Vorschrift deformieren, aufs leichteste zu einer einfach bedeckten Kugel oder Ebene zusammenbiegen können (wobei dann insbesondere durch zweckmässige Ausführung dieser Operation die complexe Ebene der Grösse $J(\omega)$ erreicht werden kann)**).

Treffen wir nun wieder gerade wie oben bei der Γ_6 derartige Verabredungen, dass die geschlossene Fläche F_μ nicht nur, wie bisher, auf das einzelne Polygon F_μ bezogen erscheint, sondern dass wir es ganz allgemein mit *einer Beziehung der Oberfläche F_μ zur ω-Halbebene* zu thun haben.

Durch unsere anfängliche Construction sind die μ Doppeldreiecke des Polygons F_μ, welche die Namen 1, V_1, V_2, $\cdots$, $V_{\mu-1}$ hatten, wechselweise eindeutig den μ Doppeldreiecken der Fläche F_μ zugeordnet, welche letztere ja aus jenen durch die vorgenommene Deformation des Polygons entsprangen. Wollen wir also auch für die

---

*) Näheres über den im Texte gemeinten Flächenzusammenhang findet man z. B. im siebenten Kapitel des schon p. 28 genannten Neumann'schen Werkes, oder auch in der Schrift von Klein: *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1881).

**) Genau wie im Texte könnten wir auch den in II, 1 besprochenen cyclischen Gruppen irgend welcher Operationen erster Art ein Geschlecht zuteilen. Durch Rückgang auf die bezüglichen Fundamentalbereiche (Fig. 44, 47, p. 187, 190) würden wir da die Sätze erhalten: *Eine cyclische Gruppe elliptischer Substitutionen ist vom Geschlechte $p = 0$, eine solche aus hyperbolischen Substitutionen aber vom Geschlechte $p = 1$.* Einer Gruppe parabolischer Substitutionen dagegen müssen wir das Geschlecht $p = 1$ oder $p = 0$ erteilen, je nachdem wir den Fundamentalbereich derselben (cf. Fig. 45, p. 188) im bezüglichen Fixpunkte zusammenhängend oder unterbrochen denken.

μ Doppeldreiecke der Fläche F_μ diese Namen 1, V_1, V_2, $\cdots$, $V_{\mu-1}$ bez. beibehalten. Da sind einander denn irgend zwei benachbarte Dreiecke V_i, V_k der Fläche jeweils *in demselben Sinne* benachbart, wie die beiden entsprechenden Dreiecke V_i, V_k im Polygon F_μ. Wir können geradezu die Beziehung des Polygons auf die Fläche dadurch festgelegt denken, *dass wir das Dreieck 1 des Polygons dem Dreieck 1 der Fläche zuordnen und von da ab immer benachbarten Dreiecken des Polygons im gleichen Sinne benachbarte Dreiecke der Fläche entsprechen lassen.* Dadurch sind die Dreiecke freilich zunächst nur als ganze einander zugeordnet; doch halten wir an der Vorstellung fest, dass auch für die inneren Punkte je zweier einander entsprechender Dreiecke eine stetige eindeutige Beziehung vorliegt, wie sie ja in der That durch die stetige Überführung des Polygons F_μ in die Fläche F_μ festgelegt ist.

Diese Auffassungsweise gestattet nun direct auch die ausserhalb des Polygons F_μ gelegenen Teile der ω-Halbebene auf die Fläche zu beziehen. Überschreiten wir nämlich, immer unsere eben gegebene Regel aufrecht erhaltend, jetzt die Grenze des Polygons F_μ an irgend einer Stelle, so werden wir zuvörderst zu einem ausserhalb am Rande des Polygons F_μ gelegenen Moduldreieck $v_k V_i$ gelangen. Dem ist dann vermöge unserer Festsetzung auf der Fläche F_μ dasjenige Doppeldreieck zugeordnet, das bereits den Namen V_i erhalten hat; denn wir hatten das Polygon F_μ ja derart deformiert, dass die auf einander bezogenen Randcurven desselben zur Deckung kamen. Auch hier ist dann zunächst nur erst das Moduldreieck $v_k V_i$ als ganzes dem Dreieck V_i der Fläche zugeordnet; doch denken wir wieder auch die inneren Punkte dieser beiden Dreiecke in stetiger Weise einander zugeordnet und zwar derart, dass relativ äquivalente Punkte in den beiden Moduldreiecken V_i, $v_k V_i$ dem nämlichen Punkte von F_μ entsprechen, wie wir denn auch weiter die in diesem Betracht bei der Γ_6 (p. 296) ausführlich gegebenen Vorschriften im vollen Umfange aufnehmen. Hier wird man nun die Überlegung mühelos weiter verfolgen und als endliches Resultat derselben überblicken: *Die geschlossene Fläche F_μ und die positive ω-Halbebene sind auf einander ein-∞-deutig bezogen, indem jedem Doppeldreieck der Halbebene $v_k V_i$ ein Doppeldreieck der Fläche, nämlich V_i, einem einzelnen Doppeldreieck der Fläche V_i aber die unendlich vielen Moduldreiecke V_i, $v_1 V_i$, $v_2 V_i$, $\cdots$ zugeordnet sind**).

---

*) Wollen wir wechselweise eindeutige Beziehung von Halbebene und Fläche haben, so müssen wir letztere unendlich oft überdeckt denken, wobei dann die verschiedenen Blätter in denjenigen Linien in einander übergehen würden, welche,

Irgend zwei relativ äquivalente Punkte ω und $\omega' = v_k(\omega)$ sind sonach auf den gleichen Punkt der Fläche F_μ bezogen. Wenn man also zwischen solchen zwei Punkten ω, ω' eine in der Halbebene verlaufende Bahn zieht und selbige bei der nun begründeten Zuordnung auf die Oberfläche F_μ überträgt, so finden wir sie auf F_μ als *eine geschlossene Linie* wieder. (Dabei macht es für anderweitige Untersuchungen bei einer Fläche F_μ mit einem Geschlechte $p > 0$ eine wichtige Fallunterscheidung aus, ob eine solche geschlossene Linie auf der Fläche ohne Zerreissen auf einen Punkt zusammengezogen werden kann oder nicht.)

§ 10. Besondere Ausführungen für die ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ. Regularität und Symmetrie der zugehörigen Fläche F_μ.

Während die bisherigen auf die Flächen F_μ bezüglichen Entwicklungen ohne Unterschied für ausgezeichnete und nicht-ausgezeichnete Untergruppen Γ_μ galten, folgen nun eine Reihe besonderer Ausführungen, welche allein die in der Gesamtheit Γ ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ betreffen. Setzen wir vorerst nur voraus, die Modulsubstitution V_k (welche man als eine der μ Substitutionen

$$1,\ V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_{\mu-1}$$

denken mag), transformiere Γ_μ in sich oder sei mit Γ_μ vertauschbar. Für die Gestalt des Fundamentalpolygons F_μ war diese Thatsache gleichbedeutend mit der anderen, dass dasselbe durch V_k, von erlaubter Abänderung abgesehen, in sich transformiert wurde. Durch diese Transformation erleiden die Dreiecke des Polygons eine Permutation, bei deren Ausführung ersichtlich benachbarte Dreiecke immer wieder im gleichen Sinne benachbarte Dreiecke werden. Doch müssen wir, wenn dies uneingeschränkt gelten soll, auch zwei am Rande des Polygons gelegene Dreiecke benachbart nennen, wenn ihre auf dem Rande liegenden Seiten relativ äquivalent sind. Dieses letzteren Zusatzes sind wir nun überhoben, wenn wir das Polygon zur geschlossenen Fläche zusammengelegt denken. Wir werden hier den Satz aussprechen dürfen: *Die Vertauschbarkeit der Substitution V_k mit Γ_μ ist gleichbedeutend mit der Möglichkeit einer eindeutigen Transformation der Fläche F_μ oder, noch genauer, der auf F_μ befindlichen*

---

aus den Randcurven des Polygons F_μ entspringend, schon vorhin ein Schnittsystem der Fläche F_μ lieferten. In der That haben wir so die unendlich vielen Polygone F_μ, F'_μ, $\cdots$ „über" einander gelagert, welche wir oben in § 3 (p. 314) „neben" einander in der ω-Halbebene einlagerten.

Dreiecksteilung in sich, derjenigen Transformation nämlich, bei welcher Dreieck 1 in Dreieck V_k, übrigens aber benachbarte Dreiecke stets wieder in benachbarte übergehen.

So konnte die Fläche F_6 des vorigen Kapitels mit ihrer Einteilung in sechs Doppeldreiecke derart in sich transformiert werden, dass das Doppeldreieck 1 in ein beliebig unter den sechsen gewähltes V_k überging, während die übrigen Dreiecke dann entsprechend permutiert wurden*). Diese Transformationen konnten wir sogar durch eine continuierliche Verschiebung der Oberfläche F_6 in sich, d. h. durch eine Drehung der Kugel F_6 um ihren Mittelpunkt versinnlichen. Zur Klarstellung der Verhältnisse bemerken wir hier nebenher, dass in allen Fällen einer Fläche F_μ des Geschlechtes $p = 0$, sowie zum Teil auch noch bei dem Geschlechte $p = 1$ eine jede im Sinne des eben ausgesprochenen Satzes etwa eintretende Transformation der Fläche in sich ebenfalls durch eine continuierliche Verschiebung derselben in sich hergestellt werden kann; für alle Flächen F_μ mit $p > 1$ ist aber eine derartige Versinnlichung einer Transformation derselben in sich von vornherein ausgeschlossen.

Wenden wir uns nun sogleich zum äussersten Fall einer in der Gesamtgruppe Γ ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ. Für eine solche Γ_μ gewinnen wir sofort den Satz: *Die Vertauschbarkeit jeder Modulsubstitution erster Art mit der Untergruppe Γ_μ ist gleichbedeutend mit der Möglichkeit, die bezügliche Fläche F_μ auf μ verschiedene Weisen derart in sich zu transformieren, dass die Einteilung derselben in μ Doppeldreiecke in sich selbst übergeführt wird.* (Unter diesen μ Weisen zählt die identische Transformation, bei der jeder Punkt von F_μ sich selbst entspricht, selbstverständlich als eine solche mit.) Wie wir das Polygon F_μ einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ regulär nannten, so wollen wir nun von der bezüglichen geschlossenen Fläche F_μ sagen, *sie besitze eine reguläre Einteilung in μ Doppeldreiecke* (cf. Math. Ann. Bd. 14, p. 459). Und in der That tritt hier die volle Bedeutung des Begriffs der Regularität aufs einfachste hervor, wie denn überhaupt der Ausdruck „Regularität" von hier stammt. Wählen wir irgend zwei Doppeldreiecke der regulär geteilten Oberfläche F_μ, so giebt es eine zugehörige Transformation, welche F_μ derart in sich überführt, dass das eine der gewählten Doppeldreiecke in das andere übergeht. Indem wir hier nur auf die Lagenbeziehungen der Doppeldreiecke der Fläche F_μ achten und

*) Demgegenüber haben wir an der geschlossenen Fläche F_3, welche im vorigen Kapitel aus dem Fundamentalbereiche der Γ_3 hergestellt wurde, dortselbst (p. 302) ausführlich gezeigt, dass dieselbe eine Transformation in sich von der im Texte geforderten Art nicht zulässt.

von metrischen Beziehungen gänzlich absehen, zeigt sich also bei der Aneinanderlagerung der Doppeldreiecke zum F_μ umspannenden Dreiecksnetze eine derartige Regelmässigkeit, *dass sich die μ Doppeldreiecke um eines unter ihnen gerade so anordnen wie um jedes andere.* Im speciellen muss sich die Regularität auch in der Anordnung der Doppeldreiecke um die mit ϱ, i und $i\infty$ äquivalenten Punkte der Fläche zeigen. Wir haben da offenbar den Satz: *Bei einer regulären Fläche wird jeder Punkt der einzelnen dieser drei Kategorien immer von genau so vielen Elementardreiecken umlagert sein, wie jeder andere Punkt der nämlichen Kategorie.*

Wollen wir nach zweckmässigen Beispielen für die Veranschaulichung unserer allgemeinen Erörterungen suchen, so fassen wir den Begriff einer regulär geteilten geschlossenen Oberfläche in völlig independenter Weise. Wir werden jede, mit einer Einteilung in μ Bereiche versehene, geschlossene Oberfläche so benennen, wenn sich dieselbe auf solche μ Weisen eindeutig auf sich selbst beziehen lässt, dass jenen μ Bereichen dabei gerade die Rolle zufällt, welche soeben im speciellen die μ Doppeldreiecke spielten. Da sind uns denn vor allem wichtigste Beispiele die den gewöhnlichen regulären Körpern entsprechenden regulären Einteilungen der Kugeloberfläche. Wähle man z. B. die Ikosaederteilung; die sechzig Bereiche derselben sind geradezu auch Doppeldreiecke und die nähere Betrachtung zeigt, dass dieselben sich um ihre Eckpunkte in einer Weise schaaren, welche sich den bei unseren Flächen F_μ vorliegenden Verhältnissen direct subsumiert*). Diese regulären Kugelteilungen liefern uns selbstverständlich nur Beispiele regulär geteilter Oberflächen des Geschlechtes $p = 0$, und man zeigt, dass diese letzteren hierbei völlig erschöpft werden. Was die zunächst weiter in Betracht kommenden Geschlechter $p = 1, 2, 3$ angeht, so verweisen wir hier auf die diesen Gegenständen gewidmeten Abhandlungen von Hrn. Dyck, die wir noch häufig zu nennen haben werden**). In denselben sind die regulär geteilten Oberflächen sogleich in ihrer vollen functionentheoretischen Bedeutung in Discussion gezogen, die wir hier (soweit sie überhaupt für uns in Betracht kommt) erst späterhin kennen lernen werden.

*) Dasselbe tritt auch für die übrigen regulären Kugelteilungen mit einer einzigen Ausnahme ein. Wir werden diesen Umstand im folgenden Kapitel weiter verfolgen.

**) *Über regulär verzweigte Riemann'sche Flächen und die durch sie definierten Irrationalitäten* (Dissertation, München 1879), *Über Untersuchung und Aufstellung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen,* Math. Ann. Bd. 17 p. 473 (1880), *Gruppentheoretische Studien*, Math. Ann. Bd. 20 p. 1 (1881). Weitergehende Litteraturnachweise findet man namentlich in der letztgenannten Arbeit.

Indem wir jetzt zu unserer regulär geteilten Fläche F_μ zurückkehren, bemerken wir, dass die μ Transformationen derselben in sich offenbar *eine Gruppe der* μ^{ten} *Ordnung* bilden. *Diese Gruppe ist nun holoedrisch isomorph mit derjenigen Gruppe* G_μ, *welche wir oben der zu Grunde liegenden ausgezeichneten Untergruppe* Γ_μ *zuordneten*, wobei dann der durch das Symbol V_k bezeichneten Operation von G_μ diejenige Transformation von F_μ in sich zuzuweisen ist, bei der das Doppeldreieck 1 in dasjenige mit dem Namen V_k übergeführt wird. Den holoedrischen Isomorphismus bemerkt man in der That aufs leichteste, wenn man auf die den beiderlei Gruppen zu Grunde liegenden Modulsubstitutionen und Moduldreiecke zurückgeht. Wirklich kommt ja auch die isomorphe Beziehung von G_μ auf Γ, wie sie in § 6 zur Aufstellung kam, genau überein mit der Beziehung der Doppeldreiecke der geschlossenen Fläche F_μ auf die Doppeldreiecke der ω-Halbebene, indem wir V_k das eine Mal als Operation einer Gruppe, das andere Mal als Doppeldreieck interpretieren. Unser gefundenes Resultat wird um so wichtiger erscheinen, *als wir damit eine concrete Bedeutung für die Gruppe* G_μ *gewonnen haben*, während bislang die einzelne Operation derselben doch nur ein Symbol für eine gewisse unendliche Reihe für identisch geltender Modulsubstitutionen war*).

Mit sehr viel grösserer Kürze gehen wir jetzt auf den Fall ein, dass die vorgelegte Untergruppe Γ_μ auch in der erweiterten Gesamtgruppe $\overline{\Gamma}$ ausgezeichnet enthalten ist. Dann geht das Fundamentalpolygon F_μ nicht nur durch die μ Operationen V_k, sondern auch noch durch die μ Operationen zweiter Art $V_k A$ von erlaubter Abänderung abgesehen in sich über, unter welchen Operationen sich insbesondere auch die Spiegelungen an den F_μ durchziehenden Kreisen der Modulteilung finden. Wir nannten in diesem Falle das Polygon F_μ *regulär-symmetrisch* und werden jetzt diese Benennung auf die bezügliche geschlossene Fläche F_μ übertragen, indem wir sagen, *dieselbe trage eine regulär-symmetrische Einteilung in* 2μ *Elementardreiecke*. Abgesehen von den bislang besprochenen μ Transformationen der Fläche F_μ in sich kommen hier noch μ neue hinzu, die wir als „Transformationen mit Umlegung der Winkel" bezeichnen werden. Auch durch sie wird das Dreiecksnetz der Fläche F_μ unter Aufrechterhaltung seiner Continuität in sich übergeführt, doch so, dass schraffierte und nicht-schraffierte Dreiecke gegen einander ver-

*) Es ist empfehlenswert, dass man diese Verhältnisse auch noch unter Heranziehung der unendlich oft überdeckten Fläche F_μ durchdenkt, von welcher in der Note p. 332 u. f. die Rede war.

tauscht werden. Insbesondere finden sich unter diesen μ Transformationen auch solche, bei denen ganze aus Dreiecksseiten bestehende Linienzüge der Fläche Punkt für Punkt in sich selbst übergeführt werden. Derartige Transformationen, die den Spiegelungen der ω-Halbebene entsprechen, werden wir *symmetrische* Umformungen der Fläche F_μ in sich nennen; *überhaupt aber nennen wir jede Fläche, die eine oder mehrere solche Umformungen in sich gestattet, eine symmetrische**). Im speciellen wird die in Rede stehende regulär-symmetrische Fläche F_μ längs *jeder* aus Dreiecksseiten ihrer Teilung zusammengesetzten Linie Symmetrie zeigen; denn die zu Grunde liegende, in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ ausgezeichnete Untergruppe Γ_μ ist ja als solche mit allen in $\overline{\Gamma}$ enthaltenen Spiegelungen vertauschbar. Dass es sich bei allen diesen geometrischen Aussagen hier allenthalben nur um Lagenbeziehungen, nicht um Massbeziehungen handelt, brauchen wir kaum noch einmal hinzuzusetzen.

Letzten Endes bemerken wir noch, dass die 2μ Transformationen unserer regulär-symmetrischen Fläche in sich wieder eine *Gruppe* bilden werden, in der man sofort die $G_{2\mu}$ des § 6 erkennt.

§ 11. Teilweise Regularität oder Symmetrie der Flächen F_μ bei relativ ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ.

Wir haben bislang allein den äussersten Fall betrachtet, dass eine vorgelegte Untergruppe Γ_μ in der Gesamtgruppe Γ bez. $\overline{\Gamma}$ ausgezeichnet ist. Unsere gegebenen Entwicklungen lassen sich aber auch auf die übrigen Gruppen Γ_μ verallgemeinern. Wir müssen da auf die umfassendste Gruppe $\Gamma_{\mu'}$ zurückgehen, in welcher die gerade betrachtete Γ_μ ausgezeichnet enthalten ist. Der Index μ' derselben ist ein Teiler von μ und also ist $\frac{\mu}{\mu'} = \tau$ eine *ganze* Zahl. Dieselbe ergiebt zufolge der Entwicklungen in §§ 7, 8 (p. 322 u. f.) den Index, welcher Γ_μ als einer Untergruppe von $\Gamma_{\mu'}$ zukommt. Wir können das aber auch dahin

*) Die symmetrischen Flächen wurden zum ersten Male in der schon oben (p. 331) genannten Schrift von Klein: *„Über Riemann's Theorie etc."* in allgemeiner Weise betrachtet; hieran schliesst sich die Abhandlung von G. Weichold, *Über symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung*, in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" Bd. 28 p. 321 (1883). Wir werden noch mehrfach Gelegenheit haben, auf die betreffende Theorie zurückzukommen, bei der es sich übrigens zum Unterschied von den gegenwärtig im Texte vorliegenden Überlegungen um „conforme" symmetrische Beziehungen einer Fläche auf sich selbst handelt.

ausdrücken, dass es im Repräsentantensystem der Untergruppe Γ_μ im ganzen τ der $\Gamma_{\mu'}$ angehörende Substitutionen giebt. Sie mögen durch $1, V_1, V_2, \cdots, V_\tau$ bezeichnet sein.

Die τ gewonnenen Substitutionen $1, V_1, V_2, \cdots, V_\tau$ sind diejenigen unter den μ Substitutionen des zu Γ_μ gehörenden Repräsentantensystems, welche mit Γ_μ vertauschbar sind und eben deshalb das bezügliche Polygon F_μ von erlaubter Abänderung abgesehen in sich überführen. Wir finden so: *Unter den angegebenen Verhältnissen lässt die zu Γ_μ gehörende geschlossene Fläche τ solche Transformationen in sich zu, bei der ihre Einteilung in μ Doppeldreiecke mit sich selbst zur Deckung kommt.* Hier kommen wir nun für $\tau = \mu$ und also $\Gamma_{\mu'} = \Gamma$ auf den im vorigen Paragraphen abgehandelten Fall zurück, während wir für $\tau = 1$ in Γ_μ eine nur in sich selbst ausgezeichnet enthaltene Untergruppe haben. Im letzteren Falle nennen wir die Teilung der zugehörigen Fläche F_μ *irregulär*, während wir für die zwischenliegenden Fälle $1 < \tau < \mu$ von einer *teilweisen Regularität* der bezüglichen Flächen F_μ sprechen*).

An dieser Stelle werden wir auch noch derjenigen Untergruppen gedenken, welche der Erweiterung vermöge einer Spiegelung $\overline{V}$ fähig sind; denn das heisst offenbar, Γ_μ sei in der solchergestalt entspringenden erweiterten Gruppe $\overline{\Gamma}_\mu$ relativ ausgezeichnet. Wir können das Polygon F_μ so gelegt denken, dass der Spiegelkreis von $\overline{V}$ durch F_μ hindurchzieht. Man sieht so, *dass die geschlossene Fläche F_μ eine symmetrische ist;* denn sie lässt jedenfalls *eine* $\overline{V}$ entsprechende symmetrische Umformung in sich zu, bei welcher die aus dem Spiegelkreis von $\overline{V}$ entspringende Linie der Fläche F_μ und vielleicht auch noch weitere Linien derselben**) punktweise sich selbst entsprechen. Dass aber unsere Fläche gar nicht bezüglich aller Linien ihrer Teilung mit sich selbst symmetrisch zu sein braucht, könnten wir etwa dadurch andeuten, dass wir sie im gegenwärtigen Falle teilweise symmetrisch nennen. Doch würde das mit der oben (p. 337) eingeführten Begriffsbestimmung der „symmetrischen Fläche“ nicht in Übereinstimmung sein.

---

*) In diesem Falle geben gewisse μ' dem Polygon F_μ angehörige Doppeldreiecke ein Polygon $F_{\mu'}$ für $\Gamma_{\mu'}$. Wir fassen dieselben auf der Fläche F_μ zum Bereich $F_{\mu'}$ zusammen und werden durch Ausübung der τ Transformationen von F_μ in sich $F_{\mu'}$ im ganzen in τ Bereiche transformieren, die nun unsere Fläche F_μ vollständig umspannen. Sie bilden dann für die Oberfläche F_μ ersichtlich wieder eine reguläre Einteilung im allgemeinen Sinne des vorigen Paragraphen.

**) Zur näheren Erläuterung müssen wir hier durchaus auf die späteren Einzelausführungen verweisen.

Zweckmässige Beispiele liefern hier die Γ_3 des vorigen Kapitels. Die ihnen zugehörigen F_3 sind irregulär und teilweise symmetrisch, wie man leicht bemerken wird.

§ 12. Regeln zur Berechnung des Geschlechtes p einer Untergruppe Γ_μ. Diophantische Gleichung für ausgezeichnete Untergruppen.

Um eine bequeme Formel für die Berechnung des Geschlechts p einer vorgelegten Untergruppe Γ_μ zu gewinnen, denken wir uns die Elementardreiecke der zugehörigen geschlossenen Fläche F_μ um der Einfachheit willen als ebene und dementsprechend als geradlinig begrenzt. Wir haben dann in F_μ ein im allgemeinen mehrfach zusammenhängendes Polyeder vor uns, welches wir als ein solches *vom Geschlechte p* bezeichnen werden. Die einzelnen Elementardreiecke geben dessen Flächen, die Dreiecksseiten dessen Kanten, die mit ϱ, i, $i\infty$ äquivalenten Punkte auf F_μ endlich die Ecken des Polyeders. Die Anzahlen dieser drei Elemente unseres Polyeders bezeichnen wir bez. durch f, k und e und haben dann auf Grund des verallgemeinerten Euler'schen Satzes für Polyeder unserer Art zwischen diesen Anzahlen und dem Geschlechte p von F_μ die Gleichung*):

$$e + f = k - 2p + 2. \tag{1}$$

*) Da der Beweis der Verallgemeinerung des Euler'schen Polyedersatzes für $p > 0$ nicht sehr bekannt zu sein scheint, so schalten wir hier eine kurze Andeutung über denselben ein. Man zerschneide vorab durch $2p$ Querschnitte die Fläche F_μ derart in eine einfach zusammenhängende, dass die Querschnitte *eine* in sich zurücklaufende Randcurve für F_μ bilden. (Man vgl. hier die in Betracht kommenden Erörterungen im ersten Kapitel des folgenden Abschnitts und namentlich auch die dort gegebene Figur.) Man verfährt nun zunächst genau wie beim elementaren Beweis für $p = 0$, indem man nach und nach alle nicht von den Querschnitten durchzogenen Dreiecke des Polyeders abträgt und dabei jedesmal die rückbleibenden Zahlen e, f, k controliert. Die Überlegung ist in der That genau die elementare, da wir einen *einfach* zusammenhängenden Dreieckscomplex abtragen. Sind alle von Querschnitten nicht durchzogenen Dreiecke fort, so bleiben uns nun $2p$ einzeln ringförmig geschlossene Ketten von Dreiecken, die teils direct, teils durch weitere als Bänder fungierende Dreiecksketten mit einander vereint sind und solchergestalt ein zusammenhängendes Gerippe der Fläche F_μ bilden. Jetzt trenne man jede der gedachten $2p$ Dreiecksketten längs einer ihrer Kanten auf, wodurch die gerade erreichte Anzahl k bei unveränderten e, f einen Zuwachs um $2p$ erfährt. Dergestalt erhält man wieder einen *einfach* zusammenhängenden Dreieckscomplex und bringt den Beweis durch die bekannte elementare Überlegung zum Abschluss. Man hat also in der für $p = 0$ geltenden Formel nur k um $2p$ zu vermindern, um die allgemein gültige Formel zu erhalten, so dass sich (1) in der That bestätigt.

Um diese Formel in eine für uns zweckmässigere Gestalt überzuführen, bemerken wir zuvörderst, dass f mit der Anzahl 2μ der Elementardreiecke unserer Fläche F_μ identisch ist. Formel (1) kann man also in die Gestalt überführen:

$$p = -\mu + 1 + \tfrac{1}{2}(k - e).$$

Des weiteren denken wir die Ecken des Polyeders d. i. die mit i, ϱ oder $i\infty$ äquivalenten Punkte auf F_μ in irgend einer Reihenfolge mit den Nummern 1, 2, 3, $\cdots$, e versehen. Möge dann die ν^{te} unter ihnen von $2n_\nu$ Elementardreiecken umlagert sein (cf. p. 330), so werden in ihr $2n_\nu$ Kanten des Polyeders zusammenlaufen. Bilden wir jetzt die Summe $\sum_{\nu=1}^{e} 2n_\nu$, so ist in ihr jede Kante offenbar doppelt gezählt, so dass wir $k = \sum_{\nu=1}^{e} n_\nu$ erhalten. Da überdies die Gliederzahl dieser Summe gleich e ist, so haben wir:

$$k - e = \sum_{\nu=1}^{e} (n_\nu - 1)$$

und erhalten demgemäss als endgültige Formel für das Geschlecht p unserer Untergruppe Γ_μ:

$$p = -\mu + 1 + \sum_{\nu=1}^{e} \frac{n_\nu - 1}{2}. \tag{2}$$

Insbesondere verfolgen wir diese Formel für den Fall einer in Γ ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ. Für eine solche haben äquivalente Ecken immer die gleiche Zahl n_ν, und zwar ist für die mit i äquivalenten Ecken nach § 9 u. f. n_ν entweder 1 oder 2, desgleichen ist für die mit ϱ äquivalenten Ecken n_ν entweder 1 oder 3, während für die dritte Kategorie d. h. für die mit $i\infty$ äquivalenten Ecken der eintretende Zahlwert n_ν von vornherein noch nicht näher bestimmt ist. Nennen wir diese drei für unsere ausgezeichnete Untergruppe Γ_μ in Betracht kommenden Anzahlen bez. n_i, n_ϱ, n_∞, *so heisse fortan die Zusammenstellung*:

$$\{n_i,\quad n_\varrho,\quad n_\infty\}$$

*das zur ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ gehörige Verzweigungsschema**). Nun lässt sich die Anzahl der Ecken der drei Kategorien im gegen-

*) Die Bedeutung dieser Benennung werden wir später noch eingehender erläutern.

wärtigen Falle leicht berechnen. Das einzelne Elementardreieck beteiligt sich mit je einer Ecke an der einzelnen der drei Kategorien der in Rede stehenden Punkte von F_μ. Da nun der einzelne z. B. mit ϱ äquivalente Punkt von $2n_\varrho$ Dreiecken umlagert ist, so wird $\frac{2\mu}{2n_\varrho}$ die Anzahl der Punkte dieser Kategorie sein. Entsprechend finden sich auf F_μ im ganzen $\frac{\mu}{n_i}$ mit i und endlich $\frac{\mu}{n_\infty}$ mit $i\infty$ äquivalente Punkte. Die unter (2) gegebene Formel gestattet demnach für eine ausgezeichnete Untergruppe folgende specielle Schreibweise:

$$(3) \qquad p = -\mu + 1 + \frac{\mu}{n_i}\cdot\frac{n_i - 1}{2} + \frac{\mu}{n_\varrho}\cdot\frac{n_\varrho - 1}{2} + \frac{\mu}{n_\infty}\cdot\frac{n_\infty - 1}{2}.$$

Formel (3) ist eine *diophantische Bedingung* für Verzweigungsschema, Index und Geschlecht einer ausgezeichneten Untergruppe, die durch *jede* in der Γ enthaltene ausgezeichnete Untergruppe befriedigt wird. *Wir dürfen aber keineswegs diesen Satz ohne weiteres umkehren.* Einer Lösung von (3) in ganzen Zahlen kann möglicherweise eine ausgezeichnete Γ_μ entsprechen; es können aber auch ebenso gut mehrere oder überhaupt keine ausgezeichnete Γ_μ existieren, welche einer gefundenen Lösung von (3) entsprechen.

Wir bringen jetzt die Formel (3) sogleich zur Verwendung, indem wir fragen, ob es ausgezeichnete Γ_μ vom Verzweigungsschema $\{1, 1, n_\infty\}$ giebt. In diesem Falle nimmt (3) nach leichter Zwischenrechnung die Gestalt an:

$$p = 1 - \frac{\mu(n_\infty + 1)}{2n_\infty}.$$

Bei der Bedeutung von p, μ und n_∞ folgt notwendig $p = 0$ und $\mu(n_\infty + 1) = 2n_\infty$, woraus sich

$$n_\infty = \frac{\mu}{2 - \mu}$$

berechnet. Da aber n_∞ eine ganze positive Zahl sein soll, so ist offenbar $\mu = 1$, $n_\infty = 1$, woraus man sofort schliesst, *dass die Gesamtgruppe* Γ *die einzige hiergehörige Gruppe ist.*

In entsprechender Weise discutiere man die beiden Schemata $\{2, 1, n_\infty\}$ und $\{1, 3, n_\infty\}$, wobei man beachte, dass unter den sich einstellenden Lösungen von (3) in ganzen Zahlen nur die brauchbar sein können, *bei denen* n_∞ *Teiler von* μ *ist.* Man findet so nur zwei Möglichkeiten:

$$p = 0, \quad \mu = 2, \quad \text{Schema: } \{2, 1, 2\},$$
$$p = 0, \quad \mu = 3, \quad \ldots\ldots \{1, 3, 3\},$$

denen, wie wir beiläufig anführen, in der That zwei ausgezeichnete Unter-

gruppen Γ_2 und Γ_3 entsprechen*). *Alle übrigen ausgezeichneten Untergruppen* Γ_μ *besitzen das Verzweigungsschema* $\{2, 3, n\}$ *und genügen also der diophantischen Gleichung*:

$$12np + \mu(6 - n) = 12n, \tag{4}$$

in der wir fortan den Index bei n_∞ unterdrücken.

Discutieren wir (4) sogleich für die niedersten Werte von p, wobei wir vorgreifend immer sogleich anzeigen, für welche der entspringenden Lösungen Untergruppen späterhin wirklich auftreten werden.

Erstlich haben wir für $p = 0$, da n in diesem Falle ersichtlich < 6 sein muss, *folgende vier Möglichkeiten*:

$$\begin{aligned} &\mu = 6 \ , \quad \text{Schema: } \{2, 3, 2\}, \\ &\mu = 12, \quad \ldots\ldots \{2, 3, 3\}, \\ &\mu = 24, \quad \ldots\ldots \{2, 3, 4\}, \\ &\mu = 60, \quad \ldots\ldots \{2, 3, 5\}, \end{aligned} \tag{5}$$

in denen uns wohlbekannte Zahlen entgegentreten, und deren jeder wir im folgenden Kapitel je eine entsprechende Untergruppe Γ_μ zuordnen werden.

Wir setzen ferner $p = 1$ und finden $n = 6$, *so dass die ausgezeichneten Untergruppen* Γ_μ *des Geschlechtes* $p = 1$ *diejenigen vom Schema* $\{2, 3, 6\}$ *sind*; μ bleibt zunächst unbestimmt, und dem entspricht der Umstand, *dass es in der Modulgruppe ausgezeichnete Untergruppen mit* $p = 1$ *in unendlicher Zahl giebt.*

Für alle Geschlechter $p > 1$ schreiben wir (4) in der Form:

$$\mu = n \cdot \frac{12(p-1)}{n-6}, \tag{6}$$

wo nun $12(p-1)$ durch $(n-6)$ teilbar sein muss, da n Teiler von μ ist. *Bei gegebenem* p *giebt es hier also nur eine begrenzte Zahl von Lösungen* μ, n. Für die niedersten Werte von p und n stellen wir hier einige Lösungen tabellarisch zusammen:

(7)

p	n	μ
2	7	84
2	8	48
2	9	36
3	7	168
3	8	96

*) Die Γ_2 ist diejenige Untergruppe, welche wir unter dieser Bezeichnung bereits in § 8 des vorigen Kapitels (p. 288) kennen lernten.

Für die zweite, vierte und fünfte dieser Lösungen werden wir späterhin in der That ausgezeichnete Untergruppen Γ_{48}, Γ_{168}, Γ_{96} kennen lernen.

Diese letzten Erörterungen sind hier selbstverständlich nur ganz vorläufige; denn sie ergeben uns nur die Möglichkeit der Existenz gewisser ausgezeichneter Untergruppen, nicht schon diese selbst. Um so mehr haben wir aber nun Veranlassung, nach Mitteln zu suchen, welche uns die thatsächlich existierenden Untergruppen der Modulgruppe kennen lehren.

Sechstes Kapitel.

Definition sämtlicher Untergruppen der Modulgruppe durch die Flächen F_μ.

Im vorigen Kapitel dachten wir uns eine beliebige Untergruppe der Modulgruppe Γ als gegeben und haben an ihr in abstracter Weise eine Reihe von Begriffsbestimmungen eingeübt. Nun ist es an uns, die Frage nach den wirklich existierenden Untergruppen von Γ aufzuwerfen und uns also nach Mitteln umzusehen, vermöge deren wir diese Untergruppen zu definieren im Stande sind. Wir werden in diesem Sinne zuvörderst eine allgemeine Massnahme zur Bestimmung sämtlicher Untergruppen der Modulgruppe zu entwickeln haben. Darüber hinaus aber werden wir im gegenwärtigen und den nächst folgenden Kapiteln einen Teil der Untergruppen von Γ wirklich bis ins einzelne kennen lernen, wobei uns dann diese besonderen Untergruppen die allgemeinen Erörterungen des vorigen Kapitels in schönster Weise veranschaulichen werden.

§ 1. Methode, durch Fundamentalpolygone oder Flächen F_μ Untergruppen zu definieren: Der Verzweigungssatz.

Im vorigen Kapitel haben wir einer vorgelegten Untergruppe Γ_μ von endlichem Index μ (denn auch hier schieben wir die Betrachtung des Falles $\mu = \infty$ noch hinaus) ein Fundamentalpolygon F_μ zugeordnet und dieses zur geschlossenen Fläche F_μ zusammengebogen. Die Eigenart von F_μ in der einen oder anderen Gestalt müssen wir uns hier noch einmal deutlich vergegenwärtigen, und wir knüpfen etwa sogleich an das Netz der 2μ abwechselnd schraffierten und freien Elementardreiecke an, welches die geschlossene Fläche F_μ umspannt. Diese Dreiecke schaarten sich in charakteristischer Weise um ihre Eckpunkte, welche letztere in drei Kategorien zerfielen, je nachdem sie in der ω-Halbebene mit $\omega = i$, ϱ oder $i\infty$ äquivalent waren. Da wir diese Eckpunkte der Dreiecke auf F_μ hinfort sehr häufig zu nennen haben werden, so wollen wir die mit i äquivalenten kurz durch $a_1, a_2, a_3, \cdots$ bezeichnen und zusammenfassend als die Punkte a von F_μ benennen; entsprechend heissen die mit ϱ äquivalenten Eck-

punkte kurz die Punkte b und endlich die mit $i\infty$ äquivalenten die Punkte c von F_μ, wobei wir in beiden Fällen zur Unterscheidung verschiedener Punkte derselben Kategorie wieder untere Indices bei b oder c zur Verwendung bringen. Nun sprach sich die Eigenart unseres Dreiecksnetzes vor allem in folgenden Lagenbeziehungen aus: *Ein einzelner Punkt a unserer Fläche war entweder von zwei oder vier neben einander liegenden Elementardreiecken*) umlagert; ein einzelner Punkt b war desgleichen von zwei oder sechs, ein einzelner Punkt c endlich von irgend einer geraden Anzahl neben einander liegender Elementardreiecke umlagert.*

Man beachte jetzt, dass umgekehrt durch Angabe des Fundamentalpolygons F_μ unsere vorliegende Untergruppe Γ_μ hätte definiert werden können; denn die auf einander bezogenen Randcurven dieses Polygons bestimmen ein System von erzeugenden Substitutionen von Γ_μ und damit diese Untergruppe selbst. Ebenso gut könnten wir aber auch Γ_μ durch die geschlossene Fläche F_μ definiert denken, wenn nur dabei noch festgestellt ist, welches Doppeldreieck der Fläche dem Ausgangsdreieck 1 der ω-Halbebene zugeordnet ist. Aufs leichteste werden wir nämlich die Fläche rückwärts in der ω-Halbebene ausbreiten, indem wir zuvörderst das eben gemeinte Doppeldreieck aus der Fläche ausschneiden und über dem Doppeldreieck 1 der Halbebene ausbreiten, sowie dann weiter Elementardreieck für Elementardreieck von der Fläche abtragen und in der ω-Halbebene an richtiger Stelle anlagern. Wir werden diese Massnahme noch in mannigfaltigster Weise ausführen können; es ist aber nach den Überlegungen in § 9 des vorigen Kapitels (p. 328 u. f.) sofort deutlich, dass hierdurch die zugehörige Untergruppe Γ_μ keinerlei Änderung erfährt. In der That lassen sich alle Polygone der ω-Halbebene, welche wir durch verschiedenartige Abtragung der Elementardreiecke erhalten mögen, aus einem unter ihnen z. B. dem ursprünglichen Polygon F_μ durch *erlaubte Abänderung* herstellen.

Hätten wir übrigens nicht wie soeben das Doppeldreieck 1 der Fläche, sondern vielmehr ein anderes, etwa V_k, dem Ausgangsdreieck 1 der Halbebene zugeordnet und dann auf Grund dieser Zuordnung die Fläche in der Halbebene ausgebreitet, so würden wir ersichtlich ein Polygon F_μ' erhalten haben, welches aus obigem F_μ vermöge der Substitution V_k^{-1} hergestellt wird. Dieses Polygon F_μ' ist aber zufolge § 5 des

*) Es ist ein nicht völlig strenger Ausdruck, wenn wir sagen, dass gegebenen Falls zwei „Dreiecke" einen Punkt a umlagern. Indessen werden wir ihn doch beibehalten und also einen solchen Punkt a als Eckpunkt zweier Dreiecke ansehen, die dort einen Winkel von 180° haben.

vorigen Kapitels (p. 318) dasjenige der mit Γ_μ gleichberechtigten Untergruppe $\Gamma'_\mu = V_k^{-1}\Gamma_\mu V_k$, und also haben wir den Satz: *Durch die geschlossene Fläche F_μ ist die vorgelegte Untergruppe Γ_μ oder eine mit ihr gleichberechtigte definiert, je nachdem wir das Doppeldreieck* 1 *der Fläche oder ein anderes dem Doppeldreieck* 1 *der Halbebene zuordnen.*

Diese Überlegungen führen uns nun mühelos zu dem Hauptsatze hin, um welchen es uns hier zu thun ist. Es möge jetzt nämlich irgend eine völlig beliebige geschlossene Fläche gegeben sein, umspannt von einem Netze von 2μ Dreiecken, welche diejenigen charakteristischen Lagerungsverhältnisse darbieten, die wir vorhin als bei den Flächen F_μ vorhanden erkannten: *Immer definiert uns dann im Sinne unserer vorhergehenden Überlegung diese unabhängig gegebene geschlossene Fläche vermöge ihrer Dreiecksteilung ein System gleichberechtigter Untergruppen der Modulgruppe vom Index μ, unter denen wir dadurch eine einzelne charakterisieren, dass wir ein bestimmtes Doppeldreieck der Fläche dem Doppeldreieck* 1 *der Halbebene zuordnen.* Wir benennen den so aufgestellten Hauptsatz fortan als „Verzweigungssatz", wobei wir die volle Bedeutung dieser Benennung erst später aufweisen werden*). Die unabhängig gegebene Fläche heisse sogleich F_μ; die Eckpunkte ihrer Teilung wird man im Einzelfalle leicht in die drei Kategorien sondern und dann in obiger Weise wieder als Punkte a, b, c bezeichnen; endlich denken wir uns auch sogleich die Elementardreiecke der Fläche in richtiger Folge abwechselnd schraffiert und frei gelassen, wodurch wir nun unsere Fläche F_μ in zweckmässiger Art zum Beweise des Verzweigungssatzes vorgerichtet haben.

§ 2. Herstellung einer Beziehung zwischen der geteilten Fläche F_μ und der ω-Halbebene.

Bevor wir zum eigentlichen Nachweise des Verzweigungssatzes übergehen, soll durch ein schon öfter angewandtes Verfahren eine bestimmte Beziehung zwischen der gegebenen Fläche F_μ und der ω-Halbebene hergestellt werden. Wir ordnen zuvörderst irgend ein schraffiertes Dreieck der auf F_μ gelegenen Teilung dem schraffierten Ausgangsdreieck der ω-Halbebene zu, wobei die Ecken a, b, c des ersteren Dreiecks den Punkten $\omega = i$, ϱ, $i\infty$ bez. zuzuweisen sind, und auch die sonstigen Punkte der beiderseitigen Dreiecke einander nach irgend einem stetigen Gesetze wechselweise eindeutig entsprechen mögen. Darüber hinaus sollen ferner in analoger Weise benachbarten Dreiecken auf F_μ stets im gleichen Sinne benachbarte Dreiecke der

*) Cf. Math. Ann. Bd. 14, p. 128 (Note).

Modulteilung entsprechen und umgekehrt; finden sich dabei zwei verschiedene Moduldreiecke als dem nämlichen Dreiecke der Fläche F_μ entsprechend, so ordnen wir die inneren Punkte wieder derart einander zu, dass äquivalente Punkte der beiden Moduldreiecke demselben Punkte der Fläche entsprechen. Da sowohl die Fläche, wie die Halbebene „zusammenhängende" Dreiecksnetze tragen, so werden wir solcherart jedem Dreieck von F_μ wenigstens ein Moduldreieck, jedem Moduldreiecke aber umgekehrt wenigstens ein Dreieck der Fläche zugewiesen finden.

Seien jetzt ω und p irgend zwei einander entsprechende Punkte der Halbebene und Fläche, so wollen wir genauer nachsehen, in welcher Art die Umgebungen unserer beiden Punkte auf einander bezogen sind. Wir werden das in der Weise thun, dass wir den einen Punkt auf kleiner kreisförmiger Bahn umschreiten und zusehen, wie der entsprechende Umgang um den anderen Punkt ausfällt. Sind unsere beiden Punkte ω, p nicht gerade Ecken der bezüglichen Teilungen, so ist die Sache sehr einfach, *es zieht dann einmalige Umkreisung von ω einmalige von p nach sich und umgekehrt.* Das Gleiche gilt auch, wenn p ein Punkt a oder b ist, wofern nur die Zahl der p umgebenden Dreiecke dieselbe ist, also 4 oder 6, wie die Zahl der den zugeordneten Punkt ω umgebenden. Dagegen ändert sich die Sachlage in diesem Falle, wenn p, was ja auch vorkommen kann, von nur zwei Dreiecken umgeben ist: *Alsdann hat einmalige Umkreisung von ω, je nachdem wir in p einen Punkt a oder b haben, zwei- bez. dreimalige Umkreisung von p zur Folge.* Eine besondere Rolle spielen endlich die Punkte c in diesem Betracht. Ist p ein solcher, so ist der zugeordnete Punkt ω (um nicht gerade von dem besonderen Werte $\omega = i\infty$ zu sprechen) ein rationaler reeller Punkt $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$. Die $2n$ um p im Cyclus zusammenhängenden Elementardreiecke sind alsdann den Dreiecken des Bereiches $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ zugewiesen*), welcher nun die Rolle der Umgebung von $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ spielt. Indem wir auf den Wegen zu den Punkten c bez. $\frac{\alpha}{\gamma}$ eines der $2n$ Dreiecke um c einem bestimmten Dreieck von $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ zugewiesen fanden, *erscheint jetzt die Umgebung von c auf $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ ein-∞-deutig bezogen.* Jedem Dreieck von $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ finden wir nämlich offenbar *ein* Dreieck aus der Umgebung von c zugeordnet; einem der letzteren aber unendlich viele von $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$,

*) Hier ist die Bezeichnungsweise aus II, 2 § 11, p. 235 wieder aufgenommen

welche immer in Intervallen von $2n$ Elementardreiecken im Dreiecksfächer $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ auf einander folgen.

Möge nun wieder ein beliebiger Punkt ω im „Innern" der Halbebene angenommen sein, während p ein ihm entsprechender Punkt von F_μ ist. Von ω aus wollen wir einen kleinen sich nicht selbst überkreuzenden geschlossenen Weg bis ω zurückzeichnen, der vielleicht in einem einzigen Moduldreieck verläuft, vielleicht auch in benachbarte Dreiecke übertritt und möglicher Weise auch einen mit ρ oder i äquivalenten Punkt umgeht. Dabei denken wir uns diesen Weg in der Richtung durchlaufen, dass er den kleinen von ihm eingeschlossenen Bereich im *positiven* Sinne umgeht. Wir betrachten den entsprechenden Weg, den der zugehörige Punkt auf F_μ beschreibt. Offenbar wird derselbe zufolge der Überlegungen, die wir gerade durchführten, ebenfalls geschlossen sein und also zu p zurückführen, mag er dabei vorkommenden Falls einen einzelnen Punkt a oder b der Fläche F_μ mehrfach umkreisen oder nicht. Auf unseren beiden geschlossenen Bahnen mögen nun ω' und p' irgend zwei einander entsprechende Punkte sein. Da machen wir jetzt ω' zum Ausgangspunkt einer ähnlichen geschlossenen Bahn, wobei wir anfangs eine kleine Strecke des schon gezogenen Weges entgegen der damaligen Fortschreitungsrichtung durchlaufen, im übrigen aber bis zum Endpunkt ω' hin jene erstere Bahn nicht weiter treffen wollen. Die neue Bahn schliesst in der ω-Halbebene einen kleinen Bereich ein, welcher sich längs der nun doppelt durchlaufenen Strecke an den schon eingegrenzten ersten Bereich anlegt. Entsprechend werden wir auf F_μ von p' aus anfangs eine Strecke lang die schon gezogene Linie im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, hernach aber abbiegen, um auf geschlossenem Wege nach p' zurück zu gelangen. Indem wir nunmehr in der Halbebene von jenem Punkte ω aus unter Beibehaltung der bisherigen Bewegungsrichtung in ununterbrochenem Zuge die beiden geschlossenen Wege durchlaufen, können wir die doppelt beschriebene Strecke offenbar sparen und gewinnen einen grösseren von ω entspringenden geschlossenen Weg. Wir haben dann offenbar demselben entsprechend auf F_μ einen von p entspringenden und gleichfalls *geschlossenen* Weg. Da aber die ω-Halbebene einen „einfach" zusammenhängenden Bereich darstellt, so kann man durch Fortsetzung des eingeschlagenen Verfahrens überhaupt zu *jedem* von ω entspringenden geschlossenen Wege der Halbebene gelangen. Wir gewinnen also den wichtigen Satz: *Bei der vorliegenden Beziehung zwischen Fläche F_μ und ω-Halbebene ist jeder, einem geschlossenen Wege der Halbebene entsprechende Weg der*

Fläche F_μ gleichfalls geschlossen. Setzen wir dabei noch ausdrücklich hinzu, dass der geschlossene Weg der Halbebene auch beliebig sich selbst überkreuzen darf. Immer lässt er sich nämlich in einem solchen Falle aus mehreren sich nicht überkreuzenden geschlossenen Wegen zusammensetzen, und wenn für diese einzeln der ausgesprochene Satz gilt, so gilt er offenbar auch für den ganzen Weg, den sie zusammensetzen.

Wir ziehen nun sogleich eine wichtige Folgerung aus diesem Resultate. Mögen wir auf Grund der zu Beginn des Paragraphen geschehenen Festsetzung einem beliebig herausgegriffenen Moduldreieck ein bestimmtes Dreieck auf F_μ zugeordnet finden. Wie wir dann auch weiter vermöge des verabredeten Continuitätsgesetzes den sich anschliessenden Moduldreiecken Dreiecke von F_μ zuweisen, kommen wir auf irgend einem geschlossenen Wege in der ω-Halbebene noch einmal zum eben gemeinten Moduldreieck zurück, so finden wir ihm wieder jenes nämliche Dreieck auf F_μ zugeordnet; denn wir haben dann auf F_μ notwendig auch einen geschlossenen Weg beschrieben. Wir haben so den Satz bewiesen, der die Grundlage aller folgenden Entwicklungen ist: *Bei der vorliegenden Beziehung zwischen der Fläche F_μ und der ω-Halbebene ist einem Dreieck der letzteren jederzeit nur ein einziges Dreieck der Fläche F_μ zugeordnet.*

Dass umgekehrt einem Dreieck von F_μ unendlich viele Moduldreiecke entsprechen, und dass also einem geschlossenen Wege auf der Fläche keineswegs stets geschlossene Wege der Halbebene entsprechen, brauchen wir nicht erst zu beweisen.

§ 3. Ausbreitung der Fläche F_μ in die ω-Halbebene. Beweis des Verzweigungssatzes. Nächste Anwendungen.

Mit Hilfe der so gewonnenen Einsicht ist es nun sehr leicht, den in § 1 aufgestellten Verzweigungssatz zu verificieren. Zu dem Ende wollen wir jetzt die Fläche F_μ auf folgende Weise in der ω-Halbebene ausbreiten. Das schraffierte Elementardreieck von F_μ, welches wir dem schraffierten Ausgangsdreieck der Modulteilung zuordneten, schneiden wir aus der Fläche heraus und breiten es über dieses letztere Dreieck aus. Dann tragen wir ein weiteres an der entstandenen Öffnung der Fläche gelegenes Dreieck ab und lagern es dem schon übertragenen Dreieck in der ω-Halbebene an. Wir fahren so fort, bis alle 2μ Dreiecke der Fläche übertragen sind. Keine zwei verschiedene Dreiecke von F_μ können dabei auf das nämliche Moduldreieck ausgebreitet sein, denn sonst wäre letzteres bei der im vorigen Paragraphen untersuchten Beziehung von Fläche auf Halbebene zwei Dreiecken von F_μ

zugeordnet. *Wir gewinnen sonach in der Halbebene einen zusammenhängenden Complex von 2μ neben einander liegenden Elementardreiecken*, der übrigens noch in sehr verschiedener Gestalt auftreten kann, je nach der Reihenfolge, in der wir die Dreiecke von F_μ abtrugen. Benennen wir unseren Dreieckscomplex als *Polygon* F_μ.

Das Polygon F_μ wird eine Anzahl freier Randcurven haben, die zu Paaren auf einander bezogen sind; in der That werden wir immer solche zwei Randcurven desselben einander zuordnen, deren Bilder auf F_μ coincidieren. Denken wir uns die betreffenden, die Randcurven des Polygons liefernden Linienzüge der Teilung von F_μ stärker markiert oder geradezu F_μ längs dieser Linienzüge zerschnitten. Irgend einem Moduldreieck, welches hart am Rande, aber ausserhalb des Polygons F_μ liegt, entspricht jetzt im Sinne des vorigen Paragraphen ersichtlich ein Dreieck der Fläche, das an einem gewissen der eben ausgeführten Schnitte der Fläche gelegen ist, und dieses wieder ging bei der nun geschehenen Ausbreitung der Fläche in der Halbebene auf ein gewisses hart am Rande, aber innerhalb des Polygons gelegenes Dreieck über. Die Modulsubstitution erster Art, welche das erste dieser Dreiecke in das dritte überführt, ist offenbar gerade diejenige, welche die eine hier in Betracht kommende Randcurve des Polygons F_μ in die andere transformiert. Wir stellen uns jetzt auf solche Weise das ganze System der Modulsubstitutionen erster Art auf, welche die Correspondenz zwischen den Randcurven des Polygons F_μ zum Ausdruck bringen. Seien diese Modulsubstitutionen erster Art durch

$$(1) \qquad v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}, v_m$$

bezeichnet.

Gehe jetzt ein beliebiger Punkt ω durch Anwendung einer dieser Operationen v_k in $\omega' = v_k(\omega)$ über, so denken wir uns ω mit ω' durch eine in der ω-Halbebene verlaufende Bahn verbunden. *Diese Bahn wird sich dann stets auf eine geschlossene Linie der Fläche übertragen.* Denn wie wir gerade bei der Einführung von v_k sahen, sind gewisse zwei Moduldreiecke V und $V' = v_k V$ auf dasselbe Doppeldreieck der Fläche F_μ bezogen. Bei der Art unserer Zuordnung der Fläche F_μ und der ω-Halbebene entspricht dann sofort auch den beiden Doppeldreiecken $V'S$ und VS das nämliche Doppeldreieck der Fläche F_μ, wie denn auch $V'T$ und VT einem und demselben Doppeldreieck der Fläche zugeordnet sind. In sehr bekannter Weise schliessen wir hieraus, dass überhaupt je zwei Punkten ω und $\omega' = v_k(\omega)$ der Halbebene ein und derselbe Punkt der Fläche F_μ zugewiesen ist.

Wollen wir nunmehr noch durch erlaubte Abänderung, die wir offenbar mit unserem Polygon F_μ gerade so gut vornehmen können,

wie früher mit den Fundamentalpolygonen der Untergruppen, das Polygon F_μ derart umgestalten, dass sich die 2μ Elementardreiecke zu μ Doppeldreiecken der Modulteilung zusammenordnen*). Diese letzteren mögen die Doppeldreiecke 1, V_1, V_2, $\cdots$, $V_{\mu-1}$ der Modulteilung sein, Benennungen, die wir sofort auch auf die Doppeldreiecke der Fläche F_μ übertragen denken.

Jetzt erzeugen wir durch Combination und Wiederholung der Substitutionen (1) eine Gruppe Γ', welche als Untergruppe in der Modulgruppe Γ enthalten ist (vielleicht auch, was wir einstweilen noch als Möglichkeit zulassen müssen, mit dieser Gruppe Γ selbst zusammenfällt). Seien die neu hinzukommenden Substitutionen von Γ' (indem wir auch die Identität in dieselben mit aufnehmen) durch 1, v_{m+1}, v_{m+2}, $\cdots$ bezeichnet. Da *jede* Randcurve des Polygons F_μ auf eine andere bezogen wurde (vermöge einer Substitution (1)), so ergiebt die unveränderte Wiederholung der p. 312 vorgenommenen Überlegung, dass zu *jedem* Punkte ω' der Halbebene wenigstens *ein* bezüglich Γ' äquivalenter Punkt ω im Polygon F_μ nachgewiesen werden kann. Liege jetzt ω' im Doppeldreieck V der Halbebene, während der relativ äquivalente Punkt ω dem innerhalb F_μ gelegenen Doppeldreieck V_k angehöre. Es giebt alsdann für V eine Darstellung:

$$V = v_i V_k, \tag{2}$$

da doch gerade ω' und ω bezüglich Γ' äquivalent sein sollten. Aber eine Bahn von ω nach ω' zieht sich auf der Fläche F_μ, weil einer Operation v entsprechend, auf einen geschlossenen Weg zusammen. V_k ist also dasjenige wohlbestimmte Doppeldreieck von F_μ, welches wir im vorigen Paragraphen eindeutig dem Moduldreieck V zugeordnet fanden. In (2) erscheint so mit gegebenem V auch V_k und demnach auch Substitution $v_i = V V_k^{-1}$ eindeutig bestimmt. Man hat so den wichtigen Satz: *Jede Modulsubstitution erster Art gestattet auf eine einzige Weise eine Darstellung* (2).

Denken wir uns jetzt aus unseren hier in Rede stehenden Modulsubstitutionen v_i, V_k ein Schema construiert, welches der äusseren Form nach mit dem Schema (1), p. 309, übereinstimmt, so ist in demselben dem Gesagten zufolge *jede* Modulsubstitution erster Art aufgeführt und jede nur *einmal*, wobei die Substitutionen der Gruppe Γ' in der ersten Horizontalreihe angeordnet sind. Diese drei Eigenschaften des aufgebauten Schema genügen, um in ihm das zur Untergruppe Γ' im Sinne von § 1 des vorigen Kapitels (p. 308) gehörige Schema zu erkennen. So

*) Wir denken also hier mit F_μ diejenige Umgestaltung vorgenommen, der p. 281 das dort untersuchte Polygon F_6 unterworfen wurde.

haben wir das Resultat: Γ' *ist keineswegs mit der Gesamtgruppe* Γ *identisch, sondern eine Untergruppe* Γ_μ *derselben vom Index* μ. *Wir erkennen in* $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu-1}$ *ein Repräsentantensystem derselben, im Polygon* F_μ *einen Fundamentalbereich, in den Substitutionen* $v_1, v_2, \cdots$, *welche die Kanten des Fundamentalbereichs paarweise zusammenordnen, ein System erzeugender Substitutionen und endlich in der Fläche* F_μ *die* Γ_μ *im Sinne von* § 9 *des vorigen Kapitels zugehörige geschlossene Fläche.* Damit aber haben wir den vollen Beweis des Verzweigungssatzes geführt. Dass wir nun die sämtlichen Entwicklungen des vorigen Kapitels umkehren können, dass wir insbesondere durch eine regulär geteilte Fläche F_μ eine ausgezeichnete Untergruppe Γ_μ definieren u. s. w., sind Folgerungen, die sich jetzt nach § 1, p. 344 u. f., von selbst verstehen. Vor allem aber ist wesentlich, dass wir auch noch der einfachen und lückenlosen Bedeckung der ω-Halbebene mit unendlich vielen Bereichen F_μ, $F_\mu^{(1)}$, $F_\mu^{(2)}$, $\cdots$ gedenken, die wir nach § 3 des vorigen Kapitels (p. 314) den Operationen $1, v_1, v_2, \cdots$ unserer gewonnenen Untergruppe Γ_μ zuordnen. Da haben wir denn für die im vorigen Paragraphen gegebene 1-∞-deutige Beziehung der „Fläche" F_μ auf die ω-Halbebene die bequemste Anschauung gewonnen, indem in der That die Bereiche F_μ, $F_\mu^{(1)}$, $\cdots$ alle die unendlich vielen Bilder der Fläche in der ω-Halbebene darstellen.

Im Verzweigungssatz besitzen wir hiernach ein völlig allgemeines Mittel, die Untergruppen der Modulgruppe zu definieren; wir können solchergestalt geradezu zu deren Gesamtheit gelangen. Alle Untergruppen z. B. eines gegebenen endlichen Index μ aufzustellen, bietet sich nun als eine durchführbare Aufgabe dar. Wir würden übrigens bei ihrer Erledigung statt mit den geschlossenen Flächen sogleich zweckmässiger mit den Polygonen F_μ arbeiten. Alle möglichen Complexe zu μ Doppeldreiecken würden wir uns zunächst bilden, die man etwa vom Ausgangsdreieck 1 aus aufbauen kann. Für den einzelnen Complex würden wir dann eine Zuordnung der Randcurven festzustellen haben, die der einzigen Bedingung genügt, dass beim Fortgang zur bezüglichen geschlossenen Fläche F_μ die Anordnung der Dreiecke auf der letzteren den Vorbedingungen des Verzweigungssatzes genügt. Diese Zuordnung der Randcurven mag für den einzelnen Dreiecks-complex noch in mannigfaltigster Weise herstellbar sein. Jedes solchergestalt fertig hergestellte Polygon F_μ definiert dann eine Untergruppe Γ_μ, wobei aber alle durch erlaubte Abänderung aus einander entspringenden Polygone die nämliche Γ_μ definieren. Man wird auf Grund des eben durchlaufenen Gedankenganges leicht erkennen, *dass es nur eine endliche Anzahl von Untergruppen* Γ_μ *des endlichen Index* μ

giebt; aber es gehört nur ein geringes Mass praktischer Handhabung der Modulteilung dazu, um einzusehen, dass bei nicht ganz niederen Zahlwerten von μ die Anzahl der bezüglichen Γ_μ alsbald eine ausserordentlich beträchtliche wird.

§ 4. Die Kugelnetze der regulären Körper und die ausgezeichneten Untergruppen der Modulgruppe Γ vom Geschlechte $p = 0$.

Von der directen nun gewonnenen Methode zur Aufstellung von Untergruppen von Γ wollen wir jetzt diejenige Verwendung machen, die im Anschlusse an unsere früheren Betrachtungen besonders nahe liegt. Wir betrachten die in der Theorie der regulären Körper auftretenden *regulär-symmetrischen Dreiecksteilungen der Kugeloberfläche.* Unter denselben erfüllen offenbar diejenigen des Dieders mit $n = 3$ (Fig. 13, p. 72), des Tetraeders (Fig. 29, p. 104), des Oktaeders (Fig. 15, p. 76) und des Ikosaeders (Fig. 31, p. 106) die Vorbedingungen des Verzweigungssatzes. *Jene Teilungen der Kugel definieren uns also vier in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ ausgezeichnete Untergruppen Γ_6, Γ_{12}, Γ_{24} und Γ_{60} der Modulgruppe Γ. Das Geschlecht dieser vier Untergruppen ist $p = 0$, und ihre bezüglichen Verzweigungsschemata findet man bereits in der Tabelle* (5) p. 342 *vor. Die unseren Gruppen entsprechenden endlichen Gruppen G_6, G_{12}, G_{24}, G_{60} sind holoedrisch isomorph mit den Gruppen der Drehungen der bezüglichen regulären Körper in sich**). Es entspringt also die Möglichkeit, diese vier Gruppen einzeln auf die Modulgruppe in bekannter Weise isomorph zu beziehen, wie denn auch das gleiche Verhältnis zwischen den zu jenen vier regulären Körpern gehörigen durch Spiegelungen erweiterten Gruppen einerseits und der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ andrerseits besteht. Setzen wir noch hinzu, *dass ausser jenen vier Untergruppen Γ_μ nicht noch andere vom Geschlecht $p = 0$ in der Modulgruppe Γ ausgezeichnet enthalten sind* (so dass also jeder Nummer des p. 342 mitgeteilten Schemas immer nur *eine* Untergruppe entspricht). Wir werden diesen auf § 12 des vorigen Kapitels beruhenden Satz im folgenden Abschnitt noch weiter besprechen**).

Vor allem wird man nun auch die Fundamentalpolygone für unsere jetzt gefundenen Gruppen, in möglichst zweckmässiger Gestalt fixiert, vor sich sehen wollen. Da die Γ_6, wie wir bereits andeuteten, durch

---

*) Die hier auftretende Γ_6 ist mit der im vorletzten Kapitel untersuchten Untergruppe Γ_6 identisch.

**) Man sehe die Erörterungen über Galois'sche Hauptmoduln im nächsten Abschnitt und ziehe daneben die Entwicklungen „Ikos." p. 117 u. f. heran. Vergl. übrigens auch die bezüglichen Entwicklungen in Bd. 14 der Math. Ann. p. 149 u. f.

das vorletzte Kapitel erledigt ist, so gehen wir sogleich zur Γ_{12} und haben in Fig. 80 die bereits oben in Fig. 28, p. 104, mitgeteilte tetraedrische Teilung der Ebene in etwas geänderter Lage reproduciert. Diejenigen Dreiecksseiten, welche beim Fortgang zum Polygon F_{12} Randcurven desselben geben sollen, haben wir stärker ausgezogen. Ordnet man alsdann etwa das links oberhalb in Fig. 80 sich nach dem unendlich fernen Punkte der zu Grunde liegenden complexen Ebene hinziehende schraffierte Tetraederdreieck dem Ausgangsdreieck der Modulteilung zu, so biegt sich die tetraedrisch geteilte Kugel (oder Ebene) F_{12} auf das in Fig. 81 gegebene Fundamentalpolygon F_{12} der Γ_{12} zurück. Von der Zusammengehörigkeit der Randcurven dieses Polygons ist sogleich in der Figur Vermerk genommen. Auf Grund dieser Angaben berechnen sich

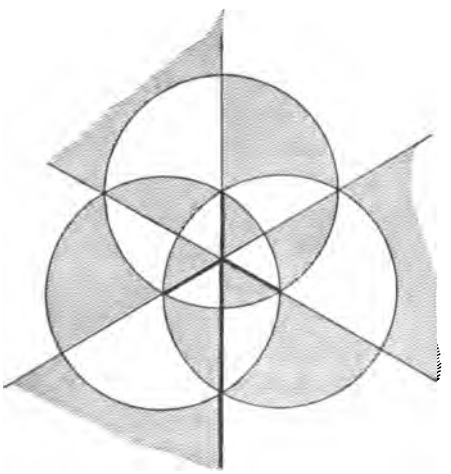


Fig. 80.

als erzeugende Substitutionen der ausgezeichneten Untergruppe Γ_{12}:

$$(1)\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -3, & 1 \end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix} -2, & 3 \\ -3, & 4 \end{pmatrix},\quad v_4 = \begin{pmatrix} 4, & 3 \\ -3, & -2 \end{pmatrix},$$

von denen wir dann auch an Ort und Stelle in der Figur 81 Vermerk genommen haben.

Etwas kürzer werden wir die beiden zurückbleibenden Gruppen Γ_{24} und Γ_{60} behandeln, da wir hier offenbar die Oktaeder- bez. Ikosaederteilung einer ganz analogen Deformation zu unterwerfen haben, wie soeben die Tetraederteilung. Für die Γ_{24} findet sich so als möglichst übersichtlich gestaltetes Fundamentalpolygon F_{24} das in Fig. 82 dargestellte. Aus der bereits in der Figur angedeuteten Zusammengehörigkeit der Randcurven von F_{24} finden sich dabei folgende Substitutionen als *Erzeugende der Untergruppe* Γ_{24}:

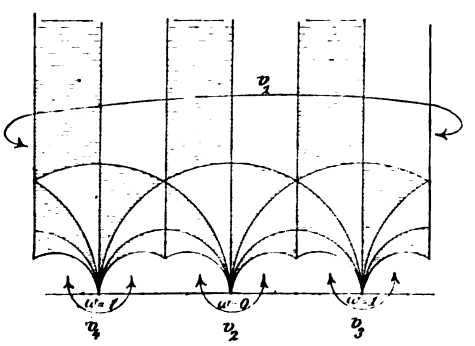


Fig. 81.

(2) $v_1=\begin{pmatrix}1,4\\0,1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1,0\\-4,1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}-3,4\\-4,5\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}-7,16\\-4,9\end{pmatrix}$, $v_5=\begin{pmatrix}-11,36\\-4,13\end{pmatrix}$.

Die beiden hiermit gefundenen Polygone F_{12} und F_{24} können wir aus sechs bez. acht abwechselnd symmetrischen und congruenten

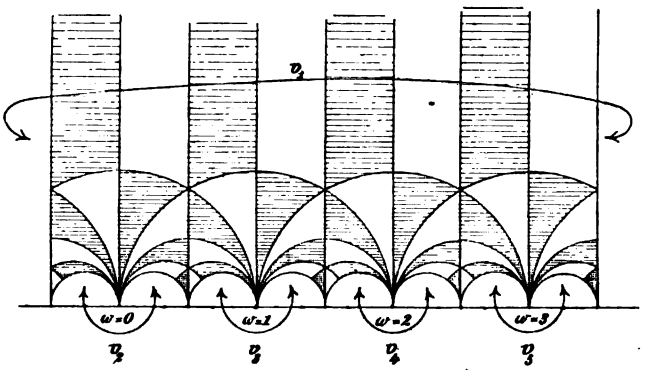


Fig. 82.

Streifen aufbauen, deren einzelner zwischen zwei auf einander folgenden Geraden der Modulteilung eingelagert erscheint. Entsprechend findet man, dass sich das aus dem Ikosaeder entspringende Polygon

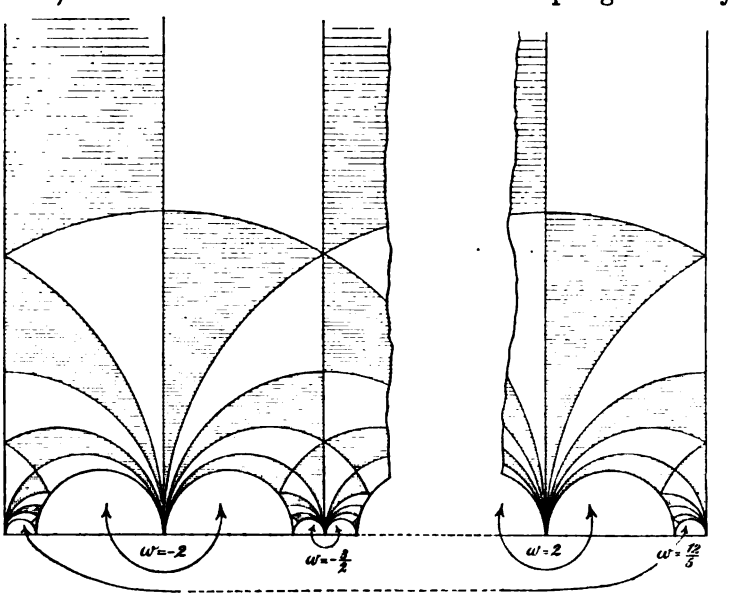


Fig. 83.

F_{60} der Untergruppe Γ_{60} aus zehn an einander gereihten, abwechselnd symmetrischen und congruenten Streifen aufbaut. Es wird demnach genügen, wenn wir dieses Polygon F_{60} der Raumersparnis wegen nur

teilweise aufzeichnen, was in Fig. 83 geschehen ist. Durch Heranziehung der oben in Fig. 30, p. 105, mitgeteilten Ikosaederteilung bestimmt man mühelos, in welcher Folge die Randcurven von F_{60} auf einander bezogen sind, und findet daraus endlich als *System der Erzeugenden für die Untergruppe* Γ_{60}:

$$v_1=\begin{pmatrix}1,5\\0,1\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1,0\\-5,1\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}-4,5\\-5,6\end{pmatrix},\quad v_4=\begin{pmatrix}6,&5\\-5,&-4\end{pmatrix},$$

$$(3)\quad v_5=\begin{pmatrix}-9,20\\-5,11\end{pmatrix},\ v_6=\begin{pmatrix}11,&20\\-5,&-9\end{pmatrix},\ v_7=\begin{pmatrix}-9,&5\\-20,&11\end{pmatrix},\ v_8=\begin{pmatrix}11,&5\\-20,&-9\end{pmatrix},$$

$$v_9=\begin{pmatrix}-29,45\\-20,31\end{pmatrix},\quad v_{10}=\begin{pmatrix}31,&45\\-20,&-29\end{pmatrix},\quad v_{11}=\begin{pmatrix}49,120\\20,&49\end{pmatrix}.$$

§ 5. Über die den Functionen $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J\right)$ entsprechenden Untergruppen $\Gamma_{\{n\}}$.

Die Irrationalitäten der eben betrachteten regulären Körper bildeten im dritten Kapitel des ersten Abschnitts die vier ersten Glieder in der Reihe der s-Functionen $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J\right)$, $(n = 2, 3, 4, \cdots)$. Sie erschöpfen zugleich diejenigen unter diesen s-Functionen, welche im Sinne unserer früheren Erörterungen der ersten Art angehörten (cf. p. 102). Anschliessend folgte in der Reihe als fünftes Glied für $n = 6$ eine s-Function zweiter Art, während der ganze Rest für $n > 6$ der dritten Art angehörte. Greifen wir jetzt irgend eine s-Function mit $n > 6$ aus der Reihe heraus und bezeichnen ihre Dreiecksteilung kurz als „Teilung $(2, 3, n)$". Möge ausserdem um der einfachen Ausdrucksweise willen das schraffierte Ausgangsdreieck der Teilung $(2, 3, n)$ so fixiert werden, dass die beiden Schenkel desselben, welche den Winkel $\frac{\pi}{n}$ einschliessen, geradlinig werden, während der Scheitelpunkt dieses Winkels im Nullpunkt der complexen s-Ebene liegt. Für $n > 6$ sei dann immer die dritte Seite des Ausgangsdreiecks so gewählt, dass der in diesen Fällen auftretende Orthogonalkreis der Teilung $(2, 3, n)$ mit dem Einheitskreise der complexen s-Ebene zusammenfällt. Endlich sei unser Ausgangsdreieck noch so gerichtet, dass der gemeinsame Schenkel seiner Winkel $\frac{\pi}{n}$ und $\frac{\pi}{2}$ auf die negativ imaginäre s-Axe zu liegen kommt. Es sind dies lauter Bestimmungen, welche wir bereits oben, Fig. 33 (p. 109), im Falle $n = 7$ eingehalten haben.

Nun ist es sehr interessant, *dass die Anordnung der Dreiecke in der Teilung* $(2, 3, n)$ *genau den Vorbedingungen des Verzweigungssatzes genügt, und dass wir in der That diesen Satz auf unsere Teilung* $(2, 3, n)$ *gerade*

so gut anwenden können, wie auf jede Fläche F_μ mit einer endlichen Zahl von Dreiecken. Um dies des näheren zu belegen, soll das Ausgangsdreieck der Teilung (2, 3, n) dem Ausgangsdreieck der Modulteilung entsprechend gesetzt werden. Wir können dann ferner, zumal da wir hier sogar *beiderseits* mit einfach zusammenhängenden Dreiecksteilungen zu thun haben, vermöge der Vorschrift des § 2 sicher jedem Dreieck der einen Teilung wenigstens eines der anderen zugewiesen finden und denken dabei immer im Sinne der früheren Erörterungen auch die inneren Punkte solcher zwei Dreiecke einander zugeordnet. Die Punkte a und b der Teilung (2, 3, n) sind von vier bez. sechs Elementardreiecken umlagert, genau wie es in der ω-Halbebene der Fall ist. Finden wir also einmal auf Grund unserer getroffenen Vorschriften in ω und s zwei besondere einander entsprechende Punkte der beiden Teilungen, wobei wir nur die Punkte c für s und also die rationalen reellen Punkte für ω vorab ausschliessen, so zeigt sich nun sofort, *dass die Umgebungen dieser beiden Punkte wechselweise eindeutig auf einander bezogen sind.* Dabei wollen wir unter der Umgebung eines Punktes s fortan insbesondere das Innere eines Kreises um s verstehen, der bis an den nächsten Punkt c der Teilung gerade heranreicht, und denken dann die Umgebung des entsprechenden Punktes ω in solcher Weise fixiert, dass sie derjenigen von s eindeutig zugewiesen ist.

Anders ist die Sachlage, wenn der erste der beiden in Rede stehenden Punkte s, ω ein Eckpunkt c der Teilung ist, wobei dann ω ein rationaler reeller Punkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ wird. Da betrachten wir als Umgebung dieses Punktes s den Kranz von $2n$ Dreiecken, der ihn umgiebt, und finden diesen, wie schon früher (p. 347) ausführlich erörtert wurde, 1-∞-deutig auf den Bereich $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ bezogen. Findet sich in der That einmal eines jener n Doppeldreiecke am fraglichen Punkte c dem Moduldreieck V mit der Spitze $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ zugewiesen, so führt eine einmalige, etwa im positiven Sinne ausgeführte Umkreisung jenes Punktes c zum gerade gedachten Doppeldreiecke der Teilung (2, 3, n) zurück, während der entsprechende Weg im Bereiche $B\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ vom Doppeldreieck V nach dem neuen VS^n hinführt. Dieses letztere aber entsteht aus dem Doppeldreieck V einfach dadurch, dass man auf V die parabolische Modulsubstitution VS^nV^{-1} der Amplitude n anwendet. Merken wir uns also den Satz: *Ein einmaliger geschlossener Umgang um einen Punkt c der Teilung* (2, 3, n) *giebt, wie wir ihn auch in der*

ω-Halbebene übertragen finden mögen, dort einen nicht geschlossenen Weg mit einem Anfangspunkt ω und dem Endpunkt

$$\omega' = S_k^n(\omega), \tag{1}$$

wobei S_k eine gewisse parabolische Substitution der Amplitude $+1$ ist, deren Fixpunkt jenem umkreisten Punkte c zugewiesen ist.

Nun ergiebt die Erörterung des § 2 den Satz, dass jeder geschlossene Weg, den man in der ω-Halbebene ziehen kann, in der Teilung $(2, 3, n)$ immer wieder einen geschlossenen Weg giebt. Wir könnten hier sogar mit denselben Mitteln auch umgekehrt zeigen: Einem geschlossenen Wege der Teilung $(2, 3, n)$, der sich, ohne über einen Punkt c fortgezogen zu werden, auf einen Punkt zusammenziehen lässt, kann nur wieder ein „geschlossener" Weg der Halbebene ω entsprechen. Weiter folgt daraus wie oben: *Einem Moduldreieck ist immer nur ein Dreieck der Teilung $(2, 3, n)$ zugeordnet. Einem Dreiecke der letzteren entsprechen aber auch hier unendlich viele Moduldreiecke.*

Des weiteren werden wir hier, um nicht ganz den obigen Gedankengang zu reproducieren, in folgender Art die Schlussweise fortsetzen: Alle linearen Substitutionen erster Art der complexen Variabelen s, durch welche die Teilung $(2, 3, n)$ in sich selbst übergeführt wird, bilden eine Gruppe unendlich hoher Ordnung, die wir $G_{\{n\}}$ nennen wollen und deren Substitutionen wir kurz durch $1, W_1, W_2, W_3, \cdots$ bezeichnen. Nach ihnen benennen wir in gewohnter Weise die Doppeldreiecke der Teilung $(2, 3, n)$, genau so, wie wir die Dreiecke der Modulteilung durch die Modulsubstitutionen V benennen. Durch die Beziehung der beiden Teilungen auf einander wird so eine Zuordnung zwischen $G_{\{n\}}$ und der Modulgruppe Γ hergestellt, bei der jeder Modulsubstitution V eine bestimmte Operation W, umgekehrt jeder Operation W unendlich viele V zugewiesen werden. Diese Zuordnung der beiden Gruppen $G_{\{n\}}$ und Γ erkennt man dann auf Grund der Beziehung zwischen den beiden Teilungen aufs leichteste als Isomorphismus. *Demgemäss entsprechen der identischen Substitution 1 der Gruppe $G_{\{n\}}$ die Operationen $1, v_1, v_2, \cdots$ einer ausgezeichneten Untergruppe der Modulgruppe vom Index ∞, die wir durch $\Gamma_{\{n\}}$ bezeichnen wollen.*

Übertragen wir die Dreiecke von $(2, 3, n)$ nun thatsächlich in die ω-Halbebene, so werden sie dort ein Fundamentalpolygon für $\Gamma_{\{n\}}$ zusammensetzen, das wir entsprechend $F_{\{n\}}$ nennen*). Möge dabei

*) Diese Operation der Ausbreitung über der ω-Halbebene lässt sich für die Teilung $(2, 3, 6)$ noch leicht explicite durchführen; man vergleiche darüber die Abhandlung des Herausgebers, *Über die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind,* Math. Ann. Bd. 30, p. 345 (1887).

das Doppeldreieck W_k über das Doppeldreieck V_k gebreitet sein, *so werden wir nun in den Modulsubstitutionen* $1, V_1, V_2, \cdots$ *ein Repräsentantensystem für* $\Gamma_{\{n\}}$ *besitzen.* Thatsächlich haben wir ja in der Teilung $(2, 3, n)$ für unsere Untergruppe $\Gamma_{\{n\}}$ vom Index ∞ das, was für eine Untergruppe von endlichem Index μ die geschlossene Fläche F_μ ist, und es reducieren sich die Modulsubstitutionen erster Art auf die Substitutionen des eben genannten Systems $1, V_1, V_2, \cdots$, wenn wir die Operationen der $\Gamma_{\{n\}}$ als unter einander identisch ansehen. Übrigens gestattet die Gruppe $G_{\{n\}}$, wie der blosse Anblick der Teilung $(2, 3, n)$ bestätigt, Erweiterung vermöge der Spiegelung an einem Kreise der Teilung $(2, 3, n)$. Wir schliessen sofort, *dass die Untergruppe* $\Gamma_{\{n\}}$ *vom Index* ∞ *nicht nur in* Γ, *sondern auch in der erweiterten Modulgruppe* $\overline{\Gamma}$ *ausgezeichnet ist**).

Um jetzt für unsere Untergruppe $\Gamma_{\{n\}}$ ein System von erzeugenden Substitutionen zu berechnen, beachten wir, dass ein in der Halbebene ω zwischen zwei bezüglich $\Gamma_{\{n\}}$ äquivalenten Punkten gezogener Weg in der Teilung $(2, 3, n)$ ein geschlossener Weg wird, dass aber auch umgekehrt jeder geschlossene Weg C der Teilung $(2, 3, n)$, wie wir ihn auch übertragen mögen, in der Halbebene zwei relativ äquivalente Punkte ω und $\omega' = v_k(\omega)$ verbindet. Lässt sich nun C auf einen Punkt zusammenziehen, ohne dabei über einen Punkt c der Teilung hinweggezogen zu werden, so entspricht ihm, wie wir bereits oben bemerkten, die identische Substitution $v_k = 1$. Schliesst C dagegen *einen* Punkt c ein, den er etwa im positiven Sinne umgeht, so ist $v_k = S_i^n$ eine parabolische Substitution der Amplitude $+n$; schliesst C zwei Punkte c im positiven Sinne ein, so ist $v_k = S_i^n S_k^n$ etc. etc. Man folgert sofort: Ein beliebiger geschlossener Weg, der die Teilung $(2, 3, n)$ durchzieht, verbindet, in die Halbebene ω übertragen, zwei Punkte ω und ω':

$$\omega' = S_i^{\nu_i n} S_k^{\nu_k n} S_l^{\nu_l n} \cdots S_r^{\nu_r n}(\omega), \tag{2}$$

wo unter den ν beliebige ganze positive oder negative Zahlen verstanden werden. *Demnach stellt eine gewisse Reihe parabolischer Substitutionen der Amplitude* n *ein System von Erzeugenden für* $\Gamma_{\{n\}}$ *dar.* Nun sind andrerseits alle parabolischen Substitutionen der gleichen Amplitude,

---

*) Lässt man an Stelle der Modulteilung die zur Γ_6 gehörende Dreiecksteilung (cf. Fig. 66, p. 273) treten, so kann man überhaupt alle Functionen $s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; \lambda\right)$ genau so verwerten, wie im Texte $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J\right)$. Doch verfolgen wir diesen Gegenstand nicht weiter, da wir dergestalt zu ausgezeichneten Untergruppen nur von Γ_6, nicht aber von Γ geführt werden.

wie wir wissen, mit einander gleichberechtigt. Nehmen wir hinzu, dass $\Gamma_{\{n\}}$ in Γ ausgezeichnet ist, so kommt der Satz, dass *alle* parabolischen Substitutionen der Amplitude n in $\Gamma_{\{n\}}$ enthalten sind. *Letztere Gruppe $\Gamma_{\{n\}}$ werden wir also sicher durch die Gesamtheit dieser Substitutionen S_k^n erzeugen.* Explicite haben die in Rede stehenden Operationen zufolge leichter Rechnung die Gestalt:

$$S_k^n(\omega) = \frac{(1 - \alpha\gamma n)\omega + \alpha^2 n}{-\gamma^2 n\omega + 1 + \alpha\gamma n}, \tag{3}$$

wobei α, γ alle Paare zu einander relativ primer Zahlen durchlaufen sollen.

§ 6. Bedeutung der $\Gamma_{\{n\}}$ für die Lösung des gruppentheoretischen Grundproblems. Classeneinteilung der Untergruppen.

Die Heranziehung der Untergruppen $\Gamma_{\{n\}}$ ist für eine systematische Lösung des gruppentheoretischen Grundproblems von grossem Nutzen, was wir nunmehr auseinanderzusetzen haben. Möge irgend eine Untergruppe Γ_μ des endlichen Index μ vorliegen, so denken wir ein Fundamentalpolygon für dieselbe in der ω-Halbebene abgegrenzt, dieses dann aber sogleich zur geschlossenen Fläche F_μ zusammengelegt. Die Dreiecksteilung dieser Fläche F_μ wird eine bestimmte, endliche Anzahl von Punkten c aufweisen, und letztere seien bez. von $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$, $\cdots$ Elementardreiecken kranzförmig umlagert. Ist jetzt $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ ein beliebig aufgegriffener rationaler reeller Punkt der ω-Halbebene, so möge derselbe bezüglich Γ_μ mit dem Punkte c_i von F_μ äquivalent sein, welcher letztere Punkt auf der geschlossenen Fläche von $2n_i$ Elementardreiecken umlagert sei. Leicht finden wir dann auf Grund einer Überlegung, wie wir sie auch schon im vorigen Paragraphen durchzuführen hatten, dass die parabolische Substitution $S_i^{n_i}$ der Amplitude n_i, die den Punkt $\frac{\alpha}{\gamma}$ zum Fixpunkt besitzt, der Untergruppe Γ_μ angehört. Wir mögen jetzt die gleiche Überlegung auf die übrigen rationalen reellen Punkte ω anwenden. Indem wir sodann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der oben eingeführten Zahlen n_1, n_2, n_3, $\cdots$ durch n bezeichnen, haben wir offenbar das Resultat: *In der Γ_μ sind alle parabolischen Substitutionen der Amplitude n enthalten.* Dieses aber heisst, *dass $\Gamma_{\{n\}}$ in Γ_μ als Untergruppe enthalten ist.* Da zugleich sämtliche parabolischen Substitutionen, welche der Einzelpunkt c_i, wie wir kurz sagen wollen, für Γ_μ liefert, durch n_i teilbare Amplituden haben, so ist überdies aufs leichteste zu sehen, dass *nicht schon eine frühere Gruppe $\Gamma_{\{n-1\}}$, $\Gamma_{\{n-2\}}$, $\cdots$ in Γ_μ als Unter-*

gruppe enthalten sein kann. Um für die hiermit entwickelte Sachlage einen kurzen Ausdruck zu besitzen, wollen wir fortan Γ_μ als *eine Untergruppe n^{ter} Classe* bezeichnen.

Die Gruppe $G_{\{n\}}$ der Operationen 1, W_1, W_2, $\cdots$ des vorigen Paragraphen steht zur Modulgruppe bekannter Weise im Verhältnis des Isomorphismus von unendlich hoher Meroedrie. Dabei entsprechen nun ersichtlich die zur n^{ten} Classe gehörigen Untergruppen der Modulgruppe wechselweise eindeutig den einzelnen Untergruppen der Gruppe $G_{\{n\}}$. Statt also die Untergruppen n^{ter} Classe der Modulgruppe direct aufzusuchen, können wir unser Problem auch dahin formulieren, dass wir $G_{\{n\}}$ in die Gesamtheit ihrer Untergruppen zerlegen sollen. *Wir haben solchergestalt unser gruppentheoretisches Grundproblem den verschiedenen Werten von n entsprechend in eine unendliche Reihe analoger Probleme von einfacherem Charakter zerlegt.* Bei jedem einzelnen dieser Probleme ist die Dreiecksteilung (2, 3, n) das, was für das Gesamtproblem die Modulteilung selbst ist, wie wir denn auch alle Begriffsbestimmungen und Massnahmen, die wir für die Untergruppen der Modulgruppe eingeführt haben, auf die Untergruppen von $G_{\{n\}}$ übertragen werden.

Vornehmlich gewinnen die gerade durchgeführten Überlegungen für die *Fundamentalpolygone* der Untergruppen n^{ter} Classe Bedeutung; gehen wir also auf diese ein wenig näher ein. In Γ_μ möge eine zur n^{ten} Classe gehörige Untergruppe des endlichen Index μ vorliegen, deren in der ω-Halbebene gelegenes Fundamentalpolygon F_μ sei. Dieses Polygon werde jetzt auf Grund der zwischen der ω-Halbebene und der Teilung (2, 3, n) festgesetzten Beziehung in die letztere übertragen. Keine zwei Doppeldreiecke von F_μ können hierbei über das nämliche Doppeldreieck der Teilung (2, 3, n) gelagert erscheinen; selbige wären nämlich bezüglich der $\Gamma_{\{n\}}$ und demnach auch bezüglich der Γ_μ äquivalent und als solche nicht *beide* dem Polygon F_μ angehörig. Wir gewinnen also ein aus μ Doppeldreiecken bestehendes Polygon F_μ' der Teilung (2, 3, n), dessen Randcurven durch diejenigen Operationen der $G_{\{n\}}$ auf einander bezogen sind, welche durch den Isomorphismus gewissen unter den Erzeugenden von Γ_μ zugeordnet sind. *F_μ' ist sonach das Fundamentalpolygon derjenigen Untergruppe der $G_{\{n\}}$, welche der Γ_μ zugeordnet ist.* Ganz wie in der ω-Halbebene werden wir demgemäss durch wiederholte, auf Grund der Zuordnung der Kanten ausgeführte Reproduction von F_μ' eine einfache und vollständige Bedeckung der Teilung (2, 3, n) mit Polygonen F_μ' gewinnen. In der That wird man bereits bemerkt haben, dass das Polygon F_μ' den Bedingungen eines für die Teilung (2, 3, n) geltenden Verzweigungssatzes Genüge

leistet. Letzterer wird offenbar hier gerade so zu formulieren sein, wie es oben für die Modulteilung selbst geschah, nur dass auch für die Punkte c noch eine Bedingung hinzukommt; *in der That wird ja die Anzahl der Doppeldreiecke, die auf der geschlossenen Fläche einen einzelnen Punkt c umgeben, notwendig ein Teiler von n sein müssen.* Unter diesem Gesichtspunkte hatten wir aber gerade die Classeneinteilung der Untergruppen oben eingeführt.

Der Wert dieser Überlegungen ist in der Verschiedenheit der Gestalt unserer beiden Polygone F_μ und F_μ' begründet. Schon wiederholt haben wir bemerkt, dass für die Mehrzahl der Anwendungen, welche wir künftighin von den Fundamentalpolygonen zu machen haben, einzig die Lagenverhältnisse der Doppeldreiecke in Betracht kommen. Hier leistet also F_μ' jedenfalls dieselben Dienste wie F_μ. Das Wichtige ist aber, dass das in der Teilung $(2, 3, n)$ ausgebreitete Polygon F_μ' stets sehr viel übersichtlicher gestaltet ist als F_μ. *In der That werden wir uns desselben an Stelle des ursprünglichen in der ω-Halbebene gelegenen Polygons bei der Mehrzahl der künftigen Untersuchungen mit Vorteil bedienen.* Freilich sollte man zuvörderst meinen, dass das Operieren mit der *geschlossenen* Fläche F_μ überall das vorteilhafteste sei, weil man da gar nicht mehr mit offenen Randcurven zu thun hat. Dem aber steht entgegen, dass die directe Anschauung einer in zahlreiche Dreiecke geteilten geschlossenen Fläche höheren Geschlechtes p sich nur schwierig bewerkstelligen lässt. Wie leicht sich dagegen mit den in der Teilung $(2, 3, n)$ gelegenen Polygonen arbeiten lässt, wollen wir in den folgenden Paragraphen an ein paar ausführlich zu betrachtenden Beispielen durchführen. Wir werden zu diesem Ende zweckmässig ausgezeichnete Untergruppen heranziehen, welchen wir ja überhaupt bei der Aufzählung der Untergruppen in erster Linie unsere Aufmerksamkeit zuwenden wollten. Schalten wir daher hier vorerst noch einige allgemeine Bemerkungen über ausgezeichnete Untergruppen n^{ter} Classe ein.

Man weiss aus § 8 des vorigen Kapitels, dass jede nicht-ausgezeichnete Untergruppe der Modulgruppe vom endlichen Index μ in sich eine Untergruppe $\Gamma_{\mu'}$ von gleichfalls endlichem Index μ' enthält, die in der Gesamtgruppe Γ ausgezeichnet ist. *Ist dabei Γ_μ von n^{ter} Classe, so gilt dasselbe auch für $\Gamma_{\mu'}$.* Da nämlich $\Gamma_{\{n\}}$ ausgezeichnet ist, so wird diese Gruppe in allen mit Γ_μ gleichberechtigten Untergruppen zugleich enthalten sein und demnach auch der Gruppe $\Gamma_{\mu'}$ angehören. *Dass übrigens jede ausgezeichnete Untergruppe n^{ter} Classe das Verzweigungsschema $\{2, 3, n\}$ besitzt,* dürfte ohne weiteres einleuchten.

Eine planmässige Erledigung unserer dem ganzen gegenwärtigen

Abschnitt zu Grunde liegenden Problemstellung würde die sein, dass wir die den verschiedenen Werten von n zugehörigen Classen der Reihe nach der Einzeluntersuchung unterwerfen. Dabei würden wir dem Gesagten zufolge bei der einzelnen Classe vorerst die in Betracht kommenden ausgezeichneten Untergruppen namhaft zu machen haben und dann wiederum von der einzelnen solchen ausgezeichneten Untergruppe nach § 8 des vorigen Kapitels zu den nicht-ausgezeichneten vorgehen. Die Fundamentalpolygone der ausgezeichneten Untergruppen n^{ter} Classe besitzen, wie wir gerade sagten, durchgängig das Verzweigungsschema $\{2, 3, n\}$. Lagern wir sie in die Teilungen $(2, 3, n)$ ein, so werden gegenüber der ursprünglichen in der ω-Halbebene gelegenen Gestalt nur noch solche offene Randcurven übrig bleiben, welche in jener ursprünglichen Gestalt durch *hyperbolische* Modulsubstitutionen mit einander correspondierten. Hierin ist aber, wie wir bald sehen werden, ein ausserordentlicher Vorteil begründet.

Wollen wir hier sogleich betreffs der niedersten Werte von n einige besondere Angaben machen. Für die ersten Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ kommt $G_{\{n\}}$ auf die Gruppen G_6, G_{12}, G_{24}, G_{60} der regulären Körper zurück, deren Zerlegung in die bezüglichen Untergruppen bereits in den Vorlesungen über das Ikosaeder geleistet ist. Für sich allein steht die Classe $n = 6$, bei der wir mit der Teilung $(2, 3, 6)$ einer s-Function zweiter Art zu thun haben. Die Verhältnisse sind für diesen Fall noch leicht zu überblicken, und man kann z. B., wie wir hier nebenher anführen, ohne besondere Mühe die Gesamtheit der hierher gehörigen ausgezeichneten Untergruppen charakterisieren*). Dass diese Untergruppen keine anderen sind, als diejenigen, welche wir sonst die ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechtes $p = 1$ nannten, ist vom Schluss des vorigen Kapitels (p. 342) her bekannt. Die übrigen Fälle $n = 7, 8, \cdots$ bekommen insofern wieder einen übereinstimmenden Charakter, als ihnen allen Teilungen $(2, 3, n)$ von s-Functionen dritter Art zu Grunde liegen. Wir werden in den Schlussparagraphen des gegenwärtigen Kapitels in dieser Hinsicht ein zu $n = 7$ gehörendes Beispiel ausführlich heranziehen.

Wenn wir vorstehend unsere Betrachtung immer auf Untergruppen Γ_μ von endlichem Index bezogen, so würde dies übrigens gar nicht hindern, vorkommenden Falls auch von Untergruppen n^{ter} Classen

*) Dieselben sind von Hrn. Dyck teils in der Arbeit *„Über Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen"*, Math. Ann. Bd. 17 p. 473 (1880), teils in den *„Gruppentheoretischen Studien"*, Math. Ann. Bd. 20 p. 1 (1881) angegeben worden, und wurden späterhin vom Herausgeber ausführlich untersucht; vergleiche die schon p. 358 genannte Arbeit.

vom Index ∞ zu handeln; ersichtlich werden uns ja die in $G_{\{n\}}$ enthaltenen Untergruppen vom Index ∞ solche liefern. Desgleichen könnte man auch den Grenzfall $n = \infty$ heranziehen, wo wir dann also zuvörderst die Aufgabe hätten, die ausgezeichneten Untergruppen der Classe ∞ namhaft zu machen. Sie alle haben ein Verzweigungsschema $\{2, 3, \infty\}$, und es coincidiert $G_{\{\infty\}}$ mit der Gesamtmodulgruppe Γ, während $\Gamma_{\{\infty\}}$ nur die eine Operation $\omega' = \omega$ umfasst. Doch darf man, wie wir hier zum Schlusse und ganz beiläufig anführen, keineswegs glauben, dass diese nur aus der Identität bestehende $\Gamma_{\{\infty\}}$ die einzige ausgezeichnete Untergruppe der Classe ∞ ist*).

§ 7. Besprechung einer besonderen ausgezeichneten Untergruppe sechster Classe vom Index 72.

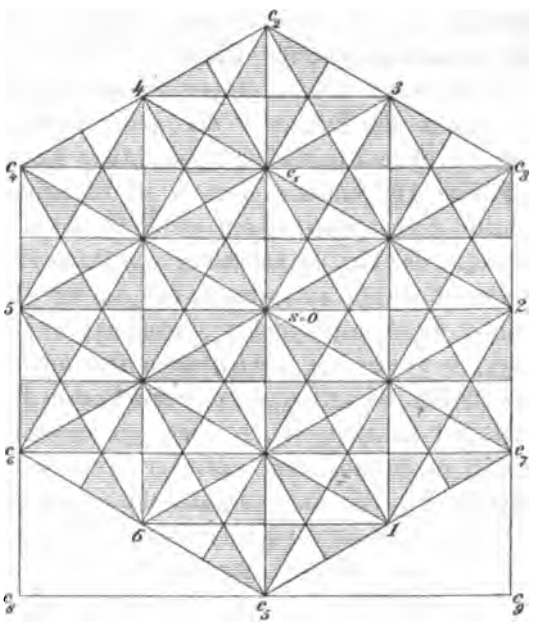
Die in der ω-Halbebene gelegenen Fundamentalpolygone der in § 4 (p. 353) besprochenen ausgezeichneten Untergruppen $\Gamma_{\{n\}}$ für die Werte $n = 2, 3, 4, 5$ konnten durchgehends aus $2n$ abwechselnd symmetrischen und congruenten Streifen zusammengesetzt werden. Durch diese Gestalten der Polygone wurde die Vertauschbarkeit der bezüglichen Untergruppen mit den Operationen S und A zur Anschauung gebracht. Wollen wir jetzt bei grösseren Werten von n Untergruppen n^{ter} Classe, die in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ ausgezeichnet sein sollen, durch ihre in der ω-Halbebene gelegenen Fundamentalpolygone definieren, so werden wir dieselben zweckmässiger Weise entsprechend wählen, d. h. ebenfalls aus $2n$ abwechselnd symmetrischen und congruenten Verticalstreifen aufbauen. Bei der zwischen der ω-Halbebene und der s-Teilung bestehenden Beziehung kommt dies darauf hinaus, dass wir die zugehörigen Polygone rings um den Mittelpunkt $s = 0$ der Teilung $(2, 3, n)$ derart anordnen, dass sie aus $2n$ abwechselnd symmetrischen und congruenten Ausschnitten bestehen. Wie dies gemeint ist, erläutern wir sogleich an dem für $n = 6$ in Aussicht genommenen Beispiele.

Die Teilung $(2, 3, 6)$, welche durch die dritte Zeichnung in Fig. 32 (p. 107) versinnlicht wurde, hat den besonders elementaren Charakter, dass sie aus geradlinigen Dreiecken besteht. Von ihnen

---

*) Ausgezeichnete Untergruppen der Classe ∞ sind vom Herausgeber wiederholt betrachtet worden; man vergleiche die Arbeit *„Über die Substitutionsgruppen, welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodul $k^2(\omega)$ gezogenen Wurzeln gehören"* (namentlich § 6), Math. Ann. Bd. 28 p. 99 (1886), ferner *„Über ausgezeichnete Untergruppen in der Gruppe der elliptischen Modulfunctionen"* (vergl. vornehmlich die Note zu p. 232 dortselbst) Math. Ann. Bd. 31 (1887).

haben wir $2 \cdot 72$ abwechselnd schraffierte und freie Dreiecke in Fig. 84 zu einem regelmässigen Sechseck zusammengelegt, das um den Punkt $s = 0$ symmetrisch angeordnet ist. Jedesmal zwei gegenüberliegende Seiten dieses Sechsecks wollen wir jetzt einander zuordnen, eine Bestimmung, von der auch neben Fig. 84 Vermerk genommen ist. Wenn wir also z. B. die mit 1 bezeichnete Seite des Sechsecks parallel mit sich selbst bis zu Seite 4 hinüber verschieben, so definieren wir



$1 - 4$,
$2 - 5$,
$3 - 6$.

Fig. 84.

dadurch im Sinne von Kapitel 1 dieses Abschnitts eine erzeugende Substitution der zu unserem Polygone gehörigen Untergruppe von $G_{(6)}$. Die gemeinte Untergruppe wird also aus gewissen drei Operationen erzeugt werden können, und es ist hier sogar besonders leicht zu sehen, wie durch wiederholte Anwendung dieser drei erzeugenden Operationen auf unser Sechseck nach und nach die ganze s-Ebene lückenlos und einfach von solchen Sechsecken bedeckt wird. In der That handelt es sich ja nur um Zusammensetzung von paarweise vertauschbaren Operationen.

Wir wollen uns jetzt denken, dass unser Sechseck auf Grund der Zuordnung der Randcurven zu einer geschlossenen Fläche F_{72} zusammengebogen wird*). Diese F_{72} wird dann von einer Einteilung

*) Es ist keineswegs leicht (und im Texte auch nicht erforderlich), sich eine solche geschlossene F_{72} lebhaft vorzustellen. Eben hierin liegt der schon oben

in $2 \cdot 72$ abwechselnd schraffierte und freie Dreiecke bedeckt sein. Dabei werden sich die Dreiecke zu je vieren um 36 Punkte a schaaren, wie das zum Teil schon in der ebenen Figur 84 direct sichtbar ist. Nur gewisse sechs Punkte a der geschlossenen Fläche sind auf denjenigen Linien derselben gelegen, welche bei Wiederausbreitung der Fläche in der s-Ebene die Seiten des Sechsecks ergeben. Da sind dann immer zwei von den vier einen solchen Punkt a umgebenden Dreiecken von den zwei anderen getrennt, und alle vier im einzelnen Falle zusammengehörige Dreiecke kommen so an die Berandung des Polygons zu liegen. Des ferneren umlagern die $2 \cdot 72$ Dreiecke zu je sechs 24 Punkte b der geschlossenen Fläche, was übrigens in Fig. 84 ohne Einschränkung sichtbar ist. Endlich finden sich auf der Fläche 12 Punkte c, von je 12 Elementardreiecken der Teilung umgeben. Sieben von diesen zwölf Punkten sieht man im Innern des Sechsecks der Fig. 84 vollzählig von ihren 12 Dreiecken umgeben; drei weitere Punkte c entspringen aus den drei Paaren einander gegenüberliegender Seitenmittelpunkte desselben; endlich liefern die sechs Ecken des Sechsecks die beiden noch fehlenden Punkte c, und zwar geben die in Fig. 84 mit c_3, c_4, c_5 bezeichneten Ecken den einen unter ihnen, die drei Ecken c_2, c_6, c_7 aber den anderen.

Nunmehr gilt es, in möglichst einfacher Weise zu erkennen, dass wir es bei unserer F_{72} mit einer regulär-symmetrischen Fläche zu thun haben. Wir bemerken zunächst, dass im Polygon der Fig. 84 thatsächlich ein solches vorliegt, das um seinen Mittelpunkt $s = 0$ herum aus zwölf abwechselnd symmetrischen und congruenten Ausschnitten zusammengesetzt ist. Drehen wir dasselbe also um $s = 0$ durch den Winkel $\frac{\pi}{8}$, so geht es in sich über und es sind zugleich nach Ausführung der Drehung die Kanten in derselben Weise zugeordnet wie vordem. Desgleichen wird unser Polygon F_{72} direct in sich selbst übergeführt, wenn wir die s-Ebene an ihrer imaginären Axe spiegeln. Denken wir uns also das Polygon F_{72} in die ω-Halbebene übertragen, so definiert dasselbe auf Grund des Verzweigungssatzes eine Untergruppe Γ_{72} sechster Classe vom Index 72, welche mit den Substitutionen S und A vertauschbar ist; denn diese Substitutionen sind ja gerade den Operationen zugeordnet, durch welche wir soeben das Sechseck in sich transformierten. Auf der anderen Seite wolle

---

bemerkte Vorzug, den die Betrachtung des in die Teilung $(2, 3, n)$ eingelagerten Polygons vor der Betrachtung geschlossener Flächen hat. Der gleiche Umstand kommt bei den auf $n = 7$ bezüglichen Entwicklungen des folgenden Paragraphen noch entschiedener zur Geltung.

man nun mit dem Sechseck F_{72} eine erlaubte Abänderung in folgender Weise vornehmen (vgl. Fig. 84, in der diese Abänderung angedeutet ist): Man trenne erstlich das Dreieck mit den Ecken c_1, c_2, c_3 ab und hänge dasselbe längs der Seite 6 als Dreieck $c_5 c_6 c_8$ wieder an; in gleicher Weise trage man das Dreieck $c_1 c_2 c_4$ in die neue Lage $c_5 c_7 c_9$ hinüber. Da ist nun aus dem Sechseck ein Rechteck mit den Ecken c_3, c_4, c_8, c_9 geworden, dessen Mittelpunkt der zum Ausgangsdreieck gehörende Punkt a ist. Zieht man auch noch die für dieses Rechteck geltende Zuordnung der Randcurven in Betracht, so ist sofort zu sehen: Drehung des Rechtecks um seinen Mittelpunkt durch den Winkel π führt dasselbe mitsamt der ursprünglichen Zuordnung seiner Seiten in sich selbst über. Aber dieser Drehung, als einer Operation der $G_{\{6\}}$, ist die Modulsubstitution T zugeordnet; auch diese ist sonach mit der Γ_{72} vertauschbar. Damit aber haben wir, was wir wollen: *Unsere Gruppe sechster Classe* Γ_{72} *ist ausgezeichnet in der erweiterten Modulgruppe* $\bar{\Gamma}$*; das zugehörige Fundamentalpolygon* F_{72} *ist sonach ein regulär-symmetrisches.*

Wir wollen jetzt noch die erzeugenden Substitutionen der Γ_{72} berechnen. Zu diesem Zwecke müssen wir das Polygon F_{72} thatsächlich irgendwie in der ω-Halbebene ausbreiten. Wir übertragen zu dem Ende zuvörderst einen der zwölf Ausschnitte der Fig. 84, etwa denjenigen, welcher sich rechts an die negativ imaginäre s-Axe anlegt. In der ω-Halbebene wird daraus ein Complex von zwölf Elementardreiecken entspringen, der sich rechts an die imaginäre ω-Axe anlagert. Man überzeugt sich leicht, dass er die in Fig. 85 dargestellte Form aufweist. Aus zwölf solchen Streifen, die einander abwechselnd symmetrisch und congruent sind, bauen wir das ganze Polygon F_{72} in der ω-Halbebene auf; sechs unter ihnen denken wir dabei zur rechten, die anderen sechs zur linken Seite der imaginären ω-Axe an einander gereiht, so dass also das ganze Polygon zwischen den beiden durch $\omega = +3$ bez. $\omega = -3$ hindurchziehenden Geraden der Modulteilung eingelagert erscheint.

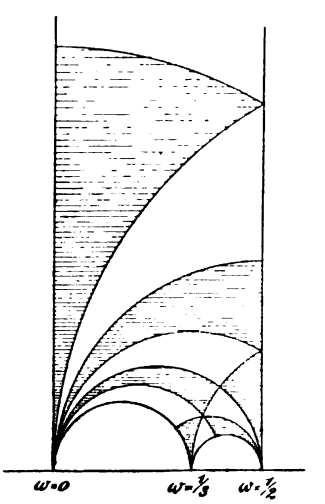


Fig. 85.

Die unteren, halbkreisförmigen Randcurven des so erhaltenen Fundamentalpolygons der Γ_{72} können wir am einfachsten jedesmal durch Angabe der beiden rationalen reellen ω-Werte charakterisieren, die den Fusspunkten zugehören, in denen der einzelne solche Kreisbogen die reelle

ω-Axe trifft. So werden wir z. B. sagen, dass der eine in Fig. 85 dargestellte Parallelstreif unseres Polygons die beiden Randcurven $(0, \frac{1}{3})$ und $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ habe. Aus Fig. 84 müssen wir jetzt ablesen, wie die Zusammenordnung der Randcurven unseres neuen, in der ω-Halbebene gelegenen Polygons F_{72} zu treffen sind.

Wir nehmen eine gewisse Gattung von Randcurven vorweg. Zuerst sind die beiden, F_{72} nach rechts und links abschliessenden verticalen Geraden einander zuzuweisen, von denen die eine durch die Substitution

$$v_1(\omega) = S^6(\omega) = \omega + 6 \tag{1}$$

in die andere übergeht. Dann ferner gehört die Randcurve $(-3, -\frac{8}{3})$ mit $(\frac{8}{3}, 3)$ zusammen, deren erste in die zweite durch

$$v_2(\omega) = \frac{17\omega + 48}{6\omega + 17} \tag{2}$$

übergeführt wird. Des weiteren gehören jedesmal die beiden Randcurven zu einander, welche bez. in den fünf Punkten $\omega = 0, \pm 1, \pm 2$ sich berühren. Die fünf Substitutionen, deren einzelne immer die eine Randcurve eines solchen Paares in die andere Randcurve desselben überführt, sind beziehungsweise:

$$\begin{gathered} v_3(\omega) = \frac{\omega}{-6\omega + 1}, \quad v_4(\omega) = \frac{7\omega + 6}{-6\omega - 5}, \quad v_5(\omega) = \frac{5\omega - 6}{6\omega - 7}, \\ v_6(\omega) = \frac{13\omega + 24}{-6\omega - 11}, \quad v_7(\omega) = \frac{11\omega - 24}{6\omega - 13}. \end{gathered} \tag{3}$$

Den hiermit erledigten Randcurven unseres Polygons entsprechen nur erst solche Linien in der ursprünglichen Form von F_{72}, welche in Fig. 84 im Innern des Sechsecks verlaufen und also erst bei Fortgang zur ω-Halbebene den Charakter als Randcurven bekommen. Es fehlt noch die Betrachtung der Randcurven, die den Sechseckseiten der ursprünglichen Gestalt von F_{72} entsprechen. Die Zusammengehörigkeit derselben entnimmt man natürlich sofort aus den bezüglichen Bestimmungen der Fig. 84. Wir stellen hier sogleich tabellarisch je zwei einander zugeordnete Randcurven neben einander und schreiben jedesmal diejenige Modulsubstitution daneben, durch welche die erste Randcurve in richtiger Weise in die zweite übergeführt wird. Man findet so die Tabelle:

$$\begin{gathered} (-\tfrac{8}{3}, -\tfrac{5}{2}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}); \; v_8(\omega) = \frac{7\omega + 18}{12\omega + 31}, \\ (-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{3}{2}), (\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{3}); \; v_9(\omega) = \frac{19\omega + 30}{12\omega + 19}, \\ (-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{2}), (\tfrac{5}{2}, \tfrac{8}{3}); \; v_{10}(\omega) = \frac{31\omega + 18}{12\omega + 7}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} &(1/3,\ 1/2),\ (-5/3,\ -7/3);\ v_{11}(\omega) = \frac{-29\omega+12}{12\omega-5},\\ &(4/3,\ 3/2),\ (-3/2,\ -4/3);\ v_{12}(\omega) = \frac{-17\omega+24}{12\omega-17},\\ &(7/3,\ 5/2),\ (-1/2,\ -1/3);\ v_{13}(\omega) = \frac{-5\omega+12}{12\omega-29}. \end{aligned}$$

In den solchergestalt gewonnenen dreizehn Operationen $v_1, v_2, \cdots, v_{13}$ besitzen wir nun ein System von Erzeugenden unserer ausgezeichneten Untergruppe Γ_{72}. Wir schliessen damit vorläufig die an Fig. 84 anknüpfende Betrachtung, indem wir uns vorbehalten, auf die gewonnene Γ_{72} und insbesondere auf die Gestalt der erzeugenden Operationen v_k im nächsten Kapitel nochmals zurückzukommen. Wir haben die Betrachtung um so lieber etwas ausführlicher gestaltet, weil die sämtlichen von uns besprochenen einzelnen Überlegungen allgemeine Bedeutung haben und sofort in einem complicierteren Falle zu erneuter Anwendung kommen sollen.

§ 8. Definition einer speciellen ausgezeichneten Untergruppe siebenter Classe vom Index 168*).

Der Rest des gegenwärtigen Kapitels ist der Aufstellung und Untersuchung einer besonderen Untergruppe siebenter Classe gewidmet, welche zu den interessantesten Untergruppen gehört, denen wir überhaupt im Laufe unserer Untersuchungen begegnen. In Formel (6) p. 342 haben wir eine diophantische Relation kennen gelernt, welche das Geschlecht p und den Index μ einer ausgezeichneten Untergruppe n^{ter} Classe verband. Für $n = 7$ lautet diese Relation:

$$\mu = 84(p-1).$$

Da $p > 1$ sein muss, so ist die niederste für uns in Betracht kommende Lösung dieser Relation $p = 2$, $\mu = 84$; sodann folgt $p = 3$, $\mu = 168$. Wollten wir inzwischen versuchen, nach Massgabe der ersten dieser beiden Lösungen um den Mittelpunkt der Fig. 33 (p. 109) ein Polygon aus 14 abwechselnd symmetrischen und congruenten Ausschnitten aufzubauen (dessen einzelner aus zwölf Elementardreiecken bestehen müsste), so würden wir doch, wie wir hier nicht ausführen, mit der Zuordnung der Randcurven nicht zurecht kommen; wir verfolgen also gleich den zweiten Fall $p = 3$, $\mu = 168$. Da muss der einzelne unserer 14 Ausschnitte 24 Elementardreiecke umfassen, und nun zeigt sich die

*) Betreffs der hier über die G_{168} gegebenen Resultate vergleiche man Klein's Arbeit *„Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen"*, Math. Ann. Bd. 14 (1878). Die hier in den §§ 8 bis 12 auf rein geometrischer Basis gegebenen Entwicklungen über die G_{168}, sowie gleicher Weise die soeben mitgeteilte Untersuchung der Γ_{72} rühren vom Herausgeber her.

interessante Thatsache, *dass sich immer 24 Elementardreiecke der Teilung* (2, 3, 7) *in gewisser Folge zu einem grösseren Kreisbogendreiecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ *zusammenlegen*, welches letztere nunmehr den einzelnen Ausschnitt für unser sogleich noch näher zu definierendes Polygon F_{168} abgeben soll. Man vergleiche hierzu Fig. 86, in welcher in der That 14 Ausschnitte beschriebener Art abwechselnd symmetrisch und congruent an einander gelagert sind.

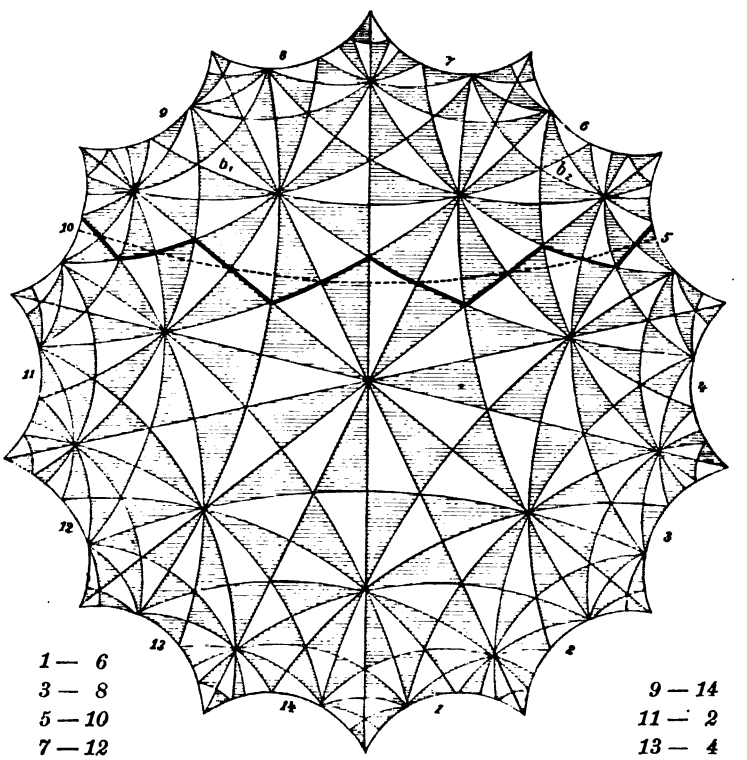


Fig. 86.

Es handelt sich nunmehr weiter darum, in welcher Folge wir die 14 Randcurven des so gewonnenen Dreieckscomplexes zusammenordnen wollen. Da sind nun von vornherein viele Fälle denkbar; aber wir führen hier ohne Beweis an, dass nur eine *einzige* Art, die Randcurven zuzuordnen, in gewünschter Weise auf eine ausgezeichnete Γ_{168} führt. Diese Zuordnung vereinigt jede in Fig. 86 mit einer ungeraden Nummer bezeichnete Begrenzungslinie mit derjenigen geradzahligen Linie, deren Nummer modulo 14 um 5 grösser ist; es ist dies in den der Fig. 86 beigegebenen Tabellen noch näher ausgeführt. Wir werden uns sogleich mit dem Nachweise beschäftigen, dass solcherweise wirklich eine

regulär-symmetrische F_{168} entsteht. Vorab beachte man, wie sich auf Grund unserer Festsetzungen die am Rande des Polygons gelegenen Ecken der Dreiecke auf der entsprechenden geschlossenen Fläche F_{168} zu Punkten a, b, c zusammenordnen. In dieser Hinsicht verdient insbesondere bemerkt zu werden, dass sich unter den 14 Ecken des Polygons die 1te, 3te, 5te, $\cdots$, 13te auf der Fläche F_{168} zu einem Punkte c vereinen, desgleichen die 2te, 4te, $\cdots$, 14te zu einem zweiten. *Insgesamt giebt es auf der geschlossenen Fläche* F_{168} 84 *Punkte* a, 56 *Punkte* b, 24 *Punkte* c, Anzahlen, denen wir noch häufig begegnen werden.

Wir wenden uns jetzt zu dem Nachweise, dass unsere F_{168} regulärsymmetrisch ist. Das Verfahren ist dabei dasselbe, wie vorhin bei der F_{72}. Wir sagen zunächst: Das in Fig. 86 dargestellte Polygon geht mitsamt der Zuordnung seiner Randcurven in sich selbst über, wenn wir es um seinen Mittelpunkt durch den Winkel $\frac{2\pi}{7}$ drehen. Durchaus das Gleiche gilt, wenn wir Fig. 86 an der verticalen, durch ihren Mittelpunkt hindurchziehenden Geraden spiegeln. Aber jene Drehung und diese Spiegelung sind Operationen, welche die Teilung (2, 3, 7) in sich überführen, und sie entsprechen als solche den Modulsubstitutionen S und A. Wir schliessen sofort: *Die durch unser Polygon* F_{168} *definierte Untergruppe siebenter Classe* Γ_{168} *ist mit* S *und* A *vertauschbar*. Um zu zeigen, dass sie auch mit T vertauschbar ist, nehmen wir mit Fig. 86 eine erlaubte Abänderung vor, welche unser Polygon in die durch Fig. 87 veranschaulichte Form überführt. Durch Vergleich der beiderlei Gestalten wird man sich leicht überzeugen, welche Abänderungen den Übergang von Fig. 86 zu 87 bewerkstelligen. Wir haben zuvörderst am Ausschnitt 6 der Fig. 86 einen auch in die Ausschnitte 5 und 7 übergreifenden Complex von 21 Dreiecken abgestreift und selbigen, wie es dementsprechend geschehen muss, an der Randcurve 1 angetragen; so entspringt die in Fig. 87 durch 15 bezeichnete Randcurve. Des ferneren wurde vom 4ten und 5ten Ausschnitt der Fig. 86 ein Complex von 12 Dreiecken abgetrennt und übertragen, wodurch die Randcurven 12 und 13 in Fig. 87 entstehen. Endlich wurden auch noch vom 7ten Ausschnitt 6 Dreiecke fortgenommen und am 12ten angetragen. Damit wir nach wie vor mit einer bezüglich der verticalen Geraden symmetrischen Figur zu thun haben, nehmen wir endlich noch an den Ausschnitten 9, 10 8 u. s. w. die symmetrisch entsprechenden Übertragungen von Dreiecken vor. So entsteht Fig. 87, wo man sich nun überzeugen wolle, dass die neben der Figur tabellarisch angegebene Zuordnung der Randcurve die richtige ist. Unser Polygon zeigt jetzt nicht nur bezüglich

der verticalen Geraden Symmetrie, sondern es geht auch vollständig in sich über, wenn wir es an dem anderen, durch den Punkt a_1 horizontal hindurchgehenden Kreise der Teilung (2, 3, 7) spiegeln. Aber dieser Punkt a_1 entspricht dem Punkte $\omega = i$, und die eben gemeinte Spiegelung ist daher der Modulsubstitution C zugeordnet. Wir finden so, dass Γ_{168} nicht nur mit A, sondern auch mit C und also endlich auch mit $AC = T$ vertauschbar ist. So entspringt das in Aussicht genommene Resultat: *Die durch Fig.* 86 *definierte Untergruppe* Γ_{168} *siebenter Classe*

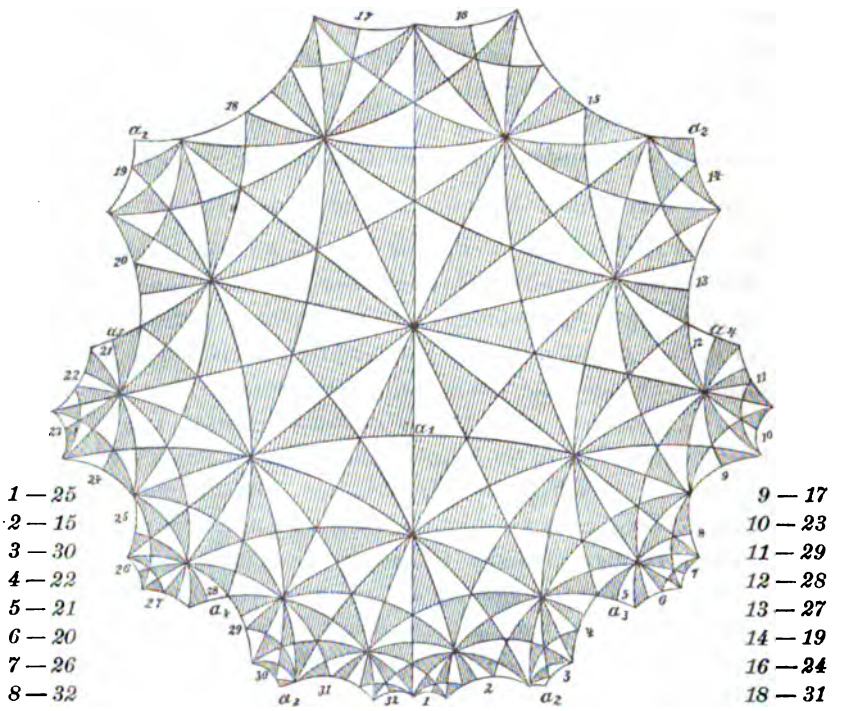


Fig. 87.

vom Geschlecht $p = 3$ *ist in der erweiterten Modulgruppe* $\overline{\Gamma}$ *ausgezeichnet; das zugehörige Fundamentalpolygon* F_{168} *ist sonach regulärsymmetrisch.*

Um jetzt auch in der ω-Halbebene ein Fundamentalpolygon für Γ_{168} anzugeben, werden wir zunächst den Ausschnitt 1 der Fig. 86 in der Modulteilung in möglichst übersichtlicher Weise ausbreiten. Wir erhalten dabei etwa den durch Fig. 88 versinnlichten Dreieckscomplex. Die Randcurve 1 des Ausschnitts hat sich bei diesem Übergange in die beiden Halbkreise $(\frac{2}{7}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{3}{7})$ übertragen; zugleich treten zwei neue Randcurven $(0, \frac{2}{7})$ und $(\frac{3}{7}, \frac{1}{2})$ auf, welche bei Fig. 86 im Innern des Polygons mit anderen Randcurven zusammengebogen lagen.

Lagern wir neben den so gewonnenen Parallelstreifen etwa nach rechts hin noch 13 weitere mit ihm abwechselnd symmetrische und congruente an, so haben wir einen Fundamentalbereich für Γ_{168} hergestellt.

Zum Schluss wollen wir wieder ein System von Erzeugenden für die Γ_{168} berechnen.

Wir berücksichtigen zu dem Zwecke zuvörderst diejenigen Randcurven des Fundamentalpolygons, die, wie wir gerade entwickelten, erst beim Fortgang zur ω-Halbebene entstehen. Da haben wir zuerst die beiden verticalen Geraden einander zuzuordnen, die rechts und links F_{168} abschliessen; die eine geht in die andere durch die Substitution:

(1) $$\omega' = \omega + 7$$

über. Ferner sind einander zugeordnet die Randcurven $(0, {}^2/_7)$ und $({}^{47}/_7, 7)$, und ihnen entspricht in derselben Weise:

(2) $$\omega' = \frac{48\omega - 7}{7\omega - 1}.$$

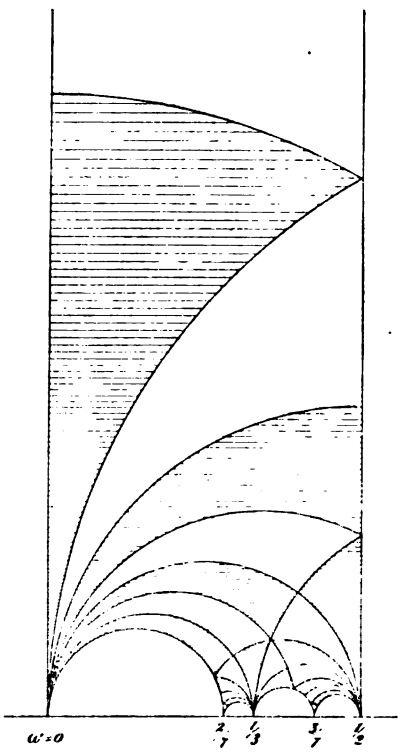


Fig. 88.

Lassen wir ν der Reihe nach die Werte $1, 2, \cdots, 6$ durchlaufen, so sind $(\nu - {}^2/_7, \nu)$ und $(\nu, \nu + {}^2/_7)$ sechs fernere Paare zugeordneter Randcurven; die bezüglichen sechs Substitutionen sind:

(3) $$\omega' = \frac{(1 + 7\nu)\omega - 7\nu^2}{+ 7\omega + (1 - 7\nu)}.$$

Desgleichen haben wir für $\nu = 0, 1, \cdots, 6$ sieben Paare einander zugeordneter Randcurven in $(\nu + {}^3/_7, \nu + {}^1/_2)$, $(\nu + {}^1/_2, \nu + {}^4/_7)$; ihnen gehören die sieben Operationen zu:

(4) $$\omega' = \frac{(15 + 28\nu)\omega - 7(1 + 2\nu)^2}{28\omega - (13 + 28\nu)}.$$

Jetzt bleiben noch diejenigen Randcurven, die auch bereits in Fig. 86 als solche fungierten. Wir haben da erstlich die sieben Paare $(\nu + {}^2/_7, \nu + {}^1/_3)$, $(\nu + {}^5/_3, \nu + {}^{19}/_7)$ für $\nu = 0, 1, \cdots, 6$ mit den sieben bezüglichen Substitutionen:

(5) $$\omega' = \frac{(113 + 42\nu)\omega - 7(5 + 18\nu + 6\nu^2)}{42\omega - (13 + 42\nu)}.$$

Wir haben dann noch, ν in derselben Bedeutung beibehalten, die sieben Paare $(\nu + 1/3,\ \nu + 3/7)$, $(\nu + 18/7,\ \nu + 8/3)$, denen wir ebenso viele Substitutionen zuordnen:

$$(6) \qquad \omega' = \frac{(55 + 21\nu)\omega - 21(1 + 3\nu + \nu^2)}{21\omega - (8 + 21\nu)}.$$

Die unter (1) *bis* (6) *namhaft gemachten Substitutionen, insgesamt* 29 *an Zahl, bilden ein System von Erzeugenden für unsere Untergruppe* Γ_{168}.

§ 9. Die endliche Gruppe G_{168}. Die Untergruppen G_7 und G_{21} der G_{168}.

Sehen wir die Operationen von Γ_{72} oder Γ_{168} als unter einander nicht wesentlich verschieden an, so reduciert sich die Modulgruppe Γ auf nur 72 bez. 168 verschiedene Operationen, welche in bekannter Weise eine G_{72} bez. G_{168} bilden. Die letztere, als die für später wichtigere Gruppe, wollen wir hier noch besonders verfolgen und uns speciell über deren Structur unterrichten.

Die Gruppe G_{168} der Ordnung 168 haben wir als eine Gruppe eindeutiger Transformationen der geschlossenen Fläche F_{168} in sich zu deuten. Man wolle also bemerken, dass die Zerlegung dieser G_{168} in ihre Untergruppen eine Aufgabe ist, die sich ihrer Eigenart nach der Zerlegung der Ikosaedergruppe an die Seite stellt. In der That, wir fanden in § 4 eine ausgezeichnete Untergruppe Γ_{60} von Γ, deren Fundamentalpolygon, zweckmässig zusammengelegt, die ikosaedrisch geteilte Kugel giebt. Die bezügliche G_{60} konnten wir somit als die Gruppe der Ikosaederdrehungen deuten und eben durclr Zuhilfenahme des Ikosaeders ihre Structur erfahren. Entsprechend werden wir nun unsere G_{168} in ihrer geometrischen Form als Gruppe der Transformationen der F_{168} in sich auf ihre Structur untersuchen. Dabei haben wir Gelegenheit, die schon wiederholt betonte, sehr viel grössere Brauchbarkeit des in Fig. 86 dargestellten Polygons vor der geschlossenen Fläche F_{168} zu erkennen*).

In der Structur unserer G_{168} lässt sich interessanter Weise eine Analogie zur Structur der Ikosaedergruppe bis in's einzelne verfolgen. Wir wählen demgemäss den Vergleich der G_{168} mit der Ikosaedergruppe bei den folgenden Entwicklungen zum Ausgangspunkt.

---

*) Eine solche geschlossene Fläche F_{168} wird hier in der That notwendig sehr compliciert. Vergleiche übrigens wegen einer anderweitigen Versinnlichung einer solchen Fläche die Abhandlung von Hrn. Haskell, *Über die zur Curve*

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

im projectiven Sinne gehörige mehrfache Überdeckung der Ebene (Göttinger Dissertation, 1889).

Auf dem Ikosaeder, das wir kurz als F_{60} bezeichnen werden, lagen zwölf Punkte c, um mit ihnen zu beginnen. Diesen zwölf Punkten c waren sechs gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_5 der G_{60} zugeordnet, deren einzelne zwei Punkte c zu Fixpunkten besass, während sich bei Ausführung dieser G_5 die übrigen zehn Punkte c in zwei Reihen zu je fünf cyclisch permutierten. Ganz analog bei unserer G_{168}: Da haben wir 24 Punkte c und man fasse nun zunächst insonderheit denjenigen in's Auge, der im Mittelpunkt der Fig. 86 gelegen ist. Drehung durch den Winkel $\frac{2\pi}{7}$ um diesen Punkt transformiert das Polygon F_{168} in sich, und nun entspringt ersichtlich durch Wiederholung dieser Drehung eine in der G_{168} enthaltene cyclische G_7. Man sehe nach, wie sich bei Ausübung dieser G_7 die anderen 23 Punkte c verhalten. Zwei Kränze von je sieben solchen Punkten erblickt man direct im Innern des Polygons Fig. 86; die 7 Punkte des einzelnen Kranzes vertauschen sich bei der G_7 offenbar cyclisch. Ein dritter Kranz von 7, sich ebenso verhaltenden Punkten liegt in denjenigen Punkten c von F_{168} vor, deren Umgebungen jedesmal durch die Randcurven des Polygons in zwei Teile zerlegt erscheinen. Endlich bleiben auf F_{168} noch zwei Punkte c, diejenigen nämlich, welche sich bei Zusammenlegung des Polygons aus den 14 Ecken desselben zusammensetzen; man überzeugt sich sofort, dass diese beiden Punkte c Fixpunkte unserer G_7 sind. Fassen wir zusammen, so haben wir: *Die gefundene G_7 hat drei Punkte c zu Fixpunkten, während sich die übrigen* 21 *Punkte c bei Ausführung der G_7 in drei Systemen zu je sieben cyclisch permutieren.*

So führt nun überhaupt jeder der 24 Punkte c zur Aufstellung einer cyclischen G_7, welcher er als Fixpunkt zugehört, und da alle 24 Punkte c bezüglich der G_{168} mit einander äquivalent sind, so werden alle so entspringenden G_7 innerhalb der Gesamtgruppe G_{168} gleichberechtigt sein*). Inzwischen gelangen wir auf diese Weise keineswegs zu 24 verschiedenen G_7; vielmehr überzeuge man sich etwa durch Heranziehung der oben besonders betrachteten G_7, dass, wenn die zu c_1 im eben gemeinten Sinne gehörige G_7 auch noch c_2 und c_3 zu Fixpunkten besitzt, eben diese beiden letzteren Punkte c_2, c_3 von sich aus gerade zu der nämlichen G_7 führen. Immer drei der 24 Punkte c geben also dieselbe G_7, so dass wir schliessen: *In der G_{168} giebt es* 8 *gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_7 der Ordnung* 7. Diesen acht Gruppen entsprechend ordnen sich die 24 Punkte c zu je drei in 8 Tripel zu-

*) Man erinnere sich hier des „Ikos." p. 12 angegebenen, auch bereits oben in II, 3 wiederholt zur Geltung gekommenen Princips über Gleichberechtigung solcher Operationen, deren Fixpunkte äquivalent sind.

sammen, eine Anordnung, deren wir im folgenden Paragraphen und späterhin noch häufig zu gedenken haben. Es entspricht diese Anordnung übrigens der Verteilung der 12 Ikosaederecken auf 6 Paare einander gegenüberliegender.

Jetzt bringen wir sofort die in § 7 des vorigen Kapitels (p. 322) allgemein entwickelten gruppentheoretischen Schlussweisen in Anwendung. Die einzelne G_7 als eine unter 8 gleichberechtigten Gruppen ist im ganzen mit $168:8 = 21$ Operationen der G_{168} vertauschbar, die eine G_{21} bilden. *So entspringen acht gleichberechtigte Untergruppen G_{21} der Ordnung* 21, die ersichtlich den 6 gleichberechtigten G_{10} des Ikosaeders entsprechen. In der That ist diese Analogie auch geometrisch vollständig durchführbar, was im folgenden Paragraphen geleistet wird. Wir beginnen dabei mit einer erneuten Betrachtung der geometrischen Verhältnisse, und führen insbesondere ein neues Element der Anschauung, die 28 *Symmetrielinien* der F_{168} ein. Vermöge derselben erfahren wir dann auch Näheres über die Structur der gerade gefundenen acht G_{21}; wir lernen zugleich eine Reihe weiterer Untergruppen der G_{168} kennen, deren Gesamtheit wir überhaupt im Laufe der gerade vorliegenden Paragraphen aufstellen werden.

§ 10. Die 28 Symmetrielinien der F_{168} und die Untergruppen G_3 und G_6 der G_{168}.

Wie wir die Ikosaederteilung in Fig. 31 (p. 106) darstellten, wird sie durch 15 grösste Kreise der Kugel bewerkstelligt, welche mit einander bezüglich der G_{60} äquivalent waren und durchgehends Symmetriekreise der gemeinten Teilung darstellten. Wollen wir die analogen Verhältnisse für unsere regulär-symmetrische, geschlossene Fläche F_{168} untersuchen, so wird auch hier jede Linie ihrer Einteilung eine Symmetrielinie dieser Teilung sein; *wir werden also jede solche Linie kurz als eine Symmetrielinie der Fläche F_{168} bezeichnen.* Man verfolge nun zuvörderst an der ebenen Fig. 86 eine einzelne solche Symmetrielinie, etwa diejenige, welche vertical durch die Mitte dieser Figur hindurchzieht. Um zu beurteilen, wie sich diese Linie über ihre in Fig. 86 eintretenden beiden Endpunkte hinaus auf der Fläche fortsetzt, müssen wir vorab mit Hilfe der Zuordnung der Randcurven nachsehen, wie sich die an den Ecken des Polygons gelegenen Dreiecke zu den Umgebungen der beiden bezüglichen Punkte c der Fläche zusammenfügen. Da ist es denn unschwer zu erkennen, dass sich die Randcurven 5 und 10 (Fig. 86) auf der geschlossenen Fläche zu einer Linie zusammenlegen, die im Verein mit dem unserer verticalen Geraden entsprechenden Curvenstück eine auf der Fläche F_{168}

geschlossene Symmetrielinie abgiebt. Diese Symmetrielinie besteht im ganzen aus 18 Dreiecksseiten. Die Reihenfolge der auf ihr liegenden Punkte a, b, c ist in Fig. 89 angegeben, die einen längs der Symmetrielinie aus der geschlossenen Fläche ausgeschnittenen Gürtel in schematischer Weise versinnlicht.

Aus der in Fig. 89 mitgeteilten Zeichnung wolle man nun insbesondere entnehmen, dass jede der drei Arten von Dreiecksseiten, die es giebt, sich mit sechs Seiten an der Bildung unserer Symmetrielinie beteiligt. Es folgt daraus der wichtige Satz, *dass alle Symmetrielinien unserer F_{168} mit einander äquivalent sind.* Auf einer beliebig vorgegebenen Symmetrielinie greife man nämlich irgend eine Dreiecksseite auf. Zu letzterer lässt sich auf der hierneben dargestellten Symmetrielinie sofort eine äquivalente Seite auffinden. Da wird dann diejenige Operation der G_{168}, welche die erste dieser Seiten in die zweite transformiert, zugleich die eine Symmetrielinie in die andere überführen. Indem also alle Symmetrielinien die durch Fig. 89 versinnlichte Gestalt besitzen, werden sie insbesondere alle aus je 18 Dreiecksseiten bestehen. Aus der Gesamtzahl der $3 \cdot 168$ Dreiecksseiten entstehen sonach im ganzen $3 \cdot 168 : 18 = 28$ Symmetrielinien. Daher das wichtige Resultat, welches dem zu Anfang angegebenen Satze von der Ikosaederteilung entspricht: *Die regulär-symmetrische Teilung unserer Fläche F_{168} wird durch 28 unter einander äquivalente Symmetrielinien bewerkstelligt.* (Man vgl. Math. Ann. Bd. 14, p. 465).

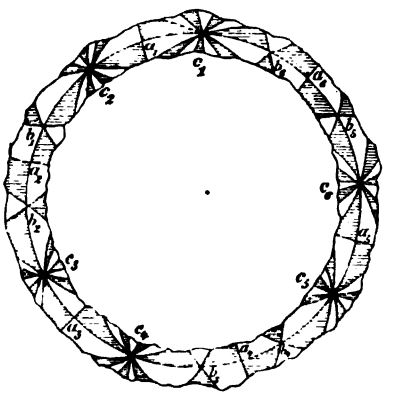


Fig. 89.

Indem die einzelne Symmetrielinie durch die 168 Operationen der G_{168} nur in 28 Symmetrielinien übergeführt wird, muss sie durch $168 : 28 = 6$ Operationen in sich transformiert werden; dieselben bilden notwendig eine G_6. Constatieren wir also: *Den 28 unter einander äquivalenten Symmetrielinien entsprechen 28 gleichberechtigte Untergruppen G_6 sechster Ordnung der G_{168}**). Solches wird durch Fig. 89 unmittel-

---

*) Man könnte zunächst glauben, dass die einzelne G_6 immer zugleich mehrere Symmetrielinien in sich überführen möchte, wobei dann die Zahl der G_6 ein Teiler von 28 wäre, aber nicht 28 selbst. Das würde aber wider die gleich zu besprechende Thatsache streiten, dass die in der einzelnen G_6 enthaltene G_3 nur *zwei* von den 56 Punkten b zu Fixpunkten hat.

bar zur Evidenz gebracht, und wir erkennen dabei zugleich in unseren G_6 Untergruppen der G_{168} vom *Diedertypus*. In der That wird ja unsere in Fig. 89 dargestellte Symmetrielinie zuvörderst durch eine Operation der Periode drei in sich übergeführt, welche sich schematisch als Drehung durch 120^0 um den Mittelpunkt der Figur darstellt. Fürs zweite wird die gemeinte Linie ersichtlich noch durch drei Operationen der Periode zwei in sich übergeführt, die auf dieser Linie in a_1, a_4 bez. a_2, a_5 und a_3, a_6 je ein Paar von Fixpunkten besitzen; man kann sich diese Operationen als Umklappungen der Figur um drei sich in ihrem Mittelpunkte kreuzende Durchmesser denken.

Den Diedertypus der in Rede stehenden G_6 können wir hier anschaulich sogar noch weiter verfolgen, indem wir nämlich in unserer geteilten Fläche F_{168} ein der Figur 13 (p. 72) entsprechendes Gerüst von vier Symmetrielinien aufsuchen. Die Diederteilung besitzt drei äquivalente Kreise, die gemeinsam durch zwei, einander diametrale Punkte der Kugel laufen, und einen vierten, jene orthogonal schneidenden Kreis (cf. Fig. 13). Diesem letzteren Kreise müssen wir offenbar die Symmetrielinie der Fig. 89 entsprechend setzen, während die anderen drei Kreise der Diederteilung den durch die Punkte a der Fig. 89 ziehenden anderen Symmetrielinien gegenüber zu stellen sind. Wolle man jetzt diese Symmetrielinien in Fig. 86, p. 370, verfolgen. Da wird man das interessante Resultat erblicken: *Die Symmetrielinie durch a_1 zieht auch durch a_4, diejenige durch a_2 durch a_5, die durch a_3 durch a_6; besagte drei Symmetrielinien gehen überdies gemeinsam durch die beiden mit b_1 und b_2 bezeichneten Punkte der Fig.* 86, *abgesehen aber von b_1 und b_2 haben keine zwei unter ihnen einen Punkt gemeinsam.* Wir haben also in der That der G_6 entsprechend auf der F_{168} eine Figur, die durchaus an die Diederconfiguration erinnert.

Jetzt aber schliessen wir sofort weiter: *Die beiden soeben mit b_1 und b_2 bezeichneten Punkte müssen Fixpunkte der in der betrachteten G_6 enthaltenen cyclischen G_3 sein.* Das beweist man vermittelst der Fig. 86 auch leicht direct. In der That setze man in derselben das Ausgangsdreieck dem an der gemeinsamen Spitze der 7ten und 8ten Randcurve liegenden Doppeldreiecke entsprechend und lasse von hier aus weiter benachbarten Dreiecken immer im gleichen Sinne benachbarte entsprechen. Da wird man finden, dass der Punkt b_1, wie b_2, sich selbst zugeordnet ist, dass aber dies auch die einzigen Fixpunkte der bezüglichen G_3 sind. Merken wir uns also den Satz: *In der G_{168} giebt es 28 cyclische Untergruppen G_3 von der dritten Ordnung; jede derselben besitzt zwei zu den Punkten b gehörige Fixpunkte.* Das stimmt denn

damit überein, dass wir auf der Fläche F_{168} in der That 56 unter einander äquivalente Punkte b zu verzeichnen hatten*).

Kehren wir nun noch kurz zur Betrachtung der im vorigen Paragraphen gewonnenen acht gleichberechtigten G_{21} zurück. Die sieben Geraden, welche in Fig. 86, p. 370, durch die Mitte des Polygons hindurchziehen, vereinen sich mit den sieben Paaren von Randcurven zu ebenso vielen Symmetrielinien. Diese sieben Symmetrielinien gehen allesamt durch die drei Fixpunkte c_1, c_3, c_5 der ursprünglich studierten G_7, haben aber übrigens keinen Schnittpunkt gemeinsam. Hierin liegt, wie man bemerkt, eine sehr einfache Definition der Tripel zusammengehöriger Punkte c**). Da ziehe man nun die G_8 heran, welche zu einer dieser sieben Symmetrielinien im soeben dargelegten Sinne gehört. Aus Fig. 89 sieht man, dass die Operationen der G_8 die drei Punkte c_1, c_3, c_5 cyclisch' permutieren, und aus dem Umstande entnimmt man leicht das Resultat, dass die Operationen der G_8 mit der zu den Fixpunkten c_1, c_3, c_5 gehörigen G_7 vertauschbar sind. *Jene sieben Symmetrielinien liefern also 7 G_8 und deren von der Identität verschiedene* 14 *Operationen bilden im Verein mit der G_7 die dieser Gruppe zugeordnete G_{21}.* Die Structur der Gruppen G_{21} ist damit vollständig aufgewiesen; man könnte dieselben als *halbmetacyclische* Gruppen bezeichnen (cf. unten II, 9).

§ 11. Die 21 kürzesten Linien der F_{168} und die Untergruppen G_8, G_4, G_2 in der G_{168}.

Um eine Reihe weiterer Untergruppen der G_{168} aufzustellen, haben wir in Fig. 86 eine einzelne Bahncurve derjenigen, übrigens hyperbolischen Substitution von s durch das Polygon gelegt, welche die Randcurve 10 in die zugeordnete Randcurve 5 überführt. Auf der geschlossenen Fläche F_{168} wird die eben gemeinte Bahncurve eine geschlossene Linie liefern, und um für diese einen zweckmässigen Namen zu besitzen, benennen wir sie (auf Grund einer nahe liegenden Überlegung) als *eine kürzeste Linie auf der Fläche F_{168}*. Wie

*) Erinnern wir hier wieder kurz an die entsprechenden Untergruppen der G_{60}. Den 28 G_3 des Textes entsprechen dort 15 G_3, bei deren Operationen die 15 Symmetriekreise des Ikosaeders bez. in sich verschoben werden. Im ganzen aber wird die einzelne Symmetrielinie durch die 4 Operationen einer Vierergruppe G_4 in sich transformiert, wobei diese G_4 offenbar den obigen G_8 entsprechen. Darin freilich liegt eine Abweichung, dass eine einzelne dieser G_4 immer zugleich drei Symmetriekreise in sich überführt, so dass die Zahl gleichberechtigter G_4 auf $15 : 3 = 5$ zurückgeht.

**) Man ziehe hier und weiterhin immer wieder das Ikosaeder zum Vergleich in Betracht, ohne dass wir dies ins einzelne stets besonders ausführen.

man sieht, durchzieht diese kürzeste Linie nur acht freie, sowie acht schraffierte Dreiecke des Polygons*). Wir wollen diese acht Dreiecke jeder Art mit den Nummern 1, 2, ···, 8 belegen, und zwar nummerieren wir dabei in der Reihe von links nach rechts. Hier ist nun sofort evident: Wird ein von der kürzesten Linie durchzogenes Dreieck in eines der acht anderen, mit ihm gleichartigen transformiert, so geht die kürzeste Linie in sich über, und zugleich giebt es in der G_{168} keine andere als diese acht Operationen, welche die betrachtete Linie in sich transformieren. Durch oft geübte Schlussweise folgt hieraus: *Es giebt auf der geschlossenen Fläche überhaupt* $168:8 = 21$ *kürzeste Linien beschriebener Art; dieselben sind alle unter einander äquivalent.*

Die acht Operationen, welche unsere in Fig. 86 gezogene kürzeste Linie in sich überführen, bilden eine Untergruppe G_8 vom Diedertypus. Wolle man nämlich das oben mit der Nummer 1 belegte freie Dreieck in das dritte überführen, so hat man damit eine Operation der Periode 4 charakterisiert, wie aus der Figur unmittelbar ersichtlich. Ausser dieser G_4 gehören der G_8 noch vier Operationen der Periode zwei an, deren einzelne jedesmal zwei von den 8 auf der kürzesten Linie gelegenen Punkten a zu Fixpunkten hat; in der That wird z. B. diejenige Operation der G_{168}, welche die freien Dreiecke 1, 2 permutiert, zugleich auch die freien Dreiecke 5, 6 austauschen, wie man aufs leichteste mit Hilfe der kürzesten Linie selbst darthut u. s. w. Der Diedertypus der G_8 ist damit zur Evidenz gebracht.

Wird durch die in Rede stehende G_8 nur die *eine* kürzeste Linie in sich übergeführt, von deren Betrachtung wir hier ausgingen, so giebt es in der G_{168} ersichtlich 21 gleichberechtigte Diedergruppen G_8. Dem gegenüber könnte es freilich auch eintreten, dass durch die fragliche G_8 nicht nur eine, sondern immer zugleich mehrere, etwa drei kürzeste Linien in sich übergeführt würden, wobei es dann nur 7 gleichberechtigte G_8 gäbe. Um hierüber zu entscheiden, bemerke man, dass in jeder G_8 eine cyclische G_4, in jeder solchen G_4 aber eine cyclische G_2 ausgezeichnet enthalten ist; können wir zeigen, dass die Zahl der gleichberechtigten G_2 in der G_{168} 21 ist, so gilt dasselbe von der Anzahl der G_4 und der G_8.

Als Erzeugende der in der oben besonders betrachteten G_4 enthaltenen G_2 werden wir diejenige Operation bezeichnen, welche das

*) Will man etwa bezweifeln, dass die 8 Punkte a dieser Dreiecke zugleich auf einer Bahncurve der Teilung (2, 3, 7) gelegen sein, so setze man an Stelle der punktierten Linie die in die Figur gleichfalls aufgenommene Zickzacklinie; diese letztere leistet für unsere Zwecke dasselbe, wie jene.

freie Dreieck 1 unserer kürzesten Linie in das freie Dreieck 5 überführt. Durch diese Operation wird aber ganz offenbar diejenige Symmetrielinie in sich übergeführt, die vertical durch die Mitte der Figur 86 zieht. Demgemäss wissen wir schon aus vorigem Paragraphen, dass besagte G_2 auf dieser Symmetrielinie zwei Fixpunkte a hat; unsere G_2 gehört also zu den Gruppen, bei deren Operationen Punkte a erhalten bleiben. Die Gesamtzahl dieser Punkte war 84. Möge also jede unserer G_2 m Fixpunkte a besitzen, so wird die Anzahl gleichberechtigter Untergruppen G_2 dieser Art offenbar $\frac{84}{m}$ sein. Zur Bestimmung von m ist nun die in Fig. 87, p. 372, gegebene Anordnung des Polygons sehr brauchbar. Diese Figur setzt sich aus vier abwechselnd indirect und direct kreisverwandten Quadranten zusammen, welche von den beiden durch den Punkt a_1 der Fig. 87 gehenden Symmetriekreisen begrenzt werden. Betrachten wir nun diejenige der hier gemeinten Operationen der Periode zwei, welche a_1 zum Fixpunkt hat. Dieselbe permutiert den ersten und dritten, sowie auch den zweiten und vierten unserer Quadranten. Jetzt wollen wir direct zusehen, welche Punkte a bei dieser Operation sich selbst zugeordnet sind. Offenbar kann ausser a_1 kein Punkt a, der im Innern des Polygons Fig. 87 liegt, sich selbst entsprechen. Weitere etwa vorhandene Fixpunkte der gedachten Operation haben wir also auf der Berandung unseres Polygons zu suchen. Da ist zuvörderst deutlich, dass die vier in Fig. 87 mit a_2 bezeichneten Ecken für die geschlossene Fläche in der That einen Fixpunkt a unserer G_2 liefern, während alle übrigen Ecken Punkte b oder c liefern. Der Rest der in Betracht kommenden Fixpunkte ist unter den von den Ecken verschiedenen Randpunkten a zu suchen. Nun geht bei Fig. 87 die Randcurve mit der Nummer ν durch Ausführung der zu Grunde liegenden Operation in die $(\nu + 16)^{\text{te}}$ Randcurve über. Soll also eine Randcurve einen Fixpunkt a der gesuchten Art tragen, so muss sie ersichtlich durch die für Fig. 87 geltende Zusammengehörigkeit der Ränder der $(\nu + 16)^{\text{ten}}$ Randcurve zugewiesen sein. Wolle man demnach in der Tabelle der Fig. 87 nachsehen, wie oft die Differenz der Nummern einander zugewiesener Randcurven 16 ist. Das trifft zweimal ein, nämlich bei 5—21 und 12—28. Wir finden so in a_3 und a_4 noch zwei weitere Fixpunkte, ausser welchen nun aber noch andere nicht existieren. Es ist sonach $m = 4$ und wir gewinnen zusammenfassend das Resultat: *Den* 21 *kürzesten Linien entsprechend giebt es in der* G_{168} *im ganzen* 21 *gleichberechtigte cyclische* G_4 *und in ihnen ebenso viele cyclische* G_2; *bei den Operationen der Periode* 4 *bleibt selbstverständlich*

kein Punkt der F_{168} fest, die einzelne G_2 aber besitzt je vier von den 84 *Punkten a zu Fixpunkten. Als eine unter* 21 *gleichberechtigten ist die einzelne G_2 vertauschbar mit acht Operationen einer G_8, und wir kommen so zurück zu den* 21 *gleichberechtigten Diedergruppen G_8, die wir bereits oben kennen lernten**).

Berechnen wir jetzt die Gesamtzahl der verschiedenen, nun zur Geltung gekommenen Operationen der G_{168}. Die 8 G_7 enthielten $8 \cdot 6$ verschiedene Operationen der Periode 7, die 28 G_3 desgleichen $28 \cdot 2$ Operationen der Periode 3, die 21 G_4 endlich $21 \cdot 3$ Operationen der Periode 4 bez. 2. Fügen wir ihnen hinterher noch die Identität hinzu, so sind das zusammen $8 \cdot 6 + 28 \cdot 2 + 21 \cdot 3 + 1 = 168$ Operationen. *Im Vorhergehenden haben wir also alle Operationen der G_{168} berücksichtigt und daher alle cyclischen Untergruppen der G_{168} kennen gelernt.* An nichtcyclischen Untergruppen der G_{168} finden sich ausser den schon genannten G_{21}, G_6 und G_8 aber noch zwei weitere Arten, zu deren Aufstellung wir sehr leicht von den 21 gleichberechtigten G_8 aus gelangen, wie wir im folgenden Paragraphen zeigen wollen**).

§ 12. Die Vierergruppen G_4 und Oktaedergruppen G_{24} in der G_{168}.

Nennen wir v_1 die Erzeugende einer cyclischen G_4, die wir beliebig aus der Zahl der 21 gleichberechtigten Gruppen dieser Art auswählen; v_2 sei eine von v_1^2 verschiedene, mit G_4 vertauschbare Operation der Periode zwei. Alsdann haben wir in

$$(1) \qquad \begin{matrix} 1, & v_1, & v_1^2, & v_1^3 \\ v_2, & v_2 v_1, & v_2 v_1^2, & v_2 v_1^3 \end{matrix}$$

die Operationen einer der 21 gleichberechtigten Diedergruppen G_8. Hier stehen in der zweiten Reihe lauter Operationen der Periode zwei, und es ist z. B. $v_2 v_1 v_2 v_1 = 1$, was wir auch

$$(2) \qquad v_2^{-1} v_1 v_2 = v_1^{-1}$$

schreiben können; die Operation v_1 wird also durch v_2 in ihre inverse Operation transformiert.

Bemerke man jetzt, dass innerhalb unserer G_8 die vier Operationen

$$(3) \qquad v_1^2, \quad v_2, \quad v_2 v_1^2, \quad 1$$

---

*) Den 21 G_4 der G_{168} entsprechen in der Ikosaedergruppe G_{60} die 10 G_3 und den 21 Diedergruppen G_6 der G_{168} die 10 Diedergruppen G_6 der G_{60}, wie wir später noch näher auf arithmetischem Wege darthun wollen.

**) Es schien zweckmässig, dabei an Stelle der bisherigen geometrischen Überlegungen nunmehr ein abstractes Schlussverfahren zu verwenden.

für sich eine Untergruppe G_4 vom Vierertypus bilden, wie aus (2) leicht folgt. Da man des weiteren aus (2) leicht $v_1^{-1}v_2v_1 = v_2v_1^2$ und $v_1^{-1}(v_2v_1^2)v_1 = v_2$ ableitet, so wird diese G_4 durch v_1 und sonach überhaupt durch alle Operationen der G_8 in sich transformiert. In ganz analoger Weise bilden die vier Operationen

$$(4) \qquad v_1^2, \quad v_2v_1, \quad v_2v_1^3, \quad 1$$

ebenfalls eine Vierergruppe G_4', die wiederum mit allen Operationen der G_8 vertauschbar ist*).

Ohne weiteres steht hiernach fest, dass wir innerhalb jeder der 21 G_8 zwei Vierergruppen finden, von denen die eine mit G_4, die andere mit G_4' gleichberechtigt sein wird. Aber es ist sehr zu betonen, dass wir solchergestalt nicht 21 verschiedene mit G_4 gleichberechtigte Vierergruppen erhalten, sondern nur sieben. Bei Gewinnung der durch (3) gegebenen G_4 gingen wir nämlich von derjenigen G_8 aus, die v_1^2 als ausgezeichnete Operation der Periode zwei enthielt. Gehen wir ein anderes Mal von der G_8 aus, die v_2 in solcher Weise enthält, so werden wir innerhalb dieser G_8 zwei Vierergruppen finden, von denen eine gerade wieder die G_4 der Operationen (3) ist, und ebenfalls gelangen wir zur nämlichen G_4 von der G_8 aus, die $v_2v_1^2$ ausgezeichnet enthält. Daher geht in der That die Zahl der solcher Weise entstehenden gleichberechtigten Vierergruppen auf $21:3 = 7$ zurück.

Indem übrigens dieselbe Bemerkung auf G_4' Anwendung findet, gewinnen wir zwei Systeme von je 7 Vierergruppen, wobei dem ersteren Systeme G_4, dem anderen G_4' angehört. Die sieben Gruppen des einzelnen Systemes sind, wie wir schon bemerkten, unter einander gleichberechtigt; es tritt aber hierüber hinaus die Frage ein, ob die Gruppen des einen Systems mit denen des anderen gleichberechtigt sein mögen oder nicht. Sicher sind ja innerhalb der einzelnen G_8 die beiden in ihr nachgewiesenen Vierergruppen nicht gleichberechtigt; aber es könnte sein, dass dieselben doch mit einander gleichberechtigt würden, sobald man von der G_8 zur Gesamtgruppe G_{168} aufsteigt. Solches ist indes *nicht* der Fall. Gäbe es nämlich 14 gleichberechtigte Vierergruppen, so müsste deren einzelne mit den $168:14 = 12$ Operationen einer G_{12} vertauschbar sein. Nun wissen wir aber bereits, dass die einzelne Vierergruppe mit den 8 Operationen einer sie enthaltenden G_8 vertauschbar ist; selbige G_8 wäre somit in einer G_{12} enthalten, was

*) Wir kommen hiermit auf die Sätze über Gleichberechtigung der Untergruppen zweiter Ordnung einer Diedergruppe von geradem n zurück; man vergl. darüber „Ikos." p. 10, 11.

unmöglich ist. Wir haben solchergestalt das Resultat gewonnen: *Es giebt in der G_{168} zwei Systeme von je sieben gleichberechtigten Vierergruppen G_4; diese beiden Systeme sind unter einander nicht gleichberechtigt.*

Als eine unter sieben gleichberechtigten Untergruppen ist die einzelne Vierergruppe mit 24 Operationen der G_{168} vertauschbar, die eine G_{24} bilden. Wollen wir hier zum Schluss noch die Structur dieser G_{24} ein wenig näher untersuchen. *Dass sie eine Vierergruppe ausgezeichnet enthält*, ist gerade nur die Umkehrung des vorletzten Satzes. *Sie wird überdies diejenigen drei cyclischen G_4 enthalten*, welche die drei, in jener Vierergruppe auftretenden Operationen der Periode zwei in sich schliessen. Die gemeinten drei cyclischen G_4 enthalten zusammen zehn verschiedene Operationen der G_{24}, und es bleiben also noch 14 weitere zurück, deren Eigenart wir noch zu bestimmen haben. Nun wird die einzelne unserer 7 G_{24} sicher wenigstens eine G_3 enthalten*). Solcher G_3 haben wir 28 gleichberechtigte und nehmen jetzt an, dass sich jede derselben an ν verschiedenen unter den 7 G_{24} beteilige. Dann werden sich offenbar 28ν G_3 auf unsere 7 G_{24} verteilen (jede G_3 so oft gezählt, als sie in den G_{24} auftritt), so dass auf die einzelne G_{24} im ganzen $28\nu : 7 = 4\nu$ Gruppen G_3 entfallen. Diese liefern 8ν Operationen der Periode drei, welche sonach unter jenen 14 noch nicht bestimmten Operationen der G_{24} Platz finden müssen. Es ist demgemäss $8\nu \leq 14$, d. i. $\nu = 1$, *so dass die G_{24} vier cyclische Untergruppen G_3 enthält.* Nunmehr bleiben nur noch 6 Operationen der G_{24} unbekannt; diese können aber nur solche der Periode zwei sein, da die G_{168} anderweitige Operationen für die G_{24} nicht mehr zu liefern vermag. Merken wir uns also, *dass in der G_{24} endlich noch 6 cyclische Untergruppen G_2 enthalten sind.*

Die in der G_{24} nachgewiesenen cyclischen Untergruppen stimmen nun, was Zahl und Ordnung angeht, bis ins einzelne mit den cyclischen Untergruppen der *Oktaedergruppe* überein, und auch der Umstand, dass unsere G_{24} eine Vierergruppe ausgezeichnet enthält, kommt auf eine wohlbekannte Eigenschaft der Oktaedergruppe zurück. In der That haben wir in unserer G_{24} eine Untergruppe vom Oktaedertypus vor uns, wie wir später sehen werden, übrigens auch hier ohne Mühe beweisen könnten. Indem wir uns vorbehalten, diesen Nachweis später zu erbringen, formulieren wir hier sogleich das Resultat: *Es giebt in der G_{168} zwei Systeme von je sieben gleichberech-*

*) Zufolge des zu den Elementen der Gruppentheorie gehörenden Cauchy'schen Satzes.

tigten Untergruppen G_{24} vom Oktaedertypus. Damit sind nun aber, wie wir gleichfalls hier vorgreifend anführen, alle in der G_{168} überhaupt enthaltenen Untergruppen thatsächlich erschöpft*); es ist also das Problem, mit dem wir uns in den letzten Paragraphen beschäftigten, thatsächlich zu Ende geführt.

Nunmehr würde sich die Aufgabe anschliessen, zur Modulgruppe selbst wieder zurückzugehen, um den gefundenen Untergruppen der G_{168} entsprechend ebenso viele Untergruppen siebenter Classe der Modulgruppe zu definieren und des näheren der Untersuchung zu unterwerfen. Hier werden aber keineswegs alle den Untergruppen der G_{168} entsprechenden Gruppen das gleiche Interesse verdienen. Behalten wir uns also vor, die gekennzeichnete Aufgabe späterhin nur für diejenigen der hier in Rede stehenden Untergruppen explicite durchzuführen, für welche der Gang unserer weiteren Entwicklung dies wünschenswert erscheinen lässt.

Uberhaupt aber brechen wir hier die geometrischen Betrachtungen der letzten Kapitel ab. Der Verzweigungssatz hat uns in dem jetzt zu Ende geführten Kapitel auf Grund genauer Betrachtung der Figuren zur Kenntnis einer Reihe von Untergruppen geführt, deren Gewinnung auf dem durchlaufenen Wege deshalb keinen besonderen Schwierigkeiten begegnete, weil die bezüglichen Fundamentalpolygone noch übersichtlich genug gestaltet waren. Vermöge derselben Methodik könnten wir hier auch noch einige weitere ausgezeichnete Untergruppen vorlegen und der näheren Untersuchung unterziehen. Aber wir dürfen nicht verschweigen, dass diese concrete Art der geometrischen Betrachtungsweise zur expliciten Aufstellung von Untergruppen der Modulgruppe nur einen äusserst beschränkten Spielraum der Anwendung besitzt, da sich in der That die Polygone bei nicht mehr ganz niederen Anzahlen der sie zusammensetzenden Dreiecke nicht mehr direct überblicken lassen.

Wollen wir also in der expliciten Aufstellung der Untergruppen der Modulgruppe vorwärts kommen, so werden wir noch andere, über die unmittelbare geometrische Anschauung hinausgehende Hilfsmittel

---

*) Die im letzten Paragraphen betrachteten Untergruppen stellen sich offenbar in Parallele mit den fünf Vierergruppen und den bezüglichen fünf Tetraedergruppen, die in der Ikosaedergruppe enthalten sind. Bemerke man übrigens auch noch, dass die G_{168}, wie die G_{60}, einfach ist, d. i. keine ausgezeichnete Untergruppe enthält, ein für später besonders wichtiger Umstand, den wir hier indessen nur erst beiläufig erwähnen können.

zur Definition von Untergruppen heranziehen müssen. Solche entspringen für uns aus der *arithmetischen Betrachtung* der Modulsubstitutionen, zu welcher wir nun übergehen wollen. Freilich bleibt auch da eine erschöpfende Theorie zunächst ausgeschlossen; wir gewinnen aber mit grosser Leichtigkeit eine Reihe bemerkenswerter neuer Resultate. In der That werden wir auf dem bezeichneten Wege in den nächsten Kapiteln zu einer ganzen Gattung wichtiger ausgezeichneter Untergruppen geführt, als deren niederste Specialfälle wir die Γ_6, Γ_{12}, Γ_{24}, Γ_{60}, Γ_{72} und Γ_{168} des gegenwärtigen Kapitels wiedererkennen werden.

Siebentes Kapitel.

Von den in der Modulgruppe enthaltenen Congruenzgruppen der n^{ten} Stufe.

Durch die bisherigen Erörterungen ist das gruppentheoretische Grundproblem in gewisser Weise zur Lösung gebracht. Wir können die Untergruppen durch ihre Fundamentalpolygone und damit jeweils durch ein System von erzeugenden Substitutionen definieren, und es ist z. B. die Aufzählung aller Untergruppen eines gegebenen endlichen Index μ auf eine ausführbare Kette von Operationen zurückgeführt.

Haben wir solchergestalt einmal eine Untergruppe Γ_μ gewonnen, so wird man doch nun sicher auch die tiefer gehende Frage aufwerfen können, welche arithmetischen Merkmale die besonderen in der Γ_μ enthaltenen Modulsubstitutionen vor den übrigen voraus haben, denen zufolge jene Substitutionen, unter sich combiniert, immer nur wieder eine Substitution aus „ihrer" Reihe erzeugen und also eine „Gruppe" Γ_μ bilden. Gewiss würde eine erschöpfende Behandlung dieser arithmetischen Seite des gruppentheoretischen Grundproblems ein notwendiges Glied in der vollständigen Lösung dieses Problems sein; aber die Umstände bringen es mit sich, dass wir in diesem Betracht zunächst noch weit von einer abschliessenden Behandlung unseres Problems entfernt sind. In der That bleibt in dem hiermit gekennzeichneten Gebiete für künftig durchzuführende Untersuchungen noch ein weiter Spielraum. Versuchen wir hier immerhin, wenigstens für die im vorigen Kapitel explicit aufgestellten Gruppen die arithmetische Fragestellung zu erledigen. Wir werden auf dem Wege wenigstens eine erste Classe von Untergruppen der Modulgruppe gewinnen, die wir auch arithmetisch zu beherrschen vermögen.

§ 1. Die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe.

Die erste in der Reihe der Untergruppen $\Gamma_{(n)}$ war die im vierten Kapitel p. 270 u. f. untersuchte Γ_6. Wir hatten dieselbe gleich anfangs auf arithmetischem Wege eingeführt, indem wir sie durch die For-

derung festlegten, dass die Coefficienten β, γ ihrer Substitutionen gerade sein sollten, oder dass sie also alle den Congruenzen

$$\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0, \quad (\text{mod. } 2)$$

genügenden Modulsubstitutionen erster Art enthalten sollte. Von hier aus gewinnen wir leicht einen ersten Gesichtspunkt für die vorgelegte Frage nach dem arithmetischen Charakter der Untergruppen, den wir etwa zuvörderst für die Gruppe $\Gamma_{(n)}$ zu erforschen versuchen. Ein Blick auf die erzeugenden Substitutionen der $\Gamma_{(n)}$ (Formel (3) p. 360) überzeugt uns, dass dieselben ohne Ausnahme den Congruenzen genügen:

$$(1) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv \pm 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0, \quad (\text{mod. } n);$$

und nun bemerkt man sofort, *dass ganz allgemein zwei Modulsubstitutionen erster Art:*

$$(2) \qquad V = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix},$$

die beide den Congruenzen (1) *genügen, mit einander combiniert in*

$$VV' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}$$

eine Substitution liefern, die wiederum den Congruenzen (1) *genügt. Alle Modulsubstitutionen erster Art, welche* (1) *befriedigen, bilden sonach eine Untergruppe, die wir als Hauptcongruenzgruppe* n^{ter} *Stufe benennen und durch* $\Gamma_{\mu(n)}$ *bezeichnen wollen**).

Die Gruppe $\Gamma_{(2)} = \Gamma_6$ ist, wie wir sehen, mit der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe ohne weiteres identisch. Allgemein ist vorerst nur zu schliessen, dass $\Gamma_{(n)}$ eine Untergruppe der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe ist; es bleibt aber noch zu entscheiden, ob $\Gamma_{(n)}$ direct mit $\Gamma_{\mu(n)}$ identisch ist oder nicht. Trifft ersteres zu, so haben wir den arithmetischen Charakter von $\Gamma_{(n)}$ erschöpfend gekennzeichnet, indem wir in ihr die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe erkennen; fällt indessen $\Gamma_{(n)}$ mit dieser Hauptcongruenzgruppe nicht zusammen, so haben wir den arithmetischen Charakter der Substitutionen von $\Gamma_{(n)}$ vermöge der Congruenzen (1) nur erst teilweise aufgewiesen. Welcher von beiden Fällen für das einzelne n zutrifft, wollen wir jetzt dadurch zur Entscheidung bringen, dass wir vor allen Dingen die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe der näheren Betrachtung unterziehen. Überhaupt ist es diese Untergruppe, welche fortan im Mittelpunkt der Untersuchung stehen wird.

---

*) Indem wir hier von einer Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe sprechen, ist schon durch den Ausdruck angedeutet, dass wir späterhin noch andere Congruenzgruppen n^{ter} Stufe gewinnnen werden; man vgl. darüber § 6 dieses Kapitels p. 399.

Zur Ableitung eines ersten wichtigen Satzes transformiere man die beliebige Modulsubstitution erster Art V vermöge der Spiegelungen A, B, C. Eine leichte Zwischenrechnung ergiebt:

$$A^{-1}VA = \begin{pmatrix} \alpha, & -\beta \\ -\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad C^{-1}VC = \begin{pmatrix} \delta, & \gamma \\ \beta, & \alpha \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}VB = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma, & \alpha-\beta+\gamma-\delta \\ -\gamma, & -\gamma+\delta \end{pmatrix}.$$

Gehört V der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe an, so gilt ersichtlich ein Gleiches von jeder dieser drei Operationen, und somit folgt aus früheren Sätzen: *Die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe $\Gamma_{\mu(n)}$ ist in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ ausgezeichnet.* Dieselbe erscheint demnach der Erweiterung durch irgend eine beliebig gewählte Spiegelung fähig. Dass sie übrigens im Sinne des vorigen Kapitels *der n^{ten} Classe* angehört und also ein Verzweigungsschema $\{2, 3, n\}$ besitzt, brauchen wir nicht erst noch ausführlich zu beweisen.

§ 2. Die Modulsubstitutionen modulo n betrachtet. Die zur $\Gamma_{\mu(n)}$ gehörende Gruppe $G_{\mu(n)}$.

Zur ferneren Discussion treffen wir hier die Verabredung, dass irgend zwei Modulsubstitutionen *einander modulo n congruent* heissen sollen, wenn die Congruenzen der ersten oder zweiten nachfolgenden Reihe zutreffen:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{llll} \alpha' \equiv \alpha, & \beta' \equiv \beta, & \gamma' \equiv \gamma, & \delta' \equiv \delta \\ \alpha' \equiv -\alpha, & \beta' \equiv -\beta, & \gamma' \equiv -\gamma, & \delta' \equiv -\delta \end{array}\right\} (\text{mod. } n).$$

Wir drücken solches hinfort kurz durch die Formel

$$V' \equiv V, \quad (\text{mod. } n)$$

aus. Unter Gebrauch dieser Bezeichnungsweise wird man sagen können, *dass $\Gamma_{\mu(n)}$ aus allen mit der identischen Substitution* 1 *modulo n congruenten Substitutionen:*

$$(2)\qquad V \equiv 1, \quad (\text{mod. } n)$$

besteht.

Die somit definierte Congruenz der Modulsubstitutionen erster Art ist von folgenden Sätzen beherrscht: Ist eine von irgend zwei Substitutionen V, V' (immer mod. n gedacht) der Identität congruent, so ist VV' mit der anderen congruent. Sind ein ander Mal zwei Substitutionen V, V' unter einander congruent, so ist $V'V^{-1} \equiv 1$; sind aber V und V' incongruent, so ist $V'V^{-1}$ nicht mit der Identität congruent. Von den aufgestellten Sätzen gelten zugleich die Umkehrungen, wie man alles aufs leichteste durch Rechnung zeigt.

Auf Grund dieser Verhältnisse folgt betreffs des zur $\Gamma_{\mu(n)}$ im Sinne von II, 5 § 1 gehörenden Schemas: *Alle in der einzelnen Horizontalreihe angeordneten Substitutionen sind modulo n einander congruent, und umgekehrt sind keine, zwei verschiedenen Horizontalreihen angehörende Substitutionen modulo n congruent.* Und weiter: *Die Anzahl $\mu(n)$ der Horizontalreihen ist gleich der Anzahl modulo n incongruenter Modulsubstitutionen erster Art.* Nehmen wir demnach die Substitutionscoefficienten einer Modulsubstitution nur noch modulo n oder, wie wir kurz sagen wollen, unterscheiden wir die Modulsubstitutionen nur noch mod. n, so reduciert sich die Gesamtgruppe Γ auf eine Gruppe $G_{\mu(n)}$, welche der Hauptcongruenzgruppe, als einer ausgezeichneten Untergruppe, in bekannter Weise zugeordnet ist*). *Diese $G_{\mu(n)}$ ist durch Vermittlung der Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(n)}$ auf die Gesamtgruppe der Modulsubstitutionen isomorph bezogen.*

Um aber noch eine sehr viel bequemere Definition für die Operationen der Gruppe $G_{\mu(n)}$ zu gewinnen, denken wir die Coefficienten einer beliebigen Modulsubstitution erster Art $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ mod. n auf ihre kleinsten nicht negativen Reste reduciert. Mögen auch diese Reste wieder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ heissen, wo aber nun diese ganzen Zahlen im allgemeinen nur noch eine *modulo n mit der Einheit congruente* Determinante haben:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1, \quad (\text{mod. } n). \tag{3}$$

Reducieren wir jetzt die erste Horizontalreihe des gedachten Schemas mod. n, so erhalten wir nur die *zwei* verschiedenen Zahlquadrupel bezeichneter Art $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}n-1, & 0\\ 0, & n-1\end{pmatrix}$; reducieren wir entsprechend irgend eine andere Horizontalreihe, so erhalten wir bestimmte *zwei* der Congruenz (3) genügende Zahlquadrupel:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}n-\alpha, & n-\beta\\ n-\gamma, & n-\delta\end{pmatrix},$$

die mod. n stets verschieden sind. Überdies ist ersichtlich, dass sich keine zwei verschiedene Reihen auf dasselbe Paar von Zahlquadrupeln reducieren können. Nun aber gelingt es auf der anderen Seite (wie

*) Die erweiterte Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ reduciert sich in entsprechender Weise auf eine $\overline{G}_{\mathfrak{Z}\mu(n)}$ die aus $G_{\mu(n)}$ etwa durch Zusatz der Operation A entspringt. Wir werden späterhin diese $\overline{G}_{\mathfrak{Z}\mu(n)}$ wieder mit in Betracht ziehen; bei den nächsten grundlegenden Betrachtungen wird es indes zweckmässig sein, $G_{\mu(n)}$ allein im Auge zu behalten.

wir sogleich ausführen) leicht, umgekehrt zu irgend einem der Congruenz (3) genügenden Zahlquadrupel eine mod. n congruente Modulsubstitution nachzuweisen. Wir haben also das Resultat: *Der Index der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe ist halb so gross, als die Anzahl modulo n incongruenter Lösungen der Congruenz* (3). *Die diesen Lösungen entsprechenden Zahlquadrupel* $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ *können wir als Operationen der Gruppe* $G_{\mu(n)}$ *ansprechen.* Mit ihnen werden wir dann gerade wie mit Modulsubstitutionen rechnen, nur dass wir nach Combination zweier Operationen die Coefficienten jedesmal wieder modulo n reducieren; dabei ist natürlich stets zu beachten, dass je zwei Quadrupel $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}n-\alpha, & n-\beta\\ n-\gamma, & n-\delta\end{pmatrix}$, die sich also, mod. n genommen, nur im Vorzeichen ihrer Zahlen unterscheiden, ein und dieselbe Operation der $G_{\mu(n)}$ darstellen. Wir werden die Bezeichnung $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu(n)-1}$ für die solchergestalt definierten Operationen vom $G_{\mu(n)}$ beibehalten und merken uns endlich noch an, *dass die Gruppe* $G_{\mu(n)}$ *aus ihren beiden Operationen:*

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & , & 1\\ n-1, & & 0\end{pmatrix},$$

die wir als Operationen der $G_{\mu(n)}$ *durch S und T bezeichnen werden, erzeugt werden kann.* In der That sind ja beim Isomorphismus der Gruppe $G_{\mu(n)}$ und der Modulgruppe Γ diese beiden Operationen den Modulsubstitutionen S bez. T zugeordnet, welche letztere erzeugende Substitutionen der Modulgruppe Γ waren.

Ergänzend haben wir noch den soeben als richtig angenommenen Satz zu zeigen: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend vier ganze, die Congruenz (3) befriedigende Zahlen, so lassen sich immer vier weitere ganze Zahlen a, b, c, d derart bestimmen, dass

$$\alpha' = \alpha + na, \quad \beta' = \beta + nb, \quad \gamma' = \gamma + nc, \quad \delta' = \delta + nd$$

der Gleichung $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ Genüge leisten. Zum Beweise nehmen wir einfach $a = 0$ und können dann b jedenfalls so bestimmen, dass β' relative Primzahl gegen α' ist. Ist nämlich α' prim gegen n, so kann man b so bestimmen, dass die Congruenz $\beta' = \beta + nb \equiv 1$, (mod. α') erfüllt ist, worauf β' jedenfalls relativ prim zu α' ist. Haben aber α' und n Primfactoren gemein, so wird infolge (3) β' sicher durch diese nicht teilbar sein. Wolle man alsdann diese Primfactoren aus α' abstreifen, wonach die gegen n relativ prime Zahl α_0' rückbleiben möge. Dann können wir offenbar durch passende Wahl von b die Congruenz $\beta' = \beta + nb \equiv 1$, (mod. α_0') befriedigen und finden so

ein gegen α' primes β'. Für die nun gefundenen α', β' ist nach wie vor $\alpha'\delta - \beta'\gamma \equiv 1$, (mod. n) und wir setzen dementsprechend:

$$\alpha'\delta - \beta'\gamma = 1 + en.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung γ und δ durch γ' und δ', so ist

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' - n(\alpha' d - \beta' c) = 1 + en,$$

und wenn hier endlich noch c und d der Bedingung $\alpha' d - \beta' c = -e$ gemäss gewählt werden, was bei relativ primen α', β' keine Schwierigkeiten hat, so entspringt in der That, was wir wollten:

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1.$$

§ 3. Von den homogenen Modulsubstitutionen und ihren Gruppen. Die homogene Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe.

In den voraufgehenden Kapiteln, wo die Betrachtung der Modulteilung und der in ihr abgegrenzten Fundamentalpolygone durchaus im Vordergrunde stand, war der Gebrauch der nicht-homogenen Modulsubstitutionen allein am Platze. Für den Rest des gegenwärtigen Abschnitts nimmt indessen die Untersuchung, wie wir bereits sagten, einen vorwiegend arithmetischen Charakter an, wodurch es zweckmässig wird, fortan auch wieder die homogenen Modulsubstitutionen

$$(1) \qquad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

heranzuziehen. In dieser Gestalt lernten wir unsere Substitutionen ja allererst kennen (cf. p. 57 u. f.), und wir haben bereits im vierten Kapitel des ersten Abschnitts (p. 143) die Gesamtheit der Substitutionen (1) als homogene Modulgruppe bezeichnet und deren hemiedrischen Isomorphismus zur nicht-homogenen Modulgruppe aufgewiesen. Hernach (Note zu p. 219) erkannten wir in den beiden Substitutionen

$$S: \qquad \omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2,$$

$$T: \qquad \omega_1' = -\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1$$

ein System von Erzeugenden für die homogene Modulgruppe, um auch hieran noch kurz zu erinnern.

Auch noch weiter hätten wir im Verlaufe des gegenwärtigen Abschnitts an einigen Stellen der homogenen Modulsubstitutionen gedenken können. Direct zu ihnen wurden wir z. B. in Kap. 3 geführt, als es sich um Transformation und Aquivalenz der quadratischen Formen handelte (cf. p. 244). Vor allem aber hätten wir auch im ersten Kapitel die homogenen Modulsubstitutionen heranziehen können, um von den cyclischen Gruppen zu handeln, die durch Wiederholung der einzelnen unter jenen Substitutionen erzeugt werden. Stellen wir hier nachträglich in dieser Hinsicht einige Sätze zusammen.

Durch den Isomorphismus unserer beiden Gruppen ist der Identität 1 der nicht-homogenen Modulgruppe eine ausgezeichnete Untergruppe zweiter Ordnung der homogenen Modulgruppe zugeordnet, die ersichtlich die Substitutionen $\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ enthält, welche als homogene Substitutionen gedacht in der That von einander verschieden sind. Indem wir also, so oft $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ die homogene Modulsubstitution (1) bedeuten soll, einen gleichzeitigen Zeichenwechsel der vier Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht mehr vornehmen dürfen, schliessen wir übrigens durch leichteste Rechnung, dass $\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ die einzige homogene Modulsubstitution der Periode *zwei* ist. Es folgt daraus sogleich der Satz, *dass es in der homogenen Modulgruppe keine Untergruppe vom Index zwei geben kann, die der nicht-homogenen Modulgruppe holoedrisch isomorph wäre;* denn es fehlen ja, wie wir gerade sagten, in der homogenen Gruppe die cyclischen Untergruppen zweiter Ordnung*).

Den cyclischen Untergruppen 2ter und 3ter Ordnung der nicht-homogenen Gruppe sind in der homogenen Gruppe Untergruppen der vierten bez. sechsten Ordnung zugeordnet. Auch diese beiden Arten von Untergruppen müssen *cyclisch* sein, wie wiederum aus dem Umstande folgt, dass $\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ die einzige homogene Modulsubstitution der Periode zwei ist. In der That bestätigt man den cyclischen Charakter der gedachten Untergruppen 4ter und 6ter Ordnung aufs leichteste durch Rechnung, wobei sich nebenher noch der Satz zeigt: *Eine homogene Modulsubstitution mit* $\alpha + \delta = +1$ *ist von der Periode sechs; sie ist dagegen von der Periode drei, wenn* $\alpha + \delta = -1$ *ist.*

Einer cyclischen Untergruppe aus parabolischen Substitutionen der nicht-homogenen Gruppe ist in der anderen hemiedrisch isomorph eine Untergruppe zugeordnet, die nicht mehr die Structur der cyclischen Gruppe besitzt. Man benutze z. B. die aus S entspringende nicht-homogene Gruppe. Die entsprechende homogene Gruppe enthält dann neben einander (und zwar als nicht gleichberechtigt) zwei um-

*) Die ausgezeichnete aus nicht-homogenen Modulsubstitutionen bestehende Γ_2, von der p. 288 die Rede war, enthält die elliptischen Substitutionen der Periode zwei nicht. Ihr ist nun in der That durch den Isomorphismus eine „homogene" Γ_2 zugeordnet, innerhalb deren eine mit der nicht-homogenen Γ_2 „holoedrisch" isomorphe Untergruppe enthalten ist, die in der gesamten homogenen Gruppe eine Γ_4 ist; wir können das hier nur nebenher anführen. Vergl. übrigens das entsprechende Problem in „Ikos." p. 44 u. f.

fassendste cyclische Untergruppen, deren eine aus $\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$, deren andere aus $\begin{pmatrix}-1, & -1\\ 0, & -1\end{pmatrix}$ erzeugt wird. Jedesmal das zweite Glied haben diese beiden cyclischen Gruppen gemeinsam.

Ähnlich wie bei den parabolischen gestalten sich die Dinge für die aus hyperbolischen nicht-homogenen Substitutionen entspringenden cyclischen Untergruppen der Modulgruppe; wir verfolgen das nicht weiter*).

Um jetzt zur Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe zurückzulenken, so erweist sich dieselbe auf Grund der soeben gegebenen Entwicklungen hemiedrisch isomorph mit einer ausgezeichneten Untergruppe der homogenen Modulgruppe vom Index $\mu(n)$, welche alle homogenen Modulsubstitutionen enthält, die mod. n mit $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}$ congruent ausfallen. Aber es ist sehr wichtig, dass innerhalb der so gefundenen homogenen Gruppe eine Untergruppe enthalten ist, die mit der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe holoedrisch isomorph ist. *In der That bestätigt man sofort, dass alle mit* $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ *congruenten homogenen Modulsubstitutionen, d. i. alle den Congruenzen*

$$\alpha \equiv \delta \equiv +1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0, \quad (\text{mod. } n) \tag{2}$$

genügenden eine Untergruppe bilden, die in sofort verständlicher Weise holoedrisch isomorph auf die nicht-homogene Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe bezogen ist. Die so gefundene ausgezeichnete Untergruppe, welche wir fortan *„die homogene Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe"* nennen, besitzt ersichtlich in der homogenen Modulgruppe den Index $2\mu(n)$. Indem wir sie in der weiteren Betrachtung zu Grunde legen, haben wir den bedeutenden Vorteil, dass sich die Operationen der bezüglichen homogenen $G_{2\mu(n)}$ direct ohne Einschränkung von den $2\mu(n)$ incongruenten Lösungen der Congruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1, \quad (\text{mod. } n) \tag{3}$$

hernehmen lassen, während vordem, bei der nicht-homogenen Hauptcongruenzgruppe, immer zwei verschiedene solche Lösungen je dieselbe Operation von $G_{\mu(n)}$ bestimmten**).

*) Auch die Modulsubstitutionen zweiter Art hätten wir homogen

$$\omega_1' = \alpha\overline{\omega}_1 - \beta\overline{\omega}_2, \quad \omega_2' = \gamma\overline{\omega}_1 - \delta\overline{\omega}_2$$

schreiben können, wo sie mit den homogenen Modulsubstitutionen erster Art zusammen „die homogene erweiterte Modulgruppe" gebildet hätten. Es hat natürlich keine Schwierigkeit, auch auf sie unsere Untersuchungen auszudehnen.

**) Wir haben hier die bei den nicht-homogenen Untergruppen massgeblich gewesenen Begriffe, als Index u. s. w., sofort auch auf die homogenen Unter-

§ 4. Berechnung des Index $\mu(n)$ der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe.

Die Berechnung des Index der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe beginnen wir mit der Ableitung einer wichtigen Eigenschaft der Zahl $\mu(n)$. Mögen n_1 und n_2 zwei relative Primzahlen sein und liege eine Lösung der Congruenz

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1, \pmod{n_1 \cdot n_2} \tag{1}$$

vor. Reducieren sich die vier ganzen Zahlen α, β, γ, δ mod. n_1 auf die kleinsten, nicht negativen Reste α_1, β_1, γ_1, δ_1, mod. n_2 aber auf α_2, β_2, γ_2, δ_2, so gewinnen wir in diesen beiden Zahlquadrupeln zwei bestimmte Lösungen der Congruenzen bez.

$$\begin{aligned} \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 &\equiv 1, \pmod{n_1}, \\ \alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2 &\equiv 1, \pmod{n_2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Umgekehrt aber können wir unter den $2\mu(n_1)$ und $2\mu(n_2)$ Lösungen dieser beiden Congruenzen (2) völlig willkürlich zwei auswählen, die wir nun α_1, β_1, γ_1, δ_1 bez. α_2, β_2, γ_2, δ_2 nennen, und können dann immer eine bestimmte Lösung α, β, γ, δ von (1) ausfindig machen, die sich mod. n_1 bez. n_2 auf diese beiden gewählten Lösungen reduciert. In der That haben wir nichts weiter zu thun, als den vier Forderungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + n_1 a_1 \equiv \alpha_2 \\ \beta &= \beta_1 + n_1 b_1 \equiv \beta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \pmod{n_2}$$

zu genügen, was bei relativ primen n_1 und n_2 durch zweckmässige Wahl von a_1, b_1, c_1, d_1 leicht geschieht. Wir finden solchergestalt den Satz: *Bei relativ primen n_1, n_2 ist die Zahl incongruenter Lösungen von* (1) *das Product der beiden Anzahlen incongruenter Lösungen der Congruenzen* (2). Wir haben also die Formel:

$$2\mu(n_1 \cdot n_2) = 2\mu(n_1) \cdot 2\mu(n_2). \tag{3}$$

Für die Modulsubstitutionen hat dieses Resultat, worauf wir später zurückkommen, wichtige Sätze im Gefolge. Wenn wir uns des Ausdrucks bedienen, dass es mod. n $2\mu(n)$ Typen homogener Modulsubstitutionen giebt, so entspringt u. a. das Resultat: *In der einzelnen Horizontalreihe des zur Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe gehörenden Schemas giebt es modulo n' noch Substitutionen jedes Typus, vorausgesetzt dass n' prim gegen n ist.* Insbesondere folgt: *Wenn wir die Substitutionen der homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe modulo n' reducieren, so*

---

gruppen in Anwendung gebracht. Das ist in der That zufolge leichter Überlegung statthaft. Es handelt sich bei diesen Begriffen um gruppentheoretische Beziehungen ganz allgemeiner Art, die nicht an der Modulgruppe als solcher haften.

kommen wir auf die gesamten Operationen der $G_{2\mu(n')}$ zurück. Dasselbe gilt entsprechend auch für die nicht-homogenen Gruppen.

Kehren wir nunmehr zur Bestimmung der Anzahl $2\mu(n)$ zurück. Offenbar ist es zweckmässig, n in seine Primfactoren zu spalten:

$$n = q_1^{\nu_1} \cdot q_2^{\nu_2} \cdot q_3^{\nu_3} \cdots; \tag{4}$$

wir haben dann auf Grund von (3)

$$2\mu(n) = 2\mu(q_1^{\nu_1}) \cdot 2\mu(q_2^{\nu_2}) \cdots. \tag{5}$$

Unsere Aufgabe der Bestimmung von $\mu(n)$ ist hiermit auf den Fall zurückgeführt, dass n eine Primzahlpotenz q^ν ist. Aber letztere Aufgabe kann selbst weiter reduciert werden. Aus der Entwicklung am Schluss des vorletzten Paragraphen folgert man nämlich vermöge einer kurzen Zwischenbetrachtung den Satz: Sind α und β irgend zwei nicht zugleich durch q teilbare Zahlen, so kann man stets zwei Zahlen γ, δ finden, die

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1, \ (\text{mod. } q^\nu)$$

befriedigen, und zwar berechnet sich das allgemeinste Lösungssystem γ, δ aus einem speciellen γ_0, δ_0 durch die Gleichungen

$$\gamma = \gamma_0 + \alpha t, \quad \delta = \delta_0 + \beta t,$$

wo t eine beliebige ganze Zahl ist. Da nun α und β nicht zugleich durch q teilbar sind, so zählt man sofort ab, dass es hier im ganzen q^ν mod. q^ν incongruente Lösungen γ, δ giebt. Demgemäss ist $2\mu(q^\nu)$ das q^ν-fache der Anzahl incongruenter Zahlenpaare α, β, für welche α und β nicht zugleich durch q teilbar sind.

Um jetzt diese letztere Anzahl zu bestimmen, wählen wir zuvörderst für α einen der $(q^\nu - q^{\nu-1})$ durch q nicht teilbaren Reste mod. q^ν; alsdann kann für β ein ganz beliebiger Rest gewählt werden, was $q^\nu(q^\nu - q^{\nu-1})$ brauchbare Zahlenpaare α, β giebt. Ist dagegen α einer der $q^{\nu-1}$ durch q teilbaren Reste von q^ν, so haben wir β auf die $(q^\nu - q^{\nu-1})$ nicht durch q teilbaren Reste einzuschränken, was noch $q^{\nu-1}(q^\nu - q^{\nu-1})$ weitere Paare α, β ergiebt. Insgesamt ist also die Anzahl brauchbarer Zahlenpaare α, β

$$q^\nu(q^\nu - q^{\nu-1}) + q^{\nu-1}(q^\nu - q^{\nu-1}) = q^{2\nu-2}(q^2 - 1).$$

Somit kommt für $2\mu(q^\nu)$ der Wert:

$$2\mu(q^\nu) = q^{3\nu}\left(1 - \frac{1}{q^2}\right).$$

Der Index der homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe) aber wird:*

*) Vgl. die Entwicklungen p. 93 u. f. in C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris (1870) [oder auch Oeuvres de Galois, Liouville's Journal Bd. 11 (1846)].

$$(6) \qquad 2\mu(n) = n^3\left(1-\frac{1}{q_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_2^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_3^2}\right)\cdots.$$

Wenn wir von hier aus zur nicht-homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe zurückkehren wollen, so werden wir zuvörderst zur homogenen Hauptcongruenzgruppe dieser Stufe die homogene Substitution $\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}$ hinzusetzen und erhalten durch Combination, wie das oben des näheren ausgeführt wurde, diejenige homogene Untergruppe, welche durch den hemiedrischen Isomorphismus der nicht-homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe zugeordnet war. *Es findet sich demnach als Index der nicht-homogenen Hauptcongruenzgruppe* $\Gamma_{\mu(n)}$:

$$(7) \qquad \mu(n) = \frac{n^3}{2}\left(1-\frac{1}{q_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_2^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_3^2}\right)\cdots.$$

Hierbei tritt aber ein Ausnahmefall ein, den wir bislang der Kürze wegen übergingen: Für $n=2$ ist $\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}$ bereits in der homogenen Hauptcongruenzgruppe enthalten, so dass hier nicht etwa durch Zusatz derselben *eine Erniedrigung* des Index auf die Hälfte erzielt würde. *Der Index der nicht-homogenen Hauptcongruenzgruppe* 2ter *Stufe ist also demjenigen der homogenen direct gleich und findet sich aus Formel* (6) *als sechs*; solches ist uns ja von Kapitel 4 her seit lange bekannt.

§ 5. Vergleich der $\Gamma_{\{n\}}$ und der Hauptcongruenzgruppen $\Gamma_{\mu(n)}$. Hauptcongruenzgruppen des vorigen Kapitels.

Vor allen Dingen folgt aus den Abzählungen des vorigen Paragraphen das wichtige Resultat, *dass die Hauptcongruenzgruppe eine Untergruppe der Modulgruppe von endlichem Index ist.* Damit ist denn sogleich gegeben, dass für alle Fälle $n \geq 6$ die früher untersuchte Gruppe $\Gamma_{\{n\}}$ wohl eine Untergruppe der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe ist, aber mit dieser selbst nicht coincidiert; in der That waren ja alle Gruppen $\Gamma_{\{6\}}, \Gamma_{\{7\}}, \cdots$ Untergruppen vom Index ∞. In Ansehung dieser Gruppen $\Gamma_{\{n\}}$ für $n \geq 6$ ist sonach die in § 1 des gegenwärtigen Kapitels aufgeworfene arithmetische Fragestellung durch unsere bisherigen Betrachtungen nur erst teilweise gelöst. Wir werden am Schlusse dieses Kapitels noch einige sich hier anschliessende, übrigens wesentlich negative Resultate entwickeln. Indessen wird auch durch sie die für die Gruppen $\Gamma_{\{6\}}, \Gamma_{\{7\}}\cdots$ noch bleibende Hauptfrage nach dem arithmetischen Charakter ihrer Substitutionen nicht erledigt.

Wir stellen jetzt eine Tabelle zusammen, in welche wir für einige

der niedersten Stufenzahlen n Index μ und Geschlecht*) p der bezüglichen Hauptcongruenzgruppen aufnehmen. Man berechnet:

(1)

n	μ	p	n	μ	p
2	6	0	8	192	5
3	12	0	9	324	10
4	24	0	10	360	13
5	60	0	11	660	26
6	72	1	12	576	25
7	168	3	16	1536	81

Da ist nun zuvörderst das wichtige Resultat evident: *Für*

$$n = 2, 3, 4, 5$$

sind die Untergruppen $\Gamma_{\{n\}}$ *mit den bezüglichen Hauptcongruenzgruppen identisch*; in der That ist ja stets $\Gamma_{\{n\}}$ in der $\Gamma_{\mu(n)}$ enthalten, für die genannten vier Werte ist aber der von früher bekannte Index von $\Gamma_{\{n\}}$ in der Gesamtgruppe Γ beziehungsweise in Übereinstimmung mit demjenigen von $\Gamma_{\mu(n)}$. *Für* $n = 2, 3, 4, 5$ *sind wir also über den arithmetischen Charakter der Untergruppen* $\Gamma_{\{n\}}$ *vollständig aufgeklärt.*

Des weiteren aber liefert uns, wie obige Tabelle zeigt, die Hauptcongruenzgruppe 6ter Stufe eine ausgezeichnete Untergruppe sechster Classe vom Index 72, sowie diejenige der 7ten Stufe eine ausgezeichnete Untergruppe siebenter Classe vom Index 168. Da drängt sich die Vermutung auf, ob vielleicht diese Untergruppen Γ_{72} und Γ_{168} identisch sein mögen mit den beiden Untergruppen dieser Indices, welche für die sechste bez. siebente Classe im vorigen Kapitel auf Grund des Verzweigungssatzes definiert wurden. Um hierüber zu entscheiden, müssen wir auf die erzeugenden Substitutionen**) jener beiden Untergruppen des vorigen Kapitels zurückgehen. Wir constatieren aufs leichteste: *Alle Erzeugenden der ersten dieser beiden Gruppen sind mod.* 6, *alle Erzeugenden der zweiten sind mod.* 7 *mit der Identität congruent.* Jene beiden Gruppen werden somit jedenfalls bez. in den Hauptcongruenzgruppen der Stufen 6 und 7 enthalten sein. Nun besassen aber die genannten Gruppen dieselben Indices 72, 168, wie diese Hauptcongruenzgruppen; wir folgern also, dass sie mit ihnen coincidieren müssen. Daher das Resultat: *Die durch die Polygone Fig.* 84 *p.* 365 *und Fig.* 86

*) Dasselbe bestimmt man aus μ und n auf Grund von Formel (6) p. 342.

**) Man vgl. Formel (1) bis (5) in § 7, bez. Formel (1) bis (6) in § 8 des vorigen Kapitels.

p. 370 definierten ausgezeichneten Untergruppen sechster und siebenter Classe sind mit den Hauptcongruenzgruppen der Stufen sechs bez. sieben identisch.

Aber über die nun berücksichtigten Gruppen hinaus gewannen wir ja im vorigen Kapitel durch Zerlegung der G_{168} in ihre Untergruppen auf Grund vorher entwickelter Sätze noch eine ganze Reihe weiterer Untergruppen siebenter Classe und hätten in ähnlicher Weise auch durch Zerlegung der G_{72}, G_{60} u. s. w. Untergruppen der sechsten, der fünften u. s. w. Classe definieren können. Wie werden wir diesen Untergruppen an gegenwärtiger Stelle gerecht werden können? Um das zu entwickeln, ziehen wir hier sogleich ganz allgemein die der Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(n)}$ zugeordnete endliche $G_{\mu(n)}$ heran und werden bei der Gelegenheit zur Bestimmung des allgemeinen Begriffs der Congruenzgruppen n^{ter} Stufe aufsteigen, auf welche wir bereits oben in der Note p. 388 Bezug nahmen.

Auf die Angaben unserer Tabelle (1) für $n > 7$ werden wir erst später zurückkommen.

§ 6. Allgemeines über Congruenzgruppen n^{ter} Stufe.

Der nicht-homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe entspricht, wie wir wissen, eine Gruppe $G_{\mu(n)}$, auf welche sich die Gesamtgruppe Γ reduciert, wenn wir die modulo n congruenten Modulsubstitutionen als nicht verschieden ansehen. Die Bedeutung, welche die Zerlegung dieser Gruppe $G_{\mu(n)}$ in ihre Untergruppen für die Lösung unseres gruppentheoretischen Problems besitzt, ist in § 8 des vorletzten Kapitels (p. 325) allgemein zur Erörterung gekommen. Die Zerlegung der $G_{\mu(n)}$ führt in dort geschilderter Weise zur Kenntnis *aller* Untergruppen von Γ, welche ihrerseits die Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(n)}$ in sich enthalten. Nehmen wir wieder den Ausdruck auf, dass es $\mu(n)$ mod. n verschiedene Typen nicht-homogener Modulsubstitutionen V giebt, so werden wir in angezeigter Weise offenbar *zu Untergruppen geführt, die aus allen Substitutionen bestehen, welche modulo n auf eine bestimmte Reihe von Typen zurückkommen*; die diesen letzteren Typen entsprechenden Operationen der $G_{\mu(n)}$ bilden alsdann eine Untergruppe der $G_{\mu(n)}$, eben diejenige, welche uns zur Kenntnis der gerade gemeinten Untergruppe von Γ hingeleitet hat.

Die nun gefundene Art von Untergruppen der Modulgruppe, *die sich in arithmetischer Hinsicht offenbar vollständig durch Congruensen modulo n charakterisieren lassen*, sollen jetzt überhaupt als *Congruenzgruppen n^{ter} Stufe* bezeichnet werden. Die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe

ist dann gemeinsame Untergruppe von allen übrigen zu dieser Stufe gehörigen Congruenzgruppen, und wir gelangen zur Kenntnis der *Gesamtheit* dieser letzteren durch Zerlegung der Gruppe $G_{\mu(n)}$ in die Gesamtheit ihrer Untergruppen. Haben wir insbesondere einmal eine Untergruppe G_ν der Ordnung ν in der $G_{\mu(n)}$ ausfindig gemacht, so wird ihr eine solche Congruenzgruppe n^{ter} Stufe entsprechen, innerhalb deren die Hauptcongruenzgruppe den Index ν besitzt, die also ihrerseits in der Gesamtgruppe Γ den Index $\frac{\mu(n)}{\nu}$ haben wird. In der That würde ja auch der in Rede stehenden G_ν innerhalb der $G_{\mu(n)}$ dieser Index zukommen. Diese Beziehung der Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(n)}$ zur eben gemeinten Congruenzgruppe n^{ter} Stufe $\Gamma_{\frac{\mu(n)}{\nu}}$ vom Index $\frac{\mu(n)}{\nu}$ werden wir dann wieder geometrisch durch die bezüglichen Fundamentalpolygone erläutern können. Das Polygon $F_{\mu(n)}$ der Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{\mu(n)}$ wird sich in ν bezüglich der $\Gamma_{\frac{\mu(n)}{\nu}}$ relativ äquivalente Teilbereiche zerlegen, von denen ein beliebiger zum Fundamentalbereich $F_{\frac{\mu(n)}{\nu}}$ der $\Gamma_{\frac{\mu(n)}{\nu}}$ gewählt werden kann.

Man sieht, dass es sich in letzterem Betracht um Verhältnisse handelt, deren allgemeine Gültigkeit wir schon im vorletzten Kapitel erörterten. Das wesentlich Neue aber ist, dass wir hier specielle Gruppen $G_{\mu(n)}$ in einer Gestalt definiert haben, welche der Untersuchung mit arithmetischen Hilfsmitteln in hohem Grade zugänglich sind. *Indem wir also in der Zerlegung der $G_{\mu(n)}$ in ihre Untergruppen unsere nächste und wichtigste Aufgabe sehen, mögen die ihnen entsprechenden Congruenzgruppen selbst und deren Fundamentalpolygone in der ω-Halbebene zuvörderst ausser Betracht bleiben.* Den Rückgang zu ihnen, der ja hernach keine Schwierigkeiten zu bieten vermag, schieben wir vielmehr bis dahin zurück, wo wir in anderweitiger Gedankenverbindung die Polygone als solche unmittelbar zu brauchen haben.

Verabreden wir hier sogleich noch eine geringe Verschärfung unserer Ausdrucksweise. Haben wir zusammengesetzte Stufenzahlen z. B. $n = 6$, so wird die bezügliche Hauptcongruenzgruppe Γ_{72} z. B. auch in allen denjenigen Untergruppen enthalten sein, die wir schon für die zweite Stufe kennen gelernt haben, so dass die Zerlegung der G_{72} aufs neue auch zu diesen hinführen würde. Gleichwohl werden wir diese letzteren Untergruppen nicht der sechsten, vielmehr der zweiten Stufe zuerteilen, da bereits Congruenzen mod. 2 zu ihrer vollen Charakterisierung hinreichen. *Allgemein wollen wir*

daher eine Congruenzgruppe der n^{ten} Stufe zuerteilen, wenn sie sich vollständig durch n, aber nicht schon durch einen Teiler von n als Zahlmodul charakterisieren lässt.

Besonders interessant ist es, noch auf die Gruppen des vorigen Kapitels z. B. die Γ_{168} zurückzukommen. Letztere ist uns jetzt die Hauptcongruenzgruppe 7ter Stufe, und demnach fassen wir die bezügliche G_{168} als die Gruppe der mod. 7 incongruenten Substitutionen. Bei ihrer Zerlegung müssen wir also alle diejenigen Untergruppen wiederfinden, deren Existenz wir in der G_{168} des vorigen Kapitels durch geometrische Überlegungen erschlossen. Betrachten wir z. B. die parabolischen Substitutionen $S(\omega) = \omega + 1$, $S^2(\omega) = \omega + 2$, u. s. w. mod. 7, so werden sie sich auf nur *sieben* verschiedene Operationen $S, S^2, \cdots, S^6, S^7 \equiv 1$ reducieren, die offenbar eine cyclische G_7 innerhalb der G_{168} bilden. Thatsächlich fanden wir ja seinerzeit solche G_7 und bewiesen damals, dass die einzelne unter ihnen vertauschbar war mit 21 Operationen der G_{168}, die eine G_{21} bildeten. Wollen wir jetzt arithmetisch die Gestalt dieser 21 Operationen V aufstellen, so müssen wir der Bedingung Ausdruck verleihen, dass die Operation $V = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ die Erzeugende S jener G_7 in eine wieder der G_7 angehörende Substitution transformiert; stets und nur unter dieser Bedingung wird die Operation V der gemeinten G_{21} angehören. Die in Rede stehende Bedingung heisst aber explicite:

$$V^{-1}SV \equiv \begin{pmatrix} 1 + \gamma\delta, & \delta^2 \\ -\gamma^2, & 1 - \gamma\delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & \nu \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } 7),$$

wo ν irgend eine ganze Zahl ist. Man sieht sonach, dass $\gamma \equiv 0$, (mod. 7) sein muss; zugleich genügt jede Operation mit $\gamma \equiv 0$ unserer Forderung. Und in der That giebt es mod. 7 von incongruenten Operationen dieser Art gerade 21; es sind dies ausser den Operationen der G_7 selbst diejenigen der Typen:

$$V \equiv \begin{pmatrix} 2, & \beta \\ 0, & 4 \end{pmatrix}, \quad V \equiv \begin{pmatrix} 4, & \beta \\ 0, & 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } 7).$$

Beide Male durchläuft β ein Restsystem modulo 7, so dass wir hier wirklich noch 14 neue Operationen V vor uns haben. Aufs leichteste zeigt man dabei auch direct, dass die gekennzeichneten 21 Operationen für sich eine G_{21} bilden. Dass übrigens die 14 zuletzt genannten Operationen ohne Ausnahme der Periode drei angehören (was wir auch schon von früher her wissen), berechnet man gleichfalls ohne weiteres; in der That entspringt durch Wiederholung der einzelnen Operation $V \equiv \begin{pmatrix} 2, & \beta \\ 0, & 4 \end{pmatrix}$ sofort $V^2 \equiv \begin{pmatrix} 4, & -\beta \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$, $V^3 \equiv 1$, so dass wir in V die Er-

zeugende einer cyclischen G_3 gewonnen haben. Wir unterlassen, die Betrachtung hier noch weiter fortzuführen; denn wir würden auf solche Art doch nur Entwicklungen vorgreifen, wie wir sie in den nächsten Kapiteln noch in ausgiebigster Weise durchzuführen haben.

Zum Schluss müssen wir hier auch noch auf die homogenen Modulsubstitutionen Bezug nehmen. Dieselben reducieren sich, wie wir wissen, mod. n auf $2\mu(n)$ incongruente Operationen, welche die homogene Gruppe $G_{2\mu(n)}$ bilden. Die Untergruppen dieser $G_{2\mu(n)}$ liefern uns dann offenbar die homogenen Congruenzgruppen n^{ter} Stufe, und das Verhältnis derselben zur homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe gestaltet sich ganz analog, wie das entsprechende Verhältnis bei den nicht-homogenen Gruppen. Hat man übrigens bereits die nicht-homogene $G_{\mu(n)}$ in ihre Untergruppen zerlegt, so kann man die Zerlegung der homogenen $G_{2\mu(n)}$ auf Grund des zwischen den beiderlei Gruppen bestehenden hemiedrischen Isomorphismus leicht leisten. Jedesmal ist einer nicht-homogenen Untergruppe G_r eine homogene G_{2r} der doppelten Ordnung zugeordnet, und man hat dann im Einzelfall nur zu untersuchen, ob in dieser G_{2r} sich etwa homogene Untergruppen G_r finden lassen, die zur nicht-homogenen G_r holoedrisch isomorph sind. Auch hierfür werden wir im folgenden Kapitel ausführliche Beispiele beibringen.

§ 7. Über ein wichtiges Princip der Gruppentheorie.

Bevor wir weitergehen, müssen wir hier eine Erörterung von allgemein gruppentheoretischer Bedeutung einschalten, die dann sogleich für unsere fernere Besprechung der Congruenzgruppen verwertet werden soll*). Es mögen zwei Gruppen gleichartiger, aber nicht näher definierter Operationen G_s und G_t der endlichen Ordnung s bez. t gegeben sein. Die Operationen der einen sollen $1, v_1, v_2, \cdots, v_{s-1}$ heissen, die der anderen $1, w_1, w_2, \cdots, w_{t-1}$, und es soll die Bedingung bestehen, dass jede Operation aus der ersten dieser beiden Reihen mit jeder aus der zweiten vertauschbar ist, was wir symbolisch durch

$$v_i w_k = w_k v_i \tag{1}$$

ausdrücken. Unter dieser Voraussetzung entspringt durch Combination

*) Die folgenden Entwicklungen wurden vom Herausgeber hinzugefügt. Übrigens ist das im Texte benutzte gruppentheoretische Princip als solches nicht neu, sondern ist jedenfalls in speciellen Fällen bereits verschiedentlich zur Geltung gekommen. Einer bekannten Eigenschaft der Flächen zweiten Grades entsprechend stellt sich dasselbe sofort ein, wenn man Gruppen orthogonaler Substitutionen bei vier Veränderlichen untersucht. Vergl. z. B. Goursat, *Sur les substitutions orthogonales et les divisions regulières de l'espace*, Annales de l'Ecole Normale, sér. 3, t. VI (1889).

von G_s und G_t eine Gruppe G_{st} der Ordnung st, deren Operationen wir zweckmässig in dem Schema anordnen:

$$
\begin{array}{llll}
1\ , & v_1\ , & v_2\ , \cdots & v_{s-1}\ , \\
w_1\ , & v_1 w_1\ , & v_2 w_1\ , \cdots & v_{s-1} w_1\ , \\
w_2\ , & v_1 w_2\ , & v_2 w_2\ , \cdots & v_{s-1} w_2\ , \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
w_{t-1}\ , & v_1 w_{t-1}\ , & v_2 w_{t-1}\ , \cdots & v_{s-1} w_{t-1}\ .
\end{array} \tag{2}
$$

Innerhalb dieser G_{st} bilden die beiden vorgegebenen Gruppen G_s und G_t ausgezeichnete Untergruppen. Wir nehmen an, dass wir die Zerlegung dieser letzteren Gruppen G_s, G_t in ihre Untergruppen vollständig geleistet haben. Es soll gelten, die Hilfsmittel zu entwickeln, um von hieraus die Untergruppen von G_{st} in einfachster Weise zu gewinnen.

Ist G_σ eine beliebig herausgegriffene Untergruppe von G_s, G_τ eine ebensolche von G_t, so wird durch Combination von G_σ und G_τ ersichtlich eine $G_{\sigma\tau}$ entspringen. Denken wir uns die σ Operationen der G_σ in der ersten Horizontalreihe von (2) an erster Stelle angeordnet, und entsprechend die τ Operationen von G_τ in der ersten Verticalreihe von (2), so werden die $\sigma\tau$ Operationen von $G_{\sigma\tau}$ ein Rechteck von σ Vertical- und τ Horizontalreihen füllen, das an der linken oberen Ecke im Schema (2) eingelagert ist. *Nach der Art ihrer Herstellung nennen wir $G_{\sigma\tau}$ eine combinierte Untergruppe von G_{st}.* Die Sachlage ist nun die, dass es ausser den combinierten Untergruppen von G_{st} im allgemeinen auch noch weitere giebt, deren Eigenart nun festzustellen ist.

Sei zu dem Ende G irgend eine noch gar nicht näher specificierte Untergruppe von G_{st}. Möge diese Untergruppe G mit G_s eine Untergruppe gemein haben, die wir wieder G_σ nennen, und deren Operationen $1, v_1, v_2, \cdots, v_{\sigma-1}$ seien; desgleichen habe G mit G_t eine Untergruppe G_τ mit den Operationen $1, w_1, w_2, \cdots, w_{\tau-1}$ gemeinsam. *Dann wird notwendig die aus diesen beiden Gruppen G_σ und G_τ entspringende combinierte Gruppe $G_{\sigma\tau}$ in G enthalten sein, und man sieht zugleich, dass $G_{\sigma\tau}$ die umfassendste in G enthaltene combinierte Gruppe ist.*

Jetzt erhärten wir durch elementare gruppentheoretische Betrachtungen den folgenden Satz: G enthält aus der einzelnen Horizontalreihe (2) entweder σ oder keine Operation, entsprechend aus der einzelnen Verticalreihe entweder τ Operationen oder gar keine. Giebt es demnach in G ausser den Operationen der $G_{\sigma\tau}$ noch eine weitere, so können wir diese unter zweckmässiger Anordnung des Schemas (2) $v_\sigma w_\tau$ nennen und finden dann sogleich in G noch $\sigma\tau$ neue Operationen, die durch Combination von $v_\sigma w_\tau$ mit der $G_{\sigma\tau}$ entspringen. Denken wir

diese $\sigma\tau$ Operationen im Schema (2) an den Kreuzungspunkten der Horizontalreihen $(\sigma+1)$, $(\sigma+2)$, $\cdots$, 2σ mit den Verticalreihen $(\tau+1)$, $(\tau+2)$, $\cdots$, 2τ angeordnet. Sind auch nun die Operationen von G noch nicht erschöpft, so komme noch $v_{2\sigma}w_{2\tau}$ und damit wieder sogleich $\sigma\tau$ neue Operationen hinzu, die wir uns auf entsprechende Weise in (2) als drittes Rechteck angeordnet denken. Möge dann weiter noch $v_{3\sigma}w_{3\tau}$ und so fort hinzukommen, bis endlich mit $v_{(\varkappa-1)\sigma}w_{(\varkappa-1)\tau}$ und den bezüglichen $\sigma\tau$ durch Combination von $v_{(\varkappa-1)\sigma}w_{(\varkappa-1)\tau}$ und $G_{\sigma\tau}$ entspringenden Operationen die ganze Gruppe G erschöpft ist. Die letztere wird alsdann $\varkappa\cdot\sigma\tau$ verschiedene Operationen enthalten und wir bezeichnen sie sonach fortan als $G_{\varkappa\sigma\tau}$. *Nach Analogie unserer gewohnten Ausdrucksweise werden wir $G_{\sigma\tau}$ als eine Untergruppe des Index $\varkappa$ von $G_{\varkappa\sigma\tau}$ bezeichnen und haben in den $\varkappa$ Operationen*

$$1,\ v_\sigma w_\tau,\ v_{2\sigma}w_{2\tau},\ \cdots,\ v_{(\varkappa-1)\sigma}w_{(\varkappa-1)\tau} \tag{3}$$

ein Repräsentantensystem für $G_{\sigma\tau}$ als Untergruppe von $G_{\varkappa\sigma\tau}$.

Die hier aufgetretenen $\varkappa\sigma$ Operationen $1, v_1, v_2, \cdots, v_{(\varkappa-1)\sigma}$, die teils als solche, teils mit Operationen w combiniert sich in $G_{\varkappa\sigma\tau}$ finden, werden nun eine Untergruppe $G_{\varkappa\sigma}$ von G_s formieren. In der That, sind v_i und v_k zwei beliebige unter diesen $\varkappa\sigma$ Operationen, so finden sich in $G_{\varkappa\sigma\tau}$ notwendig zwei Operationen v_iw_g, v_kw_h und mit ihnen auch $(v_iv_k)\cdot(w_gw_h)$, so dass auch (v_iv_k) zu den genannten $\varkappa\sigma$ Operationen v gehört. In entsprechender Weise werden die $\varkappa\tau$ Operationen $1, w_1, w_2, \cdots, w_{(\varkappa-1)\tau}$ eine Untergruppe $G_{\varkappa\tau}$ von G_t herstellen, und da bilden wir nun aus $G_{\varkappa\sigma}$ und $G_{\varkappa\tau}$ die combinierte Gruppe $G_{\varkappa^2\sigma\tau}$. *Diese wird dann die kleinste combinierte Untergruppe von G_{st} sein, in der $G_{\varkappa\sigma\tau}$ enthalten ist.* Indem wir aber $G_{\varkappa\sigma\tau}$ solchergestalt zwischen den beiden combinierten Untergruppen $G_{\sigma\tau}$ und $G_{\varkappa^2\sigma\tau}$ gelegen finden, werden wir unsere fragliche Gruppe $G_{\varkappa\sigma\tau}$ zur Unterscheidung von den combinierten Gruppen als eine *intermediäre Untergruppe* von G_{st} bezeichnen.

Um unsere Überlegung noch weiter fortzusetzen, haben wir jetzt den wichtigen Satz, *dass die mit G_σ bezeichnete Untergruppe innerhalb $G_{\varkappa\sigma}$ ausgezeichnet ist.* Ist nämlich v_i eine Operation der G_σ, also $i<\sigma$, v_k aber irgend eine Operation der $G_{\varkappa\sigma}$, so giebt es in $G_{\varkappa\sigma\tau}$ eine Operation w_lv_k, und damit ist auch $(w_lv_k)^{-1}v_i(w_lv_k) = v_k^{-1}v_iv_k$ in $G_{\varkappa\sigma\tau}$ enthalten. Zugleich gehört aber diese letztere Operation ihrer Gestalt nach zur G_s, und ist also, als in G_s und $G_{\varkappa\sigma\tau}$ gemeinsam enthalten, eine Operation von G_σ: Thatsächlich ist somit überhaupt $v_k^{-1}G_\sigma v_k = G_\sigma$. *Analog ist G_τ ausgezeichnete Untergruppe von $G_{\varkappa\tau}$*, und wir schliessen hieraus auf Grund von (1) sofort, *dass auch $G_{\sigma\tau}$ ausgezeichnete Unter-*

gruppe von $G_{\varkappa\sigma\tau}$ und also selbstverständlich auch von $G_{\varkappa\sigma\tau}$ ist. Ein Repräsentantensystem für G_σ als Untergruppe von $G_{\varkappa\sigma}$ werden wir in

$$1,\ v_\sigma,\ v_{2\sigma},\ \cdots,\ v_{(\varkappa-1)\sigma} \tag{4}$$

besitzen, während ein ebensolches für G_τ als Untergruppe von $G_{\varkappa\tau}$ aus den Operationen

$$1,\ w_\tau,\ w_{2\tau},\ \cdots,\ w_{(\varkappa-1)\tau} \tag{5}$$

gebildet wird.

Man sehe jetzt die Operationen der $G_{\sigma\tau}$ als nicht wesentlich von einander verschieden an, eine Massnahme, die wir bei ausgezeichneten Untergruppen ja bereits des öfteren getroffen haben. Da reduciert sich denn die $G_{\varkappa\sigma}$ auf eine $g_\varkappa^{(v)}$, die wir als die Gruppe der Operationen (4) ansprechen können; desgleichen wird aus $G_{\varkappa\tau}$ die $g_\varkappa^{(w)}$ der Operationen (5), während unsere intermediäre Gruppe $G_{\varkappa\sigma\tau}$ selbst auf die $g_\varkappa$ der Operationen (3) zurückgehen wird. Hier besteht nun als Hauptsatz unserer Erörterung der folgende: *Die soeben eingeführten Gruppen $g_\varkappa^{(v)}$ und $g_\varkappa^{(w)}$ lassen sich holoedrisch isomorph auf einander beziehen, dadurch nämlich, dass man die v^{te} Operation der Reihe* (4) *der v^{ten} in der Reihe* (5) *zuordnet, wobei v die Zahlen* 1, 2, 3, $\cdots$, $\varkappa$ *zu durchlaufen hat.* Combinieren wir nämlich irgend zwei Operationen $v_{\alpha\sigma}w_{\alpha\tau}$ und $v_{\beta\sigma}w_{\beta\tau}$ der $g_\varkappa$, so entspringt wieder eine Operation dieser Gruppe $g_\varkappa$. Es ist also unter Gebrauch eines schon früher (p. 321) bei analoger Gelegenheit verwendeten Äquivalenzzeichens $v_{\alpha\sigma}w_{\alpha\tau}\cdot v_{\beta\sigma}w_{\beta\tau}\sim v_{\gamma\sigma}w_{\gamma\tau}$, eine Gleichung, die sich sofort in die beiden spaltet:

$$v_{\alpha\sigma}v_{\beta\sigma}\sim v_{\gamma\sigma},\quad w_{\alpha\tau}w_{\beta\tau}\sim w_{\gamma\sigma},$$

womit unsere Behauptung zur Evidenz gebracht ist.

Das soeben gewonnene Resultat können wir nunmehr auch umkehren und gewinnen so den hier in Aussicht genommenen Hauptsatz über die Existenz der intermediären Untergruppen. Wir setzen voraus, dass die Zerlegung der G_s auf zwei Untergruppen G_σ und $G_{\varkappa\sigma}$ geführt habe, von denen die erstere in der letzteren ausgezeichnet enthalten sei; in der nämlichen Beziehung zu einander mögen die beiden in der G_t aufgefundenen Untergruppen G_τ und $G_{\varkappa\tau}$ stehen. Indem wir die Operationen der G_σ als von einander nicht wesentlich verschieden ansehen, gehe $G_{\varkappa\sigma}$ auf eine $g_\varkappa^{(v)}$ zurück, deren Operationen wir sogleich wieder durch (4) bezeichnet denken. Analog gehe $G_{\varkappa\tau}$ auf eine $g_\varkappa^{(w)}$ der Operationen (5) zurück, sofern wir die Operationen der G_τ nicht mehr von einander verschieden ansehen. *Jeder möglichen holoedrisch isomorphen Zuordnung der Gruppen $g_\varkappa^{(v)}$ und $g_\varkappa^{(w)}$ entspricht dann eine intermediäre Untergruppe $G_{\varkappa\sigma\tau}$, welche zwischen den aus G_σ, G_τ bez. $G_{\varkappa\sigma}$, $G_{\varkappa\tau}$ entsprin-*

genden combinierten Untergruppen $G_{\sigma\tau}$ und $G_{\varkappa^2\sigma\tau}$ von G_{st} eingeschlossen ist. Ist nämlich jener holoedrische Isomorphismus etwa dadurch zu Wege gebracht, dass man v_σ mit v_τ, $v_{2\sigma}$ mit $v_{2\tau}$ u. s. w. entsprechend setzt, so combiniere man diese Operationen zu den $\varkappa$ neuen 1, $v_\sigma w_\tau$, $v_{2\sigma} w_{2\tau}$, $\cdots$, $v_{(\varkappa-1)\sigma} w_{(\varkappa-1)\tau}$, die dann eine Untergruppe $g_\varkappa$ in der durch Combination von $g_\varkappa^{(v)}$ und $g_\varkappa^{(w)}$ entspringenden $g_{\varkappa^2}$ bilden. Von dieser $g_\varkappa$ aus schliessen wir nun vermöge einer wiederholt angewandten Überlegung rückwärts auf die Existenz einer intermediären $G_{\varkappa\sigma\tau}$, welche durch Combination der $G_{\sigma\tau}$ mit den 1, $v_\sigma w_\tau$, $v_{2\sigma} w_{2\tau}$, $\cdots$, $v_{(\varkappa-1)\sigma} w_{(\varkappa-1)\tau}$ entspringt, wofern wir letztere Operationen nun wieder als solche der Gruppe $G_{\varkappa^2\sigma\tau}$ deuten, ohne noch die Operationen der $G_{\sigma\tau}$ als unter einander identisch zu denken.

Inwiefern diese Entwicklungen bei den Congruenzgruppen Anwendung finden, wollen wir jetzt des näheren auseinandersetzen.

§ 8. Erläuterung der Entwicklungen des vorigen Paragraphen durch die zur sechsten Stufe gehörende G_{72}.

Vorstehende allgemeine Erörterungen finden nun auf unsere Fragen Anwendung, wenn es gilt, die bei zusammengesetzten Stufenzahlen n eintretenden endlichen Gruppen $G_{\mu(n)}$ in ihre Untergruppen zu zerlegen. Es wird zweckmässig sein, dass wir die Art dieser Anwendung vorerst an einem Beispiele erläutern, bevor wir dieselbe für den allgemeinsten Fall einer zusammengesetzten Stufenzahl erörtern. Wir wählen die Stufe $n = 6$, bei der es sich um die Zerlegung derjenigen G_{72} handelt, welche wir bereits im vorigen Kapitel auf geometrischem Wege definiert hatten. Auf Grund der eben entwickelten Sätze werden wir die Zerlegung der G_{72} ohne Mühe leisten, wenn wir die Zerlegung der zu $n = 2$ und $n = 3$ gehörenden G_6 bez. G_{12} zuvor bereits ausführten. Aber diese G_6 ist ja eine Diedergruppe, während G_{12} dem Tetraedertypus angehört; beiderseits ist also von den „Vorlesungen über das Ikosaeder" her die Structur bekannt.

Die Hauptcongruenzgruppe sechster Stufe Γ_{72} ist in derjenigen der dritten Stufe enthalten. Da letztere in der Gesamtgruppe Γ vom Index zwölf ist, so wird es in der zur sechsten Stufe gehörenden G_{72} im ganzen $72 : 12 = 6$ mit der Identität modulo 3 congruente Operationen geben, die wir

$$1,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5 \tag{1}$$

nennen wollen. Diese Substitutionen werden innerhalb der G_{72} eine ausgezeichnete G_6 bilden, weil nämlich die Hauptcongruenzgruppe dritter Stufe ihrerseits in der Gesamtgruppe Γ ausgezeichnet ist. Unter den

sechs Substitutionen (1) können keine zwei modulo 2 congruent sein. Wäre nämlich $v_i \equiv v_k$, (mod. 2), so würde sofort $v_i v_k^{-1} \equiv 1$, (mod. 2) folgen, während doch alle sechs Substitutionen (1) mod. 3 unter einander congruent sind:

$$1 \equiv v_1 \equiv v_2 \equiv \cdots \equiv v_5, \quad \text{(mod. 3)}. \tag{2}$$

Demgemäss wäre $v_i v_k^{-1}$ sowohl modulo 2 als modulo 3 mit der Identität congruent, und also auch modulo 6, wie man sofort zeigt. Daraus aber ergäbe sich $v_i \equiv v_k$, (mod. 6), so dass v_i und v_k dieselbe Operation der G_{72} darstellen müssten. Wir bemerken solcherart, dass wir in (1) ein System modulo 2 incongruenter Substitutionen besitzen, *und können sonach die aus ihnen bestehende G_6 als die zur Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe Γ_6 gehörende endliche G_6 ansprechen.*

In völlig entsprechender Weise wird es in der G_{72} zwölf modulo 2 mit der Identität congruente Substitutionen

$$1, w_1, w_2, \cdots, w_{11} \tag{3}$$

geben, die eine in der G_{72} ausgezeichnete G_{12} bilden. In (3) haben wir dann ein System modulo 3 incongruenter Substitutionen vor uns, *so dass die eben genannte G_{12} als die zur Hauptcongruenzgruppe dritter Stufe gehörende endliche G_{12} angesehen werden kann und als solche den Tetraedertypus besitzt.*

Da unsere G_{12} in der G_{72} ausgezeichnet ist, haben wir jedenfalls $v_i^{-1} w_k v_i \equiv w_l$, (mod. 6). Indem wir aber letztere Congruenz nur mod. 3 nehmen, heisst sie infolge von (2) $w_k \equiv w_l$, (mod. 3), woraus sich die Identität von w_k und w_l ergiebt. Wir haben also:

$$v_i w_k \equiv w_k v_i, \quad \text{(mod. 6)}, \tag{4}$$

d. h. *innerhalb unserer G_{72} ist jede Substitution v_i aus der Reihe* (1) *mit jeder Substitution w_k aus der Reihe* (3) *vertauschbar.* Durch Combination von G_6 und G_{12} entsteht jetzt die G_{72} selbst; wir haben ihre Operationen in dem Schema

$$\begin{array}{llllll} 1, & v_1, & v_2, & v_3, & \cdots, & v_5 \\ w_1, & v_1 w_1, & v_2 w_1, & v_3 w_1, & \cdots, & v_5 w_1 \\ w_2, & v_1 w_2, & v_2 w_2, & v_3 w_2, & \cdots, & v_5 w_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{11}, & v_1 w_{11}, & v_2 w_{11}, & v_3 w_{11}, & \cdots, & v_5 w_{11} \end{array}$$

vor Augen.

Wie man sieht, sind die den Entwicklungen des vorigen Paragraphen zu Grunde liegenden Voraussetzungen bei unserer G_{72} völlig erfüllt; ziehen wir also nun auch für dieselbe die Folgerungen, welche oben ganz allgemein für die G_{st} galten.

Zunächst werden wir eine grössere Reihe combinierter Unter-

gruppen der G_{72} unmittelbar angeben können, indem wir die Untergruppen der G_6 einzeln mit denen der G_{12} combinieren. Darüber hinaus treten aber auch noch intermediäre Untergruppen auf und wenigstens eine derselben wollen wir hier etwas ausführlicher betrachten. In der G_6 giebt es eine ausgezeichnete Untergruppe G_3, deren Substitutionen $1, v_1, v_2$ seien. Wählen wir diese G_3 für die oben allgemein mit G_σ bezeichnete Untergruppe, wobei dann $G_{\varkappa\sigma}$ unsere jetzige G_6 sein soll. In der G_{12} giebt es eine Vierergruppe G_4 und in dieser drei G_2, welche einzeln innerhalb der G_4 ausgezeichnet sind. Die Operationen der G_4 seien $1, w_1, w_2, w_3$; eine besonders herausgegriffene G_2 enthalte 1 und w_1. Wir nehmen dann diese G_2 als die oben durch G_τ bezeichnete Gruppe, während die $G_{\varkappa\tau}$ nun unsere Vierergruppe G_4 sein wird. An Stelle der $g_\varkappa^{(v)}$ und $g_\varkappa^{(w)}$ treten hier zwei Gruppen zweiter Ordnung g_2. Diese bezieht man nun in der That sofort auf *eine* bestimmte Weise holoedrisch isomorph auf einander, wie sich denn überhaupt stets zwei cyclische Gruppen gleicher Ordnung in diese Beziehung zu einander setzen lassen. Man sieht, hier sind alle Bedingungen für die Existenz einer intermediären $G_{2\cdot 2\cdot 3}$ erfüllt; wollen wir deren Substitutionen jetzt auch noch explicite kennen lernen.

Durch Combination der Vierergruppe G_4 und der G_6 der Substitutionen (1) entspringt eine G_{24}, deren Operationen, in gewohnter Weise angeordnet, diese sind:

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\hphantom{1,\quad \binom{1,\,3}{3,\,4},\ \binom{2,\,3}{3,\,5}}}^{G_3} \qquad\qquad\qquad\qquad \overbrace{\hphantom{\binom{1,\,3}{0,\,1},\ \binom{1,\,0}{3,\,1},\ \binom{2,\,3}{3,\,2}}}^{G_6} \\
G_4\left\{\begin{array}{c} G_2\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \end{array}\right. & \left.\begin{array}{ccc|ccc} 1, & \binom{1,\,3}{3,\,4}, & \binom{2,\,3}{3,\,5} & \binom{1,\,3}{0,\,1}, & \binom{1,\,0}{3,\,1}, & \binom{2,\,3}{3,\,2} \\ \binom{1,\,2}{2,\,5}, & \binom{1,\,5}{5,\,2}, & \binom{2,\,1}{1,\,1} & \binom{1,\,5}{2,\,5}, & \binom{1,\,2}{5,\,5}, & \binom{2,\,1}{1,\,4} \\ \hline \binom{1,\,4}{4,\,5}, & \binom{1,\,1}{1,\,2}, & \binom{2,\,5}{5,\,1} & \binom{1,\,1}{4,\,5}, & \binom{1,\,4}{1,\,5}, & \binom{2,\,5}{5,\,4} \\ \binom{3,\,2}{4,\,3}, & \binom{3,\,5}{1,\,0}, & \binom{0,\,1}{5,\,3} & \binom{3,\,5}{4,\,3}, & \binom{3,\,2}{1,\,3}, & \binom{0,\,1}{5,\,0} \end{array}\right.
\end{array}
$$

Indem für uns $\varkappa = 2$ ist, wird $\binom{1,\,1}{4,\,5}$ die oben mit $v_\sigma w_\tau$ bezeichnete Operation. Die combinierte Untergruppe $G_{2\cdot 3}$ ist, wie man sofort berechnet, eine cyclische G_6, und die Vereinigung von deren sechs Substitutionen mit $\binom{1,\,1}{4,\,5}$ führt auf die sechs im letzten Rechteck des eben aufgestellten Schemas angeführten Operationen, die man übrigens

ohne Mühe als solche der Periode zwei erkennt. *Die intermediäre* G_{12}, *aus diesen letzten sechs Substitutionen und der combinierten* $G_{2\cdot 3}$ *bestehend, erweist sich dergestalt als eine Gruppe* G_{12} *vom Diedertypus.*

§ 9. Reduction des Problems der Zerlegung der Gruppen $G_{\mu(n)}$, bez. $G_{2\mu(n)}$. Historisches.

Die Entwicklungen der vorigen Paragraphen haben allgemeine Bedeutung für diejenigen Stufenzahlen $n = n_1 \cdot n_2$, die aus zwei gegen einander relativ primen Zahlen n_1, n_2 zusammengesetzt sind. Um dies in Allgemeinheit zu erörtern, müssen wir uns indessen der homogenen Substitutionen bedienen, was für den Fall $n = 6$ des vorigen Paragraphen noch nicht unbedingt nötig war.

Zwei homogene Modulsubstitutionen sind stets und nur dann modulo n congruent, wenn sie einander mod. n_1 und mod. n_2 einzeln genommen congruent sind*). Es wird nun in der $G_{2\mu(n)}$ der mod. n incongruenten Substitutionen eine gewisse Reihe modulo n_2 mit der Identität congruenter Substitutionen sich finden. Unter den Substitutionen dieser Reihe können keine zwei modulo n_1 congruent ausfallen, während andrerseits in derselben noch alle $2\mu(n_1)$ modulo n_1 incongruenten Typen auftreten müssen, letzteres deshalb, weil nach § 4, p. 395 auch in der Hauptcongruenzgruppe n_2^{ter} Stufe noch alle Typen mod. n_1 vorkommen. Die Zahl der mod. n_2 mit der Identität congruenten Substitutionen der $G_{2\mu(n)}$ ist sonach $2\mu(n_1)$. *Letztere werden dabei eine in der* $G_{2\mu(n)}$ *ausgezeichnete Untergruppe* $G_{2\mu(n_1)}$ *bilden*; möge sie aus

$$(1) \qquad 1, v_1, v_2, \cdots, v_{2\mu(n_1)-1}$$

bestehen. Diese $2\mu(n_1)$ Operationen können wir auf der anderen Seite als ein Repräsentantensystem der homogenen Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{2\mu(n_1)}$ in Bezug auf die Gesamtgruppe Γ ansehen; *besagte* $G_{2\mu(n_1)}$ *ist sonach die zur Stufe* n_1 *gehörige endliche Gruppe* $2\mu(n_1)^{\text{ter}}$ *Ordnung.* In

*) Man zeigt leicht, dass dieser Satz bei den nicht-homogenen Substitutionen nicht gilt. Da giebt es vielmehr stets *zwei* modulo n incongruente Operationen, die beide modulo n_1 und modulo n_2, einzeln genommen, $\equiv 1$ sind; z. B. sind die beiden modulo 12 verschiedenen Typen $\begin{pmatrix} 7, & 0 \\ 0, & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ doch beide sowohl mod. 3 wie mod. 4 der Identität congruent. Eben dieser Sachlage wegen müssen wir im Texte die homogenen Substitutionen heranziehen. Eine Ausnahme findet übrigens wieder für den Fall statt, dass eine der Zahlen n_1, n_2 gleich 2 ist; alsdann gilt der Satz für die nicht-homogenen Substitutionen genau in der Form, wie er im Texte für die homogenen aufgestellt wurde. Hierher gehört das im vorigen Paragraphen betrachtete Beispiel $n = 6$, weshalb wir auch dort mit den nicht-homogenen Substitutionen unbeschadet arbeiten konnten.

ganz entsprechender Weise bilden die modulo n_1 mit der Identität congruenten Substitutionen eine ausgezeichnete $G_{2\mu(n_2)}$ in der $G_{2\mu(n)}$, welche als die zur Stufe n_2 gehörige endliche Gruppe $2\mu(n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung aufgefasst werden kann. Die Substitutionen derselben sollen heissen:

$$1,\ w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_{2\mu(n_2)-1}. \tag{2}$$

Da die $G_{2\mu(n_1)}$ ausgezeichnet in $G_{2\mu(n)}$ enthalten ist, so haben wir jedenfalls

$$w_k^{-1} v_i w_k \equiv v_l,\ (\text{mod. } n_1 \cdot n_2).$$

Betrachten wir diese Congruenz aber nur mod. n_1, so kommt $v_i \equiv v_l$ (mod. n_1), da $w_k \equiv 1$, (mod. n_1) ist. Inzwischen sind doch die Substitutionen (1) mod. n_1 alle verschieden; wir haben also notwendig $i = l$, *so dass jede Operation* (1) *mit jeder einzelnen Operation* (2) *vertauschbar ist*:

$$v_i w_k \equiv w_k v_i,\ (\text{mod. } n). \tag{3}$$

Die Gruppe $G_{2\mu(n)}$ *entsteht jetzt offenbar durch Combination ihrer beiden Untergruppen* $G_{2\mu(n_1)}$, $G_{2\mu(n_2)}$; in der That ist ja auch (cf. 3 p. 395):

$$2\mu(n) = 2\mu(n_1) \cdot 2\mu(n_2).$$

Man sieht, dass wiederum alle Vorbedingungen für die Entwicklungen von § 7, p. 402 erfüllt sind, und dass demgemäss die dort durch G_{st} bezeichnete Gruppe nun direct mit der $G_{2\mu(n)}$ identificiert werden kann. Man wird also auf Grund der an der gemeinten Stelle entwickelten Regeln die Gesamtheit aller in $G_{2\mu(n)}$ enthaltenen Untergruppen durch einfache Massnahmen aufstellen können, wenn wir zuvor die Gruppen $G_{2\mu(n_1)}$ und $G_{2\mu(n_2)}$ einzeln vollständig in ihre Untergruppen zerlegt denken. *Wir haben solchergestalt das Problem der Zerlegung der* $G_{2\mu(n)}$ *im wesentlichen auf die beiden einfacheren Probleme der Zerlegung der Gruppen* $G_{2\mu(n_1)}$ *und* $G_{2\mu(n_2)}$ *zurückgeführt.* Wie wir nun die Reduction unserer Aufgabe noch weiterführen werden, liegt auf der Hand. Möge die Zerlegung der Zahl n in ihre Primfactoren auf $n = q^{\nu} \cdot q_1^{\nu_1} \cdot q_2^{\nu_2} \cdots$ führen, so werden wir zuvörderst die Gruppen $G_{2\mu(q^{\nu})}$, $G_{2\mu(q_1^{\nu_1})}$, $\cdots$ einzeln zerlegen, worauf nun die Regeln von § 7 zu wiederholten Malen anzuwenden sein würden. Bei dieser Sachlage brauchen wir also gar nicht die Gruppe $G_{2\mu(n)}$ für alle möglichen Werte von n zu zerlegen; *vielmehr hat sich unser Problem im wesentlichen darauf reduciert, dass wir für alle Primzahlpotenzen* q^{ν} *die Zerlegung der bezüglichen* $G_{2\mu(q^{\nu})}$ *thatsächlich ableisten.* Alsdann aber würden wir für jedes uns vorgelegte n die vielleicht umfänglichen, aber doch im Princip elementaren Massnahmen des § 7 auszuüben haben, um auf Grund der geleisteten Zerlegung der Gruppen $G_{2\mu(q^{\nu})}$ nun auch die Zerlegung von $G_{2\mu(n)}$ zu erledigen.

Wir wollen nun sogleich mitteilen, in wie weit die hier vorgelegten Probleme heutzutage ihre Auflösung gefunden haben. Die Zerlegung der nicht-homogenen $G_{\mu(q^\nu)}$ für eine beliebige Primzahlpotenz ist in der That durch Hrn. Gierster geliefert worden*). (Nur blieb dabei vorerst der Fall $q = 2$ ausser Betracht, der sich nicht ohne weiteres unter den allgemeinen Fall subsumiert). Nehmen wir hinzu, dass von hier aus der Fortgang zu den homogenen Gruppen $G_{\mathfrak{z}\mu(q^\nu)}$ ohne besondere Mühe geleistet werden könnte, so wird man zufolge der gerade vorausgeschickten Bemerkungen das Problem der Zerlegung der Gruppen $G_{\mathfrak{z}\mu(n)}$ und damit zugleich das Problem der Aufstellung aller Congruenzgruppen als ein im wesentlichen gelöstes ansehen dürfen und wird in diesem Sinne die grosse Bedeutung der genannten Gierster'schen Arbeit anerkennen.

Freilich wird es für uns im folgenden der Kürze halber nicht statthaft sein, Hrn. Gierster bis zum allgemeinen Fall der Primzahlpotenz q^ν zu folgen. Wir werden vielmehr in ausführlicher Weise nur den niedersten hierbei in Betracht kommenden Fall der einfachen Primzahl q berücksichtigen. *In der That soll eben dieses in den beiden folgenden Kapiteln unsere Aufgabe sein: Die vollständige Zerlegung der nicht-homogenen Gruppe $G_{\mu(q)}$ zu entwickeln* (womit wir uns dann die Mittel zur Aufstellung aller Congruenzgruppen von Primzahlstufe verschafft haben werden). Auch für diesen Fall der Primzahlstufe q ist eine Arbeit von Hrn. Gierster grundlegend gewesen**), indem in derselben zum ersten Male die $G_{\mu(q)}$ vollständig zerlegt und zugleich der Beweis dieser Vollständigkeit beigebracht wurde. Ein grosser Teil der in der $G_{\mu(q)}$ enthaltenen Untergruppen ist freilich schon früher von J. A. Serret***) aufgestellt und untersucht worden. Das gilt, wie wir hier zum Schluss vorläufig anführen, insbesondere von den cyclischen Untergruppen der $G_{\mu(q)}$, die im nächstfolgenden Kapitel zur Aufstellung gelangen sollen. Auf die ersten Untersuchungen, welche Galois über die hier in Betracht kommenden Fragen ausgeführt hat, werden wir noch verschiedentlich zurückkommen†).

---

*) Man sehe die Arbeit: *„Über die Galois'sche Gruppe der Modulargleichung, wenn der Transformationsgrad die Potenz einer Primzahl > 2 ist"*, Math. Ann. Bd. 26, p. 309 (1885).

**) Man sehe Gierster's Abhandlung *„Die Untergruppe der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades"*, Math. Ann. Bd. 18, p. 319 (1881).

***) Man vergl. die bezüglichen Mitteilungen von Serret in den Comptes Rendus von 1859 und 1860, sowie dessen *Cours d'algèbre supérieure* t. II p. 363 u. f.

†) Oeuvres de Galois l. c. (Lettre à Mr. Chevalier vom 29. Mai 1832).

§ 10. Das Verzweigungsschema ausgezeichneter Congruenzgruppen.

Am Schlusse des gegenwärtigen Kapitels fügen wir noch einige Entwicklungen an, vermöge deren wir die Tragweite unserer Methode, durch Congruenzen modulo n Untergruppen der Modulgruppe zu definieren, bezeichnen wollen. Wir handeln dabei zweckmässiger Weise vorerst vom Verzweigungsschema einer ausgezeichneten Congruenzgruppe der n^{ten} Stufe, die wir $\Gamma^{(n)}$ nennen wollen. Da $\Gamma^{(n)}$ die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe als Untergruppe in sich enthält, so wird sich das Polygon der letzteren durch eine bestimmte Anzahl von Polygonen der $\Gamma^{(n)}$ einfach und vollständig bedecken lassen. Es entspringt daraus insbesondere der Satz, dass das Verzweigungsschema der ausgezeichneten $\Gamma^{(n)}$ $\left\{2, 3, \frac{n}{\tau}\right\}$ sein wird, wo τ ein Teiler der Zahl n ist. Dass hier nun τ notwendig 1 ist, d. h. *dass jede im Sinne von* § 6, p. 401, *eigentlich zur* n^{ten} *Stufe gehörige Congruenzgruppe stets das Verzweigungsschema* $\{2, 3, n\}$ *besitzt*, wollen wir jetzt zeigen.

Wir zerlegen zu dem Ende die Stufenzahl n in ihre Primfactoren $n = q^{\nu} \cdot q_1^{\nu_1} \cdot q_2^{\nu_2} \cdots$ und greifen einen derselben, etwa q, heraus, wobei wir voraussetzen, dass der ihm zugehörige Exponent $\nu > 1$ sei. Da zufolge (7) p. 397 unter diesen Umständen $\mu(n) = q^3 \cdot \mu\left(\frac{n}{q}\right)$ ist, so wird es in der $G_{\mu(n)}$ der mod. n incongruenten Substitutionen im ganzen q^3 mit der Identität mod. $\frac{n}{q}$ congruente Substitutionen geben. Die Gestalt derselben bestimmt man sofort zu:

$$(1) \qquad V \equiv \begin{pmatrix} 1 + a\frac{n}{q}, & b\frac{n}{q} \\ c\frac{n}{q}, & 1 - a\frac{n}{q} \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } n),$$

wobei a, b, c unabhängig von einander Restsysteme modulo q durchlaufen sollen. Diese q^3 Operationen bilden innerhalb der $G_{\mu(n)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe G_{q^3}; denn es ist die Hauptcongruenzgruppe $\left(\frac{n}{q}\right)^{\text{ter}}$ Stufe, die sich modulo n genommen auf die in Rede stehende G_{q^3} reduciert. Die Structur dieser G_{q^3} ist aufs leichteste in Erfahrung zu bringen. Bezeichnen wir die einzelne Operation (1) kurz durch (a, b, c), so hat man auf Grund leichter Rechnung für die Combination zweier unter ihnen die Formel:

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c').$$

Wir entnehmen daraus, dass erstlich jede Substitution (1), die Identität ausgenommen, die Periode q besitzt, dass aber weiter je zwei Sub-

stitutionen (1) mit einander vertauschbar sind. Es giebt demzufolge in der G_{q^2} im ganzen (q^2+q+1) cyclische G_q, während je zwei unter ihnen combiniert eine G_{q^2} liefern. Eine solche G_{q^2} haben wir z. B. in den q^2 Operationen $(0, b, c)$ vor uns, welche sich aus den beiden (0, 1, 0) und (0, 0, 1) erzeugen lassen. Ziehen wir hieraus noch die Folgerung, dass sich die G_{q^2} erzeugen lässt aus den drei Operationen:

$$(2)\quad V_1 = \begin{pmatrix} 1, & \frac{n}{q} \\ 0, & 1 \end{pmatrix},\quad V_2 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\frac{n}{q}, & 1 \end{pmatrix},\quad V_3 = \begin{pmatrix} 1+\frac{n}{q}, & \frac{n}{q} \\ -\frac{n}{q}, & 1-\frac{n}{q} \end{pmatrix},$$

in welchen wir übrigens drei mit einander gleichberechtigte parabolische Modulsubstitutionen der Amplitude $\left(\frac{n}{q}\right)$ erkennen.

Eine Congruenzgruppe $\left(\frac{n}{q}\right)^{\text{ter}}$ Stufe wird sich modulo n stets auf eine solche Untergruppe der $G_{\mu(n)}$ reducieren, welche unsere G_{q^2} in sich enthält. Aber auch der umgekehrte Satz gilt offenbar: Reduciert sich eine durch Congruenzen modulo n vollständig definierbare Untergruppe $\Gamma_{\mu'}$ der Modulgruppe modulo n auf eine solche Untergruppe der $G_{\mu(n)}$, welche die G_{q^2} in sich enthält, so enthält $\Gamma_{\mu'}$ bereits die Hauptcongruenzgruppe $\left(\frac{n}{q}\right)^{\text{ter}}$ Stufe in sich und ist der $\left(\frac{n}{q}\right)^{\text{ten}}$ oder einer noch niedrigeren Stufe zuzuerteilen. Bei Anwendung dieses Satzes kann man sich offenbar damit begnügen, in der mod. n reducierten $\Gamma_{\mu'}$ die drei Operationen (2) nachzuweisen; gelingt dies, so wird sich in der reducierten $\Gamma_{\mu'}$ die ganze G_{q^2} finden. Ist überdies $\Gamma_{\mu'}$ in der Gesamtgruppe Γ ausgezeichnet, so wird in der mod. n reducierten $\Gamma_{\mu'}$ mit der einzelnen Substitution (2) auch jede der beiden anderen auftreten. Hiernach vereinfacht sich unser Satz dahin, dass wir sagen: *Eine in der Modulgruppe Γ ausgezeichnete Untergruppe, die sich durch Congruenzen mod. n vollständig definieren lässt, in der sich aber eine mod. n mit* $\begin{pmatrix} 1, & \frac{n}{q} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ *congruente Substitution findet, wird sich auch bereits durch Congruenzen mod. $\frac{n}{q}$ vollständig definieren lassen.*

Ein entsprechender Satz gilt auch für den Fall, dass nur die erste Potenz der Primzahl q in n aufgeht; inzwischen liegen die Verhältnisse hier in mehrfachem Betracht etwas anders. Wir schreiben $n = q \cdot n'$, wobei also n' eine durch q nicht mehr teilbare Zahl sein wird, und gehen übrigens zweckmässig für einen Augenblick auf die

homogenen Modulsubstitutionen zurück. In der homogenen $G_{2\mu(n)}$ giebt es $2\mu(q)$ mit der Identität modulo n' congruente Operationen, die eine ausgezeichnete $G_{2\mu(q)}$ bilden. In dieser $G_{2\mu(q)}$ haben wir die Gruppe modulo q incongruenter homogener Modulsubstitutionen vor uns, und wir wissen von dieser Gruppe, dass sie sich z. B. aus denjenigen beiden in ihr enthaltenen Operationen herstellen lässt, die modulo q mit S bez. T congruent sind. Gehen wir zu den nicht-homogenen Substitutionen zurück, so werden sich dabei alle diejenigen homogenen Untergruppen der $G_{2\mu(n)}$, welche die mit $\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ modulo n congruente homogene Substitution enthalten, auf nicht-homogene Untergruppen der $G_{\mu(n)}$ jeweils der halben Ordnung reducieren; alle $\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ mod. n nicht enthaltende homogene Untergruppen behalten beim Rückgang zur nicht-homogenen $G_{\mu(n)}$ ihre Ordnung bei. Zu den Untergruppen letzterer Art gehört nun auch die $G_{2\mu(q)}$, und in der That giebt es $2\mu(q)$ verschiedene, mit der Identität modulo n' congruente Operationen in der $G_{\mu(n)}$. Es liegt also zwischen der nicht-homogenen $G_{2\mu(q)}$ und der homogenen $G_{2\mu(q)}$ holoedrischer Isomorphismus vor, bei dem eine Operation der letzteren Gruppe nicht-homogen geschrieben direct die entsprechende Operation der ersteren Gruppe giebt, während umgekehrt eine Operation der ersten nur unter bestimmter Fixierung des Vorzeichens ihrer Coefficienten in die entsprechende homogene Substitution gespalten werden kann. Immerhin ist offenbar, dass den beiden mit S und T mod. q congruenten Operationen der homogenen $G_{2\mu(q)}$ die beiden mit den nicht-homogenen Substitutionen S bez. T modulo q congruenten Operationen der nicht-homogenen $G_{2\mu(q)}$ zugewiesen sind; letztere sind also *erzeugende* Operationen der nicht-homogenen $G_{2\mu(q)}$*).

Liege jetzt wieder eine (nicht-homogene) Untergruppe $\Gamma_{\mu'}$ der Modulgruppe Γ vor, die sich durch Congruenzen modulo n völlig charakterisieren lässt. Finden sich alsdann in der mod. n reducierten $\Gamma_{\mu'}$ zwei Operationen, die modulo n' mit der Identität, modulo q aber bez. mit S und T congruent sind, so umfasst $\Gamma_{\mu'}$ die Hauptcongruenzgruppe der Stufe n' in sich und lässt sich bereits durch Congruenzen mod. $\frac{n}{q}$ vollständig charakterisieren. Ist insbesondere $\Gamma_{\mu'}$ eine ausgezeichnete Untergruppe, und ist V diejenige Operation der $\Gamma_{\mu'}$, die mod. n' mit 1, mod. q aber mit S congruent ist, so wird neben V in

*) Man vergl. hier auch die Note auf der folgenden Seite.

der Untergruppe $\Gamma_{\mu'}$ auch $T^{-1}VT = TVT$ und also auch $VTVTV = V'$ vorkommen; offenbar aber ist $V' \equiv 1$, (mod. n') und $V' \equiv STSTS$ (mod. q), welche letztere Substitution $STSTS$ keine andere ist als T*). Daher endlich das Resultat: *Findet sich in der ausgezeichneten Untergruppe $\Gamma_{\mu'}$, die sich vollständig durch Congruenzen modulo n charakterisieren lässt, eine Substitution, die modulo $\frac{n}{q}$ mit 1, modulo q aber mit S congruent ist, so lässt sich $\Gamma_{\mu'}$ bereits vollständig durch Congruenzen modulo $\frac{n}{q}$ definieren.*

Die durchgeführte Betrachtung bringen wir nun in Anwendung auf die im Eingang des Paragraphen mit $\Gamma^{(n)}$ bezeichnete ausgezeichnete Congruenzgruppe. Dieselbe sollte zur n^{ten} Stufe gehören und damit haben wir, wie wir hier nochmals betonen, bereits zum Ausdruck gebracht, dass $\Gamma^{(n)}$ nicht schon durch Congruenzen bezüglich eines Teilers von n, der von n selbst verschieden ist, definiert werden kann. Man setze jetzt, es sei das Verzweigungsschema von $\Gamma^{(n)}$ $\left\{2, 3, \frac{n}{\tau}\right\}$, so werden alle parabolischen Modulsubstitutionen, deren Amplitude durch $\frac{n}{\tau}$ teilbar ist, in $\Gamma^{(n)}$ enthalten sein. Teile jetzt die Primzahl q, welche in n in der Potenz $\nu > 1$ enthalten sei, $\frac{n}{\tau}$ nur in der Potenz $\nu' < \nu$, so ist $\frac{n}{q}$ sicher durch $\frac{n}{\tau}$ teilbar, und $\begin{pmatrix} 1, & \frac{n}{q} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ ist eine in $\Gamma^{(n)}$ enthaltene Substitution. Unter diesen Umständen könnte $\Gamma^{(n)}$ nicht zur n^{ten} Stufe gehören. Sei zweitens q nur in erster Potenz in n enthalten, finde sich aber in $\frac{n}{\tau}$ überhaupt nicht mehr. Dann teilt $\frac{n}{\tau}$ jedenfalls die Zahl $\frac{n}{q} = n'$; in $\Gamma^{(n)}$ finden sich also die parabolischen Substitutionen $V = \begin{pmatrix} 1, & bn' \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, und hier kann man die ganze Zahl b leicht so wählen, dass $bn' \equiv 1$, (mod. q) wird, da n' relativ

*) Man bemerke übrigens, dass Substitution $V' = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, obschon sie $\equiv 1$ (mod. n') ist und modulo q die Periode zwei besitzt, dennoch als Operation der $G_{\mu(n)}$ d. h. modulo n betrachtet von der Periode *vier* ist. Ist nämlich

$$V'^2 = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix},$$

so berechnet man sofort $\beta' \equiv \gamma' \equiv 0$, (mod. n), aber $\alpha' \equiv \delta' \equiv -1$, (mod. q) und $\alpha' \equiv \delta' \equiv +1$, $\left(\text{mod. } \frac{n}{q}\right)$; mod. n genommen können also α' und δ' weder mit $+1$ noch mit -1 congruent sein. Wohl aber zeigt man leicht $V'^4 \equiv 1$, (mod. n).

prim gegen q ist. Die so in $\Gamma^{(n)}$ nachgewiesene Operation V würde aber $\equiv 1$, (mod. n') und $\equiv S$, (mod. q) sein, so dass auch unter diesen Umständen $\Gamma^{(n)}$ nicht zur n^{ten} Stufe gehören könnte. Zusammenfassend finden wir also, dass q in $\frac{n}{\tau}$ auf alle Fälle ebenso oft enthalten sein muss als in n. Da die nämliche Überlegung für alle in n enthaltenen Primzahlen passt, so entspringt die Identität von $\frac{n}{\tau}$ und n und damit das Resultat, um welches es uns hier zu thun war: *Eine ausgezeichnete Congruenzgruppe der n^{ten} Stufe besitzt das Verzweigungsschema* $\{2, 3, n\}$.

§ 11. Congruenzcharakter der Untergruppen n^{ter} Classe. Tragweite der Congruenzgruppen.

Aus dem Schlusssatze des vorigen Paragraphen wollen wir jetzt endlich eine Reihe von Folgerungen ziehen, auf die wir bereits im Anfang des § 5, p. 397 hindeuteten. Im Anschluss an den damaligen Gedankengang knüpfen wir an die zur Zahl n gehörige, oben durch $\Gamma_{\{n\}}$ bezeichnete ausgezeichnete Untergruppe vom Index ∞ an*). Die Substitutionen derselben wollen wir bezüglich des beliebig gewählten Zahlmoduls m reducieren. Dabei werden wir entweder alle $\mu(m)$ Typen mod. m incongruenter Substitutionen erhalten, oder es finden sich nicht alle, sondern nur einige von ihnen, die alsdann innerhalb der $G_{\mu(m)}$ eine *ausgezeichnete* Untergruppe abgeben; man entnimmt letzteres leicht aus dem Umstande, dass $\Gamma_{\{n\}}$ in Γ ausgezeichnet enthalten ist. Im ersteren dieser beiden Fälle ist $\Gamma_{\{n\}}$ durch Congruenzen mod. m in keiner Weise eingeschränkt, im letzteren ist sie Untergruppe einer ausgezeichneten Congruenzgruppe m^{ter} Stufe. Diese Untergruppe besitzt nun ein Verzweigungsschema $\{2, 3, m\}$, und andrerseits muss sich das zugehörige Fundamentalpolygon nach früheren Sätzen nicht nur glatt in die Teilung $(2, 3, n)$ einlagern lassen, sondern auch, durch die bezüglichen erzeugenden Substitutionen reproduciert, zu einer *einfachen* Bedeckung der Teilung $(2, 3, n)$ hinführen. Es ist demnach notwendig m ein Teiler der Zahl n. Nun wissen wir aber bereits, dass $\Gamma_{\{n\}}$ Untergruppe der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe ist. Daher gewinnen wir den Satz: $\Gamma_{\{n\}}$ *ist freilich Untergruppe der Hauptcongruenzgruppe* $\Gamma_{\mu(n)}$ *und damit überhaupt Untergruppe der Congruenzgruppen der Stufe* n *oder* $\frac{n}{\tau}$, *wo* τ *ein beliebiger Teiler von* n *ist; sie ist aber nicht Untergruppe irgend einer anderen Congruenzgruppe irgend welcher Stufe.* Wir können das auch dahin aussprechen: *Die Substitutionen* v *der* $\Gamma_{\{n\}}$

*) Wobei wir also $n > 6$ nehmen.

sind an die Bedingung $v \equiv 1$, *(mod. n) geknüpft; alle übrigen darüber hinaus noch hinzukommenden arithmetischen Merkmale dieser Substitutionen sind solche, die sich nicht in unserer Weise durch Congruenzen bezüglich fester Zahlmoduln m charakterisieren lassen**).

Liege jetzt irgend eine Untergruppe Γ_μ von endlichem Index μ vor, so wollen wir zuvörderst deren Classe bestimmen, welche sich als die n^{te} finde. Alsdann ist $\Gamma_{\{n\}}$ Untergruppe von Γ_μ, und es finden sich selbstverständlich in Γ_μ, mod. m betrachtet, alle diejenigen Typen von Modulsubstitutionen, die auch schon in $\Gamma_{\{n\}}$ enthalten sind. Mit Rücksicht auf den soeben für $\Gamma_{\{n\}}$ gefundenen Satz entspringt daher hier das wichtige Resultat: *Ist eine Untergruppe* n^{ter} *Classe der Modulgruppe in einer Congruenzgruppe enthalten, so ist deren Stufe n oder ein Teiler von n.*

Haben wir die Untergruppe Γ_μ etwa auf Grund des Verzweigungssatzes definiert, und sollen wir alsdann entscheiden, ob sich ihre arithmetische Eigenart vollständig oder auch nur zum Teil in unserer Weise durch Congruenzen charakterisieren lässt, so ist das einzuschlagende Verfahren nach dem soeben gewonnenen Satze das folgende: Wir reducieren die erzeugenden Substitutionen von Γ_μ mod. n, wo n die Classe von Γ_μ ist, eine Reduction, die auf die Operationen V_1, V_2, V_3, $\cdots$ führen möge. Durch Combination und Wiederholung derselben gewinnen wir eine bestimmte Untergruppe der $G_{\mu(n)}$ und haben nun folgende Fälle zu unterscheiden: *Entweder coincidiert die erhaltene Untergruppe von* $G_{\mu(n)}$ *mit* $G_{\mu(n)}$ *selbst, und dann ist* Γ_μ *auch mod. n durch keine Congruenzen eingeschränkt, oder wir haben eine eigentliche Untergruppe von* $G_{\mu(n)}$, *und diese charakterisiert dann die Einschränkung, welche man für* Γ_μ *durch Congruenzen angeben kann. Ergiebt insbesondere die fragliche Untergruppe von* $G_{\mu(n)}$ *eine Congruenzgruppe* n^{ter} *Stufe, deren Index mit dem Index* μ *der anfänglich vorgelegten* Γ_μ *übereinstimmt, so ist* Γ_μ *geradezu identisch mit jener Congruenzgruppe und kann sonach durch Congruenzen modulo n vollständig definiert werden.* Im ersten dieser Fälle hat man übrigens gar nicht nötig, alle Operationen der $G_{\mu(n)}$ aus den V_1, V_2, $\cdots$ wirklich herzustellen; vielmehr genügt es, zwei mit S bez. T mod. n congruente Substitutionen aus den V_1, V_2, $\cdots$

---

*) Dieser den Congruenzcharakter der Untergruppen $\Gamma_{\{n\}}$ betreffende Satz wurde von Hrn. Pick gelegentlich einer Correspondenz desselben mit dem Herausgeber (Sommer 1886) ohne Beweis geäussert. Die im Texte gerade vorliegenden Entwicklungen, sowie überhaupt die principielle Verwertung der Untergruppen $\Gamma_{\{n\}}$ gehen auf anderweit nicht veröffentlichte Untersuchungen des Herausgebers zurück.

herzustellen; diese beiden werden dann, wie wir wissen, sicher die gesamte $G_{\mu(n)}$ erzeugen*).

Angesichts der gewonnenen Resultate charakterisiert sich die Tragweite der im folgenden fast ausschliesslich zur Verwendung kommenden Methode, durch Congruenzen modulo n Untergruppen der Modulgruppe Γ zu definieren, dem Gesamtumfange des gruppentheoretischen Problems gegenüber als eine äusserst geringe**). Indem man für die Untergruppen n^{ter} Classe sogleich die bezügliche Dreiecksteilung $(2, 3, n)$ zu Grunde legt und in ihr, dem Verzweigungssatze folgend, Fundamentalpolygone für die Untergruppen n^{ter} Classe absondert, zeigt sich die Anzahl von Untergruppen n^{ter} Classe als unbegrenzt gross; aber immer nur eine *endliche* Anzahl unter ihnen lässt sich vollständig durch Congruenzen, und zwar mod. n, definieren. Welche Merkmale arithmetischer Art für die Substitutionen der übrigen Untergruppen n^{ter} Classe zur Geltung kommen, ist uns zur Zeit noch unbekannt; aber es scheint, dass sich hier der künftigen Forschung noch ein weites Feld wichtiger zahlentheoretischer Entdeckungen darbietet.

---

*) Dieser für praktische Zwecke äusserst wichtige Kunstgriff, von dem auch bereits im vorigen Paragraphen ausgedehnter Gebrauch gemacht wurde, ist zuerst von Pick auf eine im Texte späterhin noch explicite vorkommende Gattung von Untergruppen angewendet; vgl. dessen Arbeit: *Über gewisse ganzzahlige lineare Substitutionen, welche sich nicht durch algebraische Congruenzen erklären lassen*, Math. Ann. Bd. 28, p. 119 (1886).

**) Dass nicht jede Untergruppe der Modulgruppe eine Congruenzgruppe ist, wurde von Klein in ausdrücklicher Weise zuerst in der schon p. 308 genannten der Münchener Akademie im Dec. 1879 vorgelegten Note: *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (abgedruckt Math. Ann. Bd. 17) angegeben. Dortselbst ist denn auch das Wort Congruenzgruppe zuerst gebraucht. Man vergl. hier übrigens auch noch die bereits bei Gelegenheit genannte Arbeit des Herausgebers: *Über die Substitutionsgruppen, welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodul gezogenen Wurzeln gehören*, Math. Ann. Bd. 28 (1886).

Achtes Kapitel.

Die cyclischen Untergruppen in den zur Primzahlstufe q gehörenden Gruppen $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, $G_{q(q^2-1)}$ und $\overline{G}_{q(q^2-1)}$.

Bereits im § 9 des letzten Kapitels wurde das Thema der Entwicklungen angegeben, welche den Rest des gegenwärtigen Abschnitts ausfüllen sollen. Wir wollen für den allgemeinen Fall der Primzahlstufe q die zugehörige endliche Gruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in ihre Untergruppen zerlegen und uns so die Mittel zur Aufstellung aller Congruenzgruppen von Primzahlstufe schaffen. Indem wir gelegentlich auch die homogenen Substitutionen mit in Betracht ziehen, fassen wir aber namentlich unsere Aufgabe in dem Sinne etwas weiter, dass wir auch die Modulsubstitutionen zweiter Art zwischendurch mit verfolgen. Die erweiterte Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ reduciert sich, modulo q genommen, auf eine $\overline{G}_{q(q^2-1)}$, in welcher die $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ ausgezeichnete Untergruppe vom Index zwei ist; auch diese erweiterte $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ wollen wir also mit in Betracht ziehen.

Indem wir $q = 2, 3$ bei Seite lassen, sind die niedersten Specialwerte $q = 5$ und 7. Für beide Fälle ist uns die Zerlegung wenigstens der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ bereits vollständig bekannt; für $q = 5$ von den Vorlesungen über das Ikosaeder her, für $q = 7$ auf Grund der letzten Entwicklungen im vorletzten Kapitel. In der Structur der beiden für $q = 5$ und 7 eintretenden Gruppen G_{60} bez. G_{168} erkannten wir bereits oben mannigfache Analogien; das kommt jetzt darauf hinaus, dass eben $q = 5, 7$ Specialfälle der allgemeinen Primzahlstufe q sind, und dass eben deswegen in den Gruppen G_{60} und G_{168} die Structur der allgemeinen $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in entsprechender Weise zum Ausdruck kommen muss. Auf der anderen Seite können wir die früheren Entwicklungen über $q = 5, 7$ sehr zweckmässig zur Illustrierung unserer weiter folgenden allgemeinen Erörterungen verwerten; da werden uns namentlich die geometrischen, das Polygon F_{168} betreffenden Entwicklungen

von grossem Werte sein, wenn es sich darum handeln soll, entsprechende Überlegungen für die allgemeine Primzahlstufe durchzuführen, was wir uns doch auch zum Ziele stecken werden. Die Behandlung der somit bezeichneten Aufgaben teilen wir jetzt so ein, dass wir im gegenwärtigen achten Kapitel die cyclischen Untergruppen von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, $G_{q(q^2-1)}$ und $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ behandeln, im folgenden aber die nicht-cyclischen. Zuvörderst handelt es sich also um Untersuchungen, die, wie wir schon oben des näheren angaben, zuerst von J. A. Serret durchgeführt sind*).

Ein bei Durchführung der in Aussicht genommenen Untersuchungen sehr zweckmässiges zahlentheoretisches Hilfsmittel müssen wir hier vorab (in den beiden ersten Paragraphen) besprechen, da man es zumeist in den Elementen der Zahlentheorie nicht zu behandeln pflegt.

§ 1. Die Galois'schen imaginären Zahlen.

Möge eine Congruenz zweiten Grades mit einer Unbekannten $x^2 \equiv N$, (mod. q) vorgelegt sein, in welcher N ein beliebig, aber fest gewählter quadratischer Nichtrest von q ist. Dieser Congruenz kann durch keine reelle ganze Zahl genügt werden. Das veranlasst uns dazu, mit Galois**) eine dem Gebiete der reellen Zahlen nicht angehörige imaginäre Zahl ε dadurch zu definieren, dass wir festsetzen, es solle

$$\varepsilon^2 \equiv N, \quad (\text{mod. } q) \tag{1}$$

sein. Die Schöpfung dieser imaginären Zahl ε wird man sofort als einen Schritt erkennen, der sich völlig analog der Einführung der imaginären Einheit i vermöge der Gleichung $x^2 = -1$ an die Seite stellt. So werden wir nun auch vermittelst der reellen ganzen Zahlen $m, n, \cdots$ und unserer imaginären Zahl ε die complexen ganzen Zahlen

$$m + n\varepsilon$$

aufbauen, deren es leicht erweislich mod. q im ganzen q^2 incongruente giebt, die reellen Zahlen hierbei mit eingerechnet.

Sollen wir sogleich die Tragweite der Einführung dieser com-

---

*) Die erweiterte $\overline{G}_{q(q^2-1)}$, sowie die geometrischen Vorstellungen, mit denen wir hier arbeiten, kommen bei Serret natürlich nicht vor.

**) Man vergl. hierzu Galois' Originalarbeit: *Sur la théorie des nombres*, Bulletin des Sciences Mathématiques de Férussac, Bd. 13 p. 428 (1830), oder auch Serret, *Cours d'algèbre supérieure*, Bd. 2 p. 179 oder endlich Camille Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, p. 14. Im Texte kommt übrigens die Galois'sche Schöpfung nicht in ihrer vollen Allgemeinheit in Betracht.

plexen Zahlen $m + n\varepsilon$ charakterisieren, so sei uns eine beliebige Congruenz zweiten Grades mit ganzzahligen reellen Coefficienten

$$ax^2 + 2bx + c \equiv 0, \pmod{q}$$

vorgelegt. Dieselbe führen wir sofort auf die andere Gestalt über:

$$(ax + b)^2 \equiv b^2 - ac, \pmod{q}. \tag{2}$$

Ist nun hier $(b^2 - ac)$ quadratischer Rest von q oder durch q teilbar, so können wir sofort zwei bez. eine reelle Zahl x angeben, welche unserer Congruenz genügt. Ist demgegenüber $b^2 - ac \equiv N'$ Nichtrest von q, so können wir eine Zahl d finden, welche der Congruenz $N' \equiv d^2 N$ genügt, unter N den bestimmten in (1) enthaltenen Nichtrest verstanden. Dann aber besitzt (2) offenbar die beiden Wurzeln*)

$$x \equiv -\frac{b}{a} \pm \frac{d}{a} \cdot \varepsilon \equiv m \pm n\varepsilon, \pmod{q}.$$

Zwei complexe Zahlen dieser Art, die sich also nur im Vorzeichen des imaginären Bestandteiles unterscheiden, sollen fortan conjugiert complex heissen. Wir merken uns also den Satz: *Eine im Gebiete der reellen ganzen Zahlen irreducibele Congruenz zweiten Grades wird im Gebiete unserer complexen Zahlen reducibel und besitzt dann zwei conjugiert complexe Wurzeln* $m \pm n\varepsilon$.

Eine Congruenz höheren, etwa ν^{ten} Grades mit einer Unbekannten $f_\nu(x) \equiv 0$, (mod. q) wird in *dem* Falle eigentliche complexe Wurzeln $m + n\varepsilon$, d. i. solche mit nicht durch q teilbaren n, besitzen, wenn $f_\nu(x)$ im Gebiete der reellen ganzen Zahlen Factoren zweiten Grades enthält, die im gewöhnlichen Sinne irreducibel sind. Es ist aber hier vor allem zu betonen, *dass die Gesamtzahl incongruenter reeller oder complexer Wurzeln* $(m + n\varepsilon)$ *der Congruenz* $f_\nu(x) \equiv 0$ *den Grad* ν *derselben nicht überschreiten kann.* Dieser Satz folgt unter Zugrundelegung des Gebietes der q^2 incongruenten Zahlen $m + n\varepsilon$ genau in derselben Weise aus der Primzahleigenschaft von q, wie man ihn in den Elementen der Zahlentheorie**) allein für das Gebiet der reellen ganzen Zahlen nachweist.

Ist $\mathsf{A} = m + n\varepsilon$ irgend eine der $(q^2 - 1)$ nicht-verschwindenden Zahlen unseres Systems, so sei $\overline{\mathsf{A}}$ ihre conjugiert complexe: $\overline{\mathsf{A}} = m - n\varepsilon$. *Es gilt alsdann stets die wichtige Congruenz:*

$$\overline{\mathsf{A}} \equiv \mathsf{A}^q, \pmod{q}. \tag{3}$$

---

*) Unter $\frac{b}{a}$ meinen wir hier diejenige reelle ganze Zahl, welche mit a multipliciert ein mod. q mit b congruentes Product bildet.

**) Man vergleiche hier und in der nächsten Folge den zweiten Abschnitt der *Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie,* herausgegeben von Dedekind.

Entwickeln wir nämlich $(m + n\varepsilon)^q$ nach dem binomischen Lehrsatz, so bekommen alle Glieder der Entwicklung mit Ausnahme des ersten und letzten durch q teilbare Coefficienten:

$$(m + n\varepsilon)^q \equiv m^q + n^q \cdot \varepsilon^q \equiv m^q + n^q \cdot \varepsilon \cdot N^{\frac{q-1}{2}}.$$

Hier ist nun nach dem Fermat'schen Lehrsatze für die reellen Zahlen $m^q \equiv m$, $n^q \equiv n$, sowie für N als quadratischen Nichtrest von q $N^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1$. Wir haben also in der That

$$(m + n\varepsilon)^q \equiv m - n\varepsilon,$$

womit die Congruenz (3) verificiert ist.

Sofort folgt nun aus (3) weiter $A \equiv \bar{A}^q \equiv A^{q^2}$, (mod. q), welche Congruenz wir, insofern A von Null verschieden ist, auf die Form reducieren können:

$$A^{q^2-1} \equiv 1, \quad (\text{mod. } q). \tag{4}$$

In dieser Congruenz haben wir *die Verallgemeinerung des Fermat'schen Lehrsatzes* für unsere complexen Zahlen vor uns. Da die Zahl A nur der einen Bedingung genügen soll, nicht mit 0 (mod. q) congruent zu sein, so hat Congruenz (4) die wichtige Eigenschaft, gerade soviele incongruente Wurzeln $m + n\varepsilon$ zu besitzen, als ihr Grad anzeigt. Wir folgern daraus in bekannter Überlegung: *Ist τ irgend ein Teiler von $q^2 - 1$, so besitzt die Congruenz*

$$x^\tau - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod. } q)$$

gerade τ incongruente Wurzeln $m + n\varepsilon$. Ist A eine unter ihnen und besitzt dieselbe zugleich die Eigenschaft, nicht schon einer Congruenz $x^{\tau'} - 1 \equiv 0$ mit $\tau' < \tau$ zu genügen, so wollen wir sagen, A *gehöre zum Exponenten τ.* Es ist dabei besonders wichtig, *dass es auch Zahlen giebt, die in diesem Sinne zum Exponenten $(q^2 - 1)$ gehören*, und die wir also innerhalb des hier vorliegenden Zahlgebietes als *die primitiven Wurzeln der Primzahl q* zu bezeichnen haben.

Der Existenzbeweis dieser Primitivwurzeln, um denselben hier etwas näher auszuführen, gelingt genau durch dieselbe Überlegung, wie bei ausschliesslich reellen Zahlen. Wir zerlegen erstlich $(q^2 - 1)$ in seine reellen Primfactoren:

$$q^2 - 1 = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots$$

und beweisen die Existenz einer zum Exponenten $p_1^{\nu_1}$ gehörenden Zahl A. Gehörte nämlich von den $p_1^{\nu_1}$ incongruenten Wurzeln von $x^{p_1^{\nu_1}} \equiv 1$ keine zum Exponenten $p_1^{\nu_1}$, so würden sie alle schon der Congruenz $x^{p_1^{\nu_1 - 1}} \equiv 1$ genügen, was bei ihrer Anzahl $p_1^{\nu_1}$ undenkbar

erscheint. In gleicher Weise sieht man die Existenz einer zu $p_2^{\nu_2}$ u. s. w. gehörenden Zahl ein. Mögen nun andrerseits τ_1 und τ_2 zwei gegen einander relativ prime Teiler von (q^2-1) sein, und möge A_1 zum Exponenten τ_1, A_2 zum Exponenten τ_2 gehören; alsdann gehört

$$A = A_1 A_2^{\tau_2 - 1} \equiv A_1 A_2^{-1}$$

zum Exponenten $\tau_1\tau_2$. Soll in der That $A^\tau \equiv 1$ sein, so würde $A_1^\tau \equiv A_2^\tau$ folgen. Aber eine Potenz von A_1 kann nur zu einem Exponenten gehören, der τ_1 teilt, gleichwie eine Potenz von A_2 zu einem τ_2 teilenden Exponenten gehört. Sonach muss $A_1^\tau \equiv A_2^\tau$ zum gemeinsamen Teiler 1 von τ_1 und τ_2 als Exponenten gehören, d. h. es ist

$$A_1^\tau \equiv A_2^\tau \equiv 1, \pmod{q}.$$

Zufolge dieser Congruenz ist τ Multiplum von τ_1 und τ_2, also wenigstens $\tau = \tau_1\tau_2$, für welchen Wert aber auch sicher $A^\tau \equiv 1$ wird. Hier sieht man nun, dass sich thatsächlich aus den zu den einzelnen Exponenten $p_1^{\nu_1}$, $p_2^{\nu_2}$, $\cdots$ gehörenden Zahlen direct eine Primitivwurzel von q herstellen lässt. Nennen wir dieselbe sogleich selbst wieder A, so gehört ersichtlich $A^{\frac{q^2-1}{\tau}}$ zum Exponenten τ; *wir können also für jeden Teiler τ von (q^2-1) zugehörige Zahlen A wirklich angeben.*

Hier ist endlich der Ort, wo wir noch mit wenigen Worten auf die zum Exponenten $(q+1)$ gehörenden Zahlen eingehen. Sei j eine unter ihnen, so sind die $(q+1)$ incongruenten Wurzeln der Congruenz

$$x^{q+1} \equiv 1, \pmod{q} \tag{5}$$

durch $j, j^2, j^3, \cdots, j^q, 1$ dargestellt. Unter ihnen ist, wie man leicht sieht, $j^{\frac{q+1}{2}} \equiv -1$, und also unterscheiden sich hierbei immer zwei solche Wurzeln j^μ, $j^{\mu'}$, für welche die Differenz von μ und μ' den Wert $\frac{q+1}{2}$ besitzt, nur durch das Vorzeichen. Auf der anderen Seite ist j conjugiert complex mit $j^q \equiv j^{-1}$, *so dass wir in $(j+j^{-1})$ eine reelle, in $(j-j^{-1})$ eine, wie wir sagen werden, rein imaginäre Zahl vor uns haben;* letzteres in dem Sinne, als das Quadrat von $(j-j^{-1})$ ein reeller quadratischer Nichtrest von q sein wird. Da wir für N in (1) eine particuläre Wahl noch nicht getroffen haben, so setzen wir fortan geradezu

$$\varepsilon = j - j^{-1}. \tag{6}$$

Merken wir uns hier noch die beiden sich anschliessenden sofort ersichtlichen Sätze: *Soll das Product von A und ihrer conjugiert complexen Zahl $\overline{A}$ modulo q mit 1 congruent sein, so ist A eine Potenz von j.* Wollen wir unsere q^2 incongruenten Zahlen statt durch ε lieber durch

j darstellen, so werden sie die Gestalt $(a + bj)$ erhalten, wo a und b reelle ganze Zahlen sind; *conjugiert complex sind alsdann jedesmal die beiden* $(a + bj)$ *und* $(a + bj^{-1})$.

§ 2. Imaginäre Gestalt der Gruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

Es mögen jetzt A und B zwei aus der Reihe unserer q^2 incongruenten Zahlen sein, zwischen denen die Bedingung besteht:

$$(1) \qquad A\bar{A} - B\bar{B} \equiv 1, \pmod{q},$$

unter $\bar{A}$ und $\bar{B}$ die zu A bez. B conjugiert complexen Zahlen verstanden. Wir bauen dann aus diesen Zahlen A, B die Substitution auf:

$$W(\xi) \equiv \frac{A\xi + B}{\bar{B}\xi + \bar{A}}, \pmod{q},$$

wobei wir durch das Congruenzzeichen andeuten wollten, dass hier überall die Coefficienten der Substitutionen nur mod. q gerechnet werden sollen. Zugleich erlauben wir auch wieder den vier Coefficienten der einzelnen Substitution W einen gleichzeitigen Zeichenwechsel. *Alle der Bedingung* (1) *entsprechenden Substitutionen* W *bilden, wie man durch directe Rechnung zeigt, eine Gruppe* G'; *von derselben wollen wir nachweisen, dass sie sich auf unsere Gruppe* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *der* $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *modulo* q *incongruenten Modulsubstitutionen*:

$$V(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \pmod{q},$$

holoedrisch isomorph beziehen lässt.

In der That, schreiben wir die einzelne Substitution W explicit:

$$(2) \qquad W(\xi) \equiv \frac{(m + n\varepsilon)\xi + (r + s\varepsilon)}{(r - s\varepsilon)\xi + (m - n\varepsilon)}, \pmod{q},$$

so haben wir in m, n, r, s vier reelle ganze Zahlen, die der Bedingung genügen:

$$m^2 - n^2\varepsilon^2 - r^2 + s^2\varepsilon^2 \equiv 1, \pmod{q}.$$

Letztere Congruenz wollen wir in die Form setzen

$$(m - r)(m + r) - (n + s) \cdot N(n - s) \equiv 1$$

und auf Grund derselben vier reelle ganze Zahlen α, β, γ, δ durch die Congruenzen definieren:

$$(3) \quad \alpha \equiv m - r, \ \delta \equiv m + r, \ \beta \equiv -(n + s), \ \gamma \equiv -N(n - s), \pmod{q},$$

wo nun ersichtlich die Determinante dieser vier ganzen Zahlen mod. q mit 1 congruent ist: $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$, (mod. q). Letzterem Umstande

zufolge giebt es in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine Operation $V(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, welche gerade die in (3) gewonnenen Zahlen zu Coefficienten besitzt. Der einzelnen Operation W der G' ist solchergestalt stets eine bestimmte Operation V von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ zugeordnet. Aber die Congruenzen (3) lassen sich sofort eindeutig umkehren, wodurch wir jedem Zahlquadrupel α, β, γ, δ der Determinante 1 vier ganze Zahlen:

$$(4) \quad m \equiv \frac{\alpha+\delta}{2}, \quad r \equiv -\frac{\alpha-\delta}{2}, \quad n \equiv -\frac{\beta+\gamma N^{-1}}{2}, \quad s \equiv -\frac{\beta-\gamma N^{-1}}{2}$$

eindeutig zuordnen, die zur Bildung einer bestimmten Substitution (2) Anlass geben. Da überdies noch zufolge (3) und (4) ein gleichzeitiger Zeichenwechsel von α, β, γ, δ einen ebensolchen von m, n, r, s nach sich zieht, so erkennen wir: *Die Operationen der beiden Gruppen* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *und* G' *sind wechselweise eindeutig einander zugeordnet;* die letztere Gruppe G' nennen wir dementsprechend fortan $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, da sie doch also auch die Ordnung $\frac{q(q^2-1)}{2}$ haben muss.

Durch die begründete Zuordnung der beiderlei Gruppen $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *und* $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *ist nun holoedrischer Isomorphismus zwischen denselben hergestellt.*

Wir beweisen das hier in einfachster Weise dadurch, dass wir die eine Gruppe geradezu in die andere transformieren, die Ausdrucksweise „Transformation" einer Substitution bez. einer Gruppe von Substitutionen dabei in dem Sinne gebraucht, wie wir sie allgemein p. 261 definierten. Man setze nämlich

$$(5) \qquad \xi = Q(\omega) = \frac{-\varepsilon\omega+1}{+\varepsilon\omega+1}$$

und führe die hierdurch angezeigte Transformation der $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ aus. Die einzelne Operation (2), $\xi' \equiv W(\xi)$, geht dann über in

$$\omega' \equiv Q^{-1}WQ(\omega), \quad (\text{mod. } q).$$

Indem wir dieselbe explicite ausrechnen, lassen wir sogleich den sich einstellenden gemeinsamen Factor -2ε der vier Coefficienten fort, um eine Substitution der Determinante 1 zu erhalten, und gewinnen solcherweise:

$$\omega' \equiv Q^{-1}WQ(\omega) \equiv \frac{(m-r)\omega-(n+s)}{-(n-s)\varepsilon^2\omega+(m+r)}.$$

Das ist nun wirklich zufolge (3) diejenige Operation V der $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, die wir der gerade vorliegenden Operation W zugewiesen hatten.

Holoedrisch isomorphe Gruppen können im abstracten Sinne für identisch gelten, insofern man dabei nur auf die Structur der Gruppen sieht, die Form ihrer Darstellung aber als nebensächlich betrachtet. In diesem Sinne wollen wir fortan sagen, $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *sei die Gruppe* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *in imaginärer Gestalt.* Man überblickt sofort, dass sich auch die homogene $G_{q(q^2-1)}$ in imaginäre Gestalt setzen lässt. In der That haben wir ja zu dem Ende weiter nichts zu thun, als die einzelne nicht-homogene Substitution (2) bekanntermassen in zwei homogene zu spalten. Gleichzeitiger Zeichenwechsel der vier Coefficienten führt dann die eine von beiden in die andere über.

Etwas vorsichtiger müssen wir bei Umsetzung der erweiterten $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ in imaginäre Form verfahren. Bei dieser Massnahme ist es nämlich wesentlich, dass wir ξ als eine dem Gebiete der complexen Zahlen des vorigen Paragraphen angehörige veränderliche Grösse auffassen. Alsdann wird die zu $\omega = \frac{-\xi+1}{\varepsilon\xi+\varepsilon}$ conjugiert complexe Zahl $\overline{\omega} = \frac{-\bar{\xi}+1}{-\varepsilon\bar{\xi}-\varepsilon}$ sein, und es entspricht der Modulsubstitution $\omega' = -\overline{\omega}$ offenbar die Operation $\xi' = \bar{\xi}$, die wir, ebenso wie bisher die Operation $\omega' = -\bar{\omega}$, durch A bezeichnen wollen. *Die Operationen zweiter Art in der erweiterten* $\overline{G}'_{q(q^2-1)}$ *gewinnen damit die Form*

$$\overline{W}(\xi) = WA(\xi) \equiv \frac{(m+n\varepsilon)\bar{\xi}+(r+s\varepsilon)}{(r-s\varepsilon)\bar{\xi}+(m-n\varepsilon)}, \tag{6}$$

und wir haben insonderheit noch für die Operation erster Art AWA die Gestalt:

$$AWA(\xi) \equiv \frac{(m-n\varepsilon)\xi+(r-s\varepsilon)}{(r+s\varepsilon)\xi+(m+n\varepsilon)}. \tag{7}$$

Dass die solchergestalt getroffene Erweiterung die richtige ist, lehrt übrigens direct Formel (7). Wir entnehmen aus derselben zuvörderst, dass $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ thatsächlich mit der Operation $A(\xi)$ vertauschbar ist, und dass also der Zusatz der letzteren zur $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ zu einer erweiterten $\overline{G}'_{q(q^2-1)}$ hinführt. Des weiteren aber ist AWA durch (4) thatsächlich der Operation $AVA(\omega) = \frac{\alpha\omega-\beta}{-\gamma\omega+\delta}$ zugeordnet, und daraus folgert man leicht, dass $\overline{G}'_{q(q^2-1)}$ auf die erweiterte Gruppe $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ holoedrisch

isomorph bezogen ist. Wir dürfen demnach wieder $\overline{G}'_{q(q^2-1)}$ als imaginäre Gestalt von $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ bezeichnen.

Bei der Zerlegung unserer Gruppen ist es der grosse Vorteil der hier vorab gegebenen Erörterungen, dass wir für die Darstellung der Operationen der Gruppen nicht mehr auf die gewöhnlichen ω-Substitutionen allein angewiesen sind. Je nach dem vorliegenden Zwecke werden wir vielmehr bald mit der reellen, bald mit der imaginären Gestalt der Gruppen erfolgreicher operieren. (Der Gebrauch der letzteren Gestalt ist übrigens von J. A. Serret l. c. eingeführt.)

§ 3. Die cyclischen Untergruppen G_q der Ordnung q.

Jetzt greifen wir unsere Aufgabe, die Gruppe der $\frac{q(q^2-1)}{2}$ mod. q incongruenten Modulsubstitutionen in ihre Untergruppen zu zerlegen, wirklich an. Es sollte sich hier zuvörderst darum handeln, deren cyclische Untergruppen namhaft zu machen, und wir gehen bei diesem Unternehmen einen rein inductiven Weg. Indem wir uns zunächst der reellen Form der Gruppe bedienen, unterwerfen wir die Operation $S(\omega) \equiv \omega + 1$ und die aus ihr durch Wiederholung entspringende cyclische Gruppe der Untersuchung. Dabei bedienen wir uns gerade wie auch schon bei der G_{168} des vorletzten Kapitels weiterhin in ausgiebiger Weise der Grundsätze, die für Gruppenzerlegungen unserer Art allgemein im § 8 des fünften Kapitels (p. 325) entwickelt wurden.

Aus der Operation S entspringt durch Wiederholung eine cyclische Untergruppe q^{ter} Ordnung G_q, welche die Operationen umfasst:

$$S,\ S^2,\ S^3,\ \cdots,\ S^{q-1},\ S^q \equiv 1. \tag{1}$$

Diese Gruppe, als von Primzahlordnung, kann durch jede ihrer Substitutionen, die Identität 1 allein ausgenommen, erzeugt werden. Wir wählen jetzt aus der G_q die von der Identität verschiedene Operation S^ν und transformieren dieselbe durch $V(\omega) = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$. Es entspringt nach kurzer Rechnung:

$$V^{-1}S^\nu V(\omega) \equiv \frac{(1 + \gamma\delta\nu)\omega + \delta^2\nu}{-\gamma^2\nu\omega + (1 - \gamma\delta\nu)}. \tag{2}$$

Soll $V^{-1}S^\nu V \equiv S^\nu$ sein, so haben wir ersichtlich für V die beiden Bedingungen $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv \pm 1$, (mod. q), durch welche wir gerade zu den q Operationen (1) zurückgeführt werden. Es ist demnach S^ν im ganzen nur mit q Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ vertauschbar, und wir schliessen auf Grund der soeben citierten Entwicklungen des fünften

Kapitels: *Die Operation S^ν ist eine von* $\frac{q(q^2-1)}{2} : q = \frac{q^2-1}{2}$ *gleichberechtigten.*

Soll die in (2) dargestellte Operation $V^{-1}S^\nu V$ wieder der aus S entspringenden G_q angehören, so muss V nur der Bedingung $\gamma \equiv 0$ genügen, während δ beliebig bleibt. Von den Substitutionen der G_q sind also S^ν, $S^{2\nu}$, $S^{3\nu}$, $\cdots$ mit S^ν in der Gesamtheit gleichberechtigt. Wir werden sonach die $(q-1)$ von der Identität verschiedenen Operationen (1) zu je $\frac{q-1}{2}$ in zwei Classen verteilen, je nachdem der Exponent der einzelnen Operation (1) quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist. *Die* $\frac{q-1}{2}$ *Operationen der einzelnen dieser beiden Classen sind dann innerhalb der Gesamtheit mit einander gleichberechtigt.*

Die $\frac{q^2-1}{2}$ mit S^ν gleichberechtigten Operationen verteilen sich hiernach zu je $\frac{q-1}{2}$ auf die mit G_q gleichberechtigten cyclischen Untergruppen. Da zwei beliebige unter diesen Gruppen, als von Primzahlordnung q, nur die Identität gemeinsam haben können, so folgt ohne weiteres: *In der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *giebt es* $\frac{q^2-1}{2} : \frac{q-1}{2} = (q+1)$ *gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_q der Ordnung q, von denen die Gruppe der Operationen* (1) *ein Beispiel ist.*

Insgesamt enthalten diese $(q+1)$ Untergruppen G_q, abgesehen von der Identität, $(q+1)(q-1) = q^2-1$ verschiedene Operationen, die, wie wir soeben sahen, auf zwei Systeme von je $\frac{q^2-1}{2}$ unter einander gleichberechtigten zu verteilen sind. Jetzt beachte man noch, dass für die Operationen (1) $k = \frac{\alpha+\delta}{2} = \pm 1$ ist. Aber die Summe des ersten und vierten Substitutionscoefficienten ist, vom Vorzeichen abgesehen, für gleichberechtigte Substitutionen stets die nämliche. Sprechen wir also zum Schluss den Satz aus: *Für die (q^2-1) soeben namhaft gemachten Operationen der Periode q genügt die gerade mit k bezeichnete Zahl* $\frac{\alpha+\delta}{2}$ *der Bedingung* $k^2 - 1 \equiv 0 \pmod{q}$.

§ 4. Die cyclischen Untergruppen $G_{\frac{q-1}{2}}$ der Ordnung $\frac{q-1}{2}$.

Um eine zweite Art cyclischer Untergruppen namhaft zu machen, verstehen wir unter a eine im Sinne des § 1 zum Exponenten $(q-1)$ gehörende Zahl, die also reell sein wird und im Gebiete der reellen Zahlen Primitivwurzel der Primzahl q heisst. Es giebt alsdann in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine Operation der Gestalt

$$(1) \qquad v(\omega) \equiv \frac{a\omega}{a^{-1}}, \pmod{q},$$

aus welcher durch Wiederholung zufolge leichter Rechnung

$$(2) \qquad v^\nu(\omega) \equiv \frac{a^\nu \omega}{a^{-\nu}}, \pmod{q}$$

entspringt. Unter den successiven Potenzen von a ist $a^{\frac{q-1}{2}}$ die erste, welche mit ± 1 congruent ausfällt, indem nämlich

$$a^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1, \pmod{q}$$

wird. Demgemäss ist unter den Operationen (2) $v^{\frac{q-1}{2}}$ die erste, welche mod. q mit der Identität congruent ausfällt. *Es entspringt also aus v durch Wiederholung eine cyclische Untergruppe $G_{\frac{q-1}{2}}$ der Ordnung $\frac{q-1}{2}$, welche die Substitutionen umfasst:*

$$(3) \qquad v, v^2, v^3, \cdots, v^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1, \pmod{q}.$$

Diese $G_{\frac{q-1}{2}}$ betreffend fügen wir hier gleich noch zwei Bemerkungen an. Soll erstlich eine Operation der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ mit Null congruentes β und γ haben, so hat dieselbe offenbar die Form (2), so dass wir die Operationen der $G_{\frac{q-1}{2}}$ auch durch die Congruenzen $\beta \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$ definieren können. Fürs zweite wollen wir untersuchen, wann $G_{\frac{q-1}{2}}$ Operationen der Periode zwei enthält. In diesem Falle müsste offenbar die Primzahl q die Form $q = 4h + 1$ haben, und es ist dann -1 quadratischer Rest von q. Soll unter diesen Umständen die Operation (2) die Periode zwei besitzen, so muss $a^{2\nu} \equiv \pm 1$ sein; es folgt $a^\nu \equiv \pm 1$ oder $a^\nu \equiv \pm \sqrt{-1}$, wenn wir unter dem Symbol $\sqrt{-1}$ die eine der beiden Zahlen verstehen wollen, deren Quadrate mod. q mit -1 congruent sind. Man überblickt hier sogleich das Resultat: *Für Primzahlen der Form $q = 4h + 1$ giebt es in der $G_{\frac{q-1}{2}}$ eine Operation der Periode zwei, nämlich:*

$$(4) \qquad v^{\frac{q-1}{4}}(\omega) \equiv \frac{\sqrt{-1}\,\omega}{-\sqrt{-1}}, \pmod{q}.$$

Eine beliebige unter den Substitutionen v^ν der $G_{\frac{q-1}{2}}$, die Identität

allein ausgenommen, soll jetzt durch eine Operation V der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ transformiert werden. Wir gelangen zu der mit v^ν gleichberechtigten Operation

$$(5) \qquad V^{-1}v^\nu V(\omega) \equiv \frac{\{a^\nu + \beta\gamma(a^\nu - a^{-\nu})\}\omega + \beta\delta(a^\nu - a^{-\nu})}{-\alpha\gamma(a^\nu - a^{-\nu})\omega + \{a^{-\nu} - \beta\gamma(a^\nu - a^{-\nu})\}}$$

und knüpfen an die Gestalt derselben wieder die Fragestellungen, die wir an analoger Stelle im vorigen Paragraphen aufwarfen. Soll $V^{-1}v^\nu V$ selber der $G_{\frac{q-1}{2}}$ angehören, so haben wir für die Operation V die Bedingungen

$$(6) \qquad \beta\delta \equiv 0, \quad \alpha\gamma \equiv 0, \quad (\text{mod. } q),$$

da man leicht nachweist, dass $(a^\nu - a^{-\nu})$ nicht durch q teilbar ist. Zufolge der ersten Congruenz ist entweder β oder δ durch q teilbar. Wählen wir die erste Möglichkeit $\beta \equiv 0$, so müssen wir der zweiten Congruenz (6) durch $\gamma \equiv 0$ genügen. In diesem Falle ist also V wieder eine Substitution der Form (2), und wir haben dann in der That direct $V^{-1}v^\nu V \equiv v^\nu$. Genügen wir dagegen der ersten Congruenz (6) durch $\delta \equiv 0$, so erfordert die zweite $\alpha \equiv 0$, und wir erhalten

$$(7) \qquad V(\omega) \equiv \frac{\beta}{\gamma\omega}, \quad \beta\gamma \equiv -1, \quad (\text{mod. } q).$$

In dem Falle wird

$$V^{-1}v^\nu V(\omega) \equiv \frac{a^{-\nu}\omega}{a^\nu}, \quad (\text{mod. } q),$$

so dass v^ν durch eine Operation (7) in ihre inverse Operation $v^{-\nu}$ transformiert wird. Wir erhalten auf Grund dieser Entwicklung die nachfolgenden Resultate: *Die einzelne, von der Identität verschiedene Operation v^ν der $G_{\frac{q-1}{2}}$ ist nur mit den $\frac{q-1}{2}$ Operationen dieser cyclischen Untergruppe vertauschbar*; *durch die Operationen der Form* (7), *deren Anzahl gleichfalls $\frac{q-1}{2}$ sein muss**), *wird v^ν in ihre inverse Operation $v^{-\nu}$ transformiert.* Eine besondere Stellung nimmt hierbei natürlich die eine für $q = 4h+1$ in der $G_{\frac{q-1}{2}}$ enthaltene Operation der Periode zwei ein. Diese ist nämlich mit ihrer inversen identisch *und wird sonach im ganzen durch die $2 \cdot \frac{q-1}{2}$ Operationen* (2) *und* (7) *in sich transformiert.* Umgekehrt

*) Denn die Gesamtzahl der Operationen, die v^ν in eine mit ihr gleichberechtigte Operation transformieren, ist bekanntermassen gerade so gross, wie die Anzahl der mit v^ν vertauschbaren Operationen.

entnehmen wir daraus: *Die Operation v^ν ist eine unter $q(q+1)$ gleichberechtigten, wofern ihre Periode >2 ist; die möglicherweise eintretende Operation v^ν der Periode zwei gehört einem System von $\frac{q(q+1)}{2}$ gleichberechtigten Operationen an.*

Ist v' eine mit v gleichberechtigte Operation, die jedoch weder mit v noch v^{-1} identisch sein soll, so entspringt durch Wiederholung von v' eine mit $G_{\frac{q-1}{2}}$ gleichberechtigte cyclische Untergruppe $G'_{\frac{q-1}{2}}$. Wir behaupten, diese beiden Gruppen können, die Identität abgerechnet, keine Operation gemein haben. Sollte nämlich eine von der Identität verschiedene Operation $v'^\mu \equiv v^\nu$, (mod. q) sein, so würde daraus sofort $v'^{-1}v^\nu v' \equiv v^\nu$ entspringen, und es müsste also v' eine mit v^ν vertauschbare Operation der Periode $\frac{q-1}{2}$ sein. Da die Operationen (7) ausnahmslos zur Periode zwei gehören, wie man durch directe Rechnung bestätigt, so müsste zufolge der oben gefundenen Verhältnisse v' eine in der $G_{\frac{q-1}{2}}$ enthaltene Operation der Periode $\frac{q-1}{2}$ sein; denn nur diese Operationen der Periode $\frac{q-1}{2}$ sind mit v^ν vertauschbar. Wir finden so das Resultat: Sollte $G'_{\frac{q-1}{2}}$ mit $G_{\frac{q-1}{2}}$ ausser der Identität noch eine weitere Operation gemeinsam haben, so müsste die erzeugende Operation v' der $G'_{\frac{q-1}{2}}$ notwendig in der Gruppe $G_{\frac{q-1}{2}}$ enthalten sein, und damit würden die beiden Gruppen $G_{\frac{q-1}{2}}$ und $G'_{\frac{q-1}{2}}$ überhaupt identisch ausfallen. Man folgert daraus mühelos weiter, dass irgend zwei verschiedene mit $G_{\frac{q-1}{2}}$ gleichberechtigte Untergruppen ausser der Identität 1 eine gemeinsame Operation nicht besitzen können.

Nehmen wir zu den soeben erkannten Verhältnissen die bereits oben bewiesene Thatsache hinzu, dass von den $q(q+1)$ mit v^ν gleichberechtigten Operationen je *zwei* auf die einzelne $G_{\frac{q-1}{2}}$ entfallen, so entspringt das Hauptresultat: *In der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ giebt es $\frac{q(q+1)}{2}$ mit einander gleichberechtigte cyclische Untergruppen $G_{\frac{q-1}{2}}$ der Ordnung $\frac{q-1}{2}$.* Abgesehen von der Identität sind in diesen Gruppen im ganzen $\frac{q(q+1)(q-3)}{4}$ verschiedene Operationen enthalten; *für dieselben ist durchgängig* (k^2-1)

quadratischer Rest von q, k in derselben Bedeutung wie am Schlusse des vorigen Paragraphen gebraucht. In der That tritt diese Eigenschaft an den Operationen (2) nach kurzer Rechnung in Evidenz; damit gilt sie aber allgemein für die hier in Rede stehenden Operationen.

§ 5. Die cyclischen Untergruppen $G_{\frac{q+1}{2}}$ der Ordnung $\frac{q+1}{2}$.

Wir haben weiter eine dritte Gattung von cyclischen Untergruppen zu besprechen, welche zu den soeben gefundenen $G_{\frac{q-1}{2}}$ die grösste Analogie zeigen. Inzwischen tritt dieselbe nur erst dann in die Erscheinung, falls wir uns der imaginären Gestalt unserer Gruppe bedienen. Es giebt in der $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, wenn wir die Bezeichnungen der beiden ersten Paragraphen wieder aufnehmen sollen, eine Operation der Gestalt:

$$w(\xi) \equiv \frac{j\xi}{j^{-1}}, \text{ (mod. } q), \tag{1}$$

aus der durch ν-malige Wiederholung

$$w^\nu(\xi) \equiv \frac{j^\nu \xi}{j^{-\nu}}, \quad (\text{mod. } q) \tag{2}$$

entspringt. Die erste unter den Potenzen von j, die mit ± 1 congruent ausfällt, ist $j^{\frac{q+1}{2}}$, indem in der That $j^{\frac{q+1}{2}} \equiv -1$ wird. Demgemäss ist die erste unter den Substitutionen (2), die mod. q mit der Identität congruent ist, $w^{\frac{q+1}{2}}$, und es entspringt aus (1) eine cyclische Untergruppe $G_{\frac{q+1}{2}}$ der Ordnung $\frac{q+1}{2}$.

Die gewonnene $G_{\frac{q+1}{2}}$ umfasst alle Operationen der $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, welche durch q teilbare zweite und also auch dritte Coefficienten haben; denn wir fanden ja oben, dass jede dem Zahlgebiete des § 1 angehörige Zahl, die mit ihrer conjugiert complexen Zahl multipliciert ein mit 1, mod. q congruentes Product liefert, eine Potenz der Zahl j ist. Die $G_{\frac{q+1}{2}}$ besitzt ferner *eine* Operation der Periode zwei in

$$w^{\frac{q+1}{4}}(\xi) \equiv \frac{\sqrt{-1}\,\xi}{-\sqrt{-1}}, \tag{3}$$

falls die Primzahl q die Form $4h - 1$ hat und also -1 quadratischer Nichtrest von q ist.

Jetzt transformieren wir (2) durch eine beliebige Operation

$$W(\xi) \equiv \frac{\mathsf{A}\xi + \mathsf{B}}{\overline{\mathsf{B}}\xi + \overline{\mathsf{A}}}$$

der Gesamtgruppe und erhalten als mit (2) gleichberechtigt die Operation

$$(4) \qquad W^{-1}w^{\nu}W(\xi) \equiv \frac{\{j^{\nu} + \mathsf{B}\overline{\mathsf{B}}(j^{\nu} - j^{-\nu})\}\xi + \mathsf{B}\overline{\mathsf{A}}(j^{\nu} - j^{-\nu})}{-\mathsf{A}\overline{\mathsf{B}}(j^{\nu} - j^{-\nu})\xi + \{j^{-\nu} - \mathsf{B}\overline{\mathsf{B}}(j^{\nu} - j^{-\nu})\}}.$$

Soll diese Operation wieder der $G_{\frac{q+1}{2}}$ angehören, so muss der zweite und dritte Coefficient mit Null congruent werden, was für W die beiden Bedingungen giebt:

$$(5) \qquad \mathsf{B}\overline{\mathsf{A}}(j^{\nu} - j^{-\nu}) \equiv 0, \quad \mathsf{A}\overline{\mathsf{B}}(j^{\nu} - j^{-\nu}) \equiv 0, \quad (\text{mod. } q).$$

Wir überzeugen uns nun vorab schnell von der Richtigkeit des folgenden Satzes: Ist das Product von zweien unserer complexen ganzen Zahlen A_1, A_2 modulo q mit Null congruent, so ist wenigstens einer der Factoren A_1, A_2 mit Null congruent. Ist nämlich etwa A_1 nicht congruent Null, so gilt dasselbe auch von der conjugierten Zahl $\overline{\mathsf{A}}_1$, und man erkennt aufs leichteste in $\mathsf{A}_1\overline{\mathsf{A}}_1$ eine reelle, nicht durch q teilbare Zahl. Jetzt aber folgt aus $\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 \equiv 0$ sofort $\mathsf{A}_1\overline{\mathsf{A}}_1 \cdot \mathsf{A}_2 \equiv 0$ und also ist, wenn wir mit der reellen ganzen Zahl $(\mathsf{A}\overline{\mathsf{A}})^{-1}$ multiplicieren, $\mathsf{A}_2 \equiv 0$, was wir beweisen wollten.

Nun ist in (5) jedenfalls $(j^{\nu} - j^{-\nu})$ von Null verschieden, da wir doch die zu transformierende Operation w^{ν} von der Identität verschieden wählen wollen. Genügen wir alsdann den Congruenzen (5) durch die Wahl $\mathsf{B} \equiv 0$, so kommen wir für W auf die $\frac{q+1}{2}$ Operationen (2) zurück, die auch in der That ausnahmslos mit w^{ν} vertauschbar sind. Soll aber B nicht durch q teilbar sein, so erfordern die Congruenzen (5) notwendig $\mathsf{A} \equiv 0$, was auf

$$(6) \qquad W(\xi) \equiv \frac{\mathsf{B}}{\overline{\mathsf{B}}\xi}, \quad \mathsf{B}\overline{\mathsf{B}} \equiv -1, \quad (\text{mod. } q)$$

führt. Diese Operationen transformieren w^{ν} in ihre inverse Substitution

$$W^{-1}w^{\nu}W(\xi) \equiv \frac{j^{-\nu}\xi}{j^{\nu}}, \quad (\text{mod. } q),$$

so dass insbesondere die Anzahl der verschiedenen Operationen (6), die übrigens durchgehends die Periode zwei besitzen, wieder $\frac{q+1}{2}$ sein muss*). Zusammenfassend sprechen wir hiernach die Resultate aus:

*) Wir machen im Texte nicht jedesmal besonders auf die fortwährend stattfindende Analogie zur Entwicklung des vorigen Paragraphen aufmerksam.

Die einzelne von der Identität verschiedene Operation der gefundenen cyclischen Untergruppe ist mit $\frac{q+1}{2}$ *Operationen der* $G'_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *vertauschbar und also eine von* $q(q-1)$ *in der Gesamtheit gleichberechtigten Operationen. Doch gilt dies nur, falls die betrachtete Operation nicht von der Periode zwei ist; trifft letzteres zu, so ist sie im ganzen mit* $(q+1)$ *Operationen vertauschbar und also eine von* $\frac{q(q-1)}{2}$ *gleichberechtigten Operationen.*

Die weiter folgenden Überlegungen gestalten sich Wort für Wort genau so wie im vorigen Paragraphen. Wir erkennen auch hier, dass zwei mit $G_{\frac{q+1}{2}}$ gleichberechtigte Untergruppen ausser der Identität keine Operation gemeinsam haben können. Da nun unter den $\frac{q+1}{2}$ Operationen (2) in der Gesamtheit gleichberechtigt immer nur je zwei inverse w^ν und $w^{-\nu}$ sind, so folgt aus der eben getroffenen Abzählung der hier in Betracht kommenden Operationen: *In der Gruppe* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *giebt es* $\frac{q(q-1)}{2}$ *mit einander gleichberechtigte cyclische Untergruppen* $G_{\frac{q+1}{2}}$ *der Ordnung* $\frac{q+1}{2}$. In diesen sind von der Identität abgesehen im ganzen $\frac{q(q-1)^2}{4}$ verschiedene Operationen enthalten. *Für dieselben ist durchgängig* (k^2-1) *quadratischer Nichtrest von* q. In der That beweist man solches wieder direct leicht an den Operationen (2); damit ist unsere Behauptung dann gleich allgemein verificiert.

§ 6. Von der Gesamtheit der cyclischen Untergruppen. Vorläufige Bezugnahme auf die Flächen $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

Die Anzahlen der in den drei voraufgehenden Paragraphen zur Geltung gekommenen Operationen waren, immer von der Identität abgesehen, q^2-1, $\frac{q(q+1)(q-3)}{4}$, $\frac{q(q-1)^2}{4}$. Im ganzen haben wir nun also unter Einrechnung der Identität

$$q^2-1+\frac{q(q+1)(q-3)}{4}+\frac{q(q-1)^2}{4}+1=\frac{q(q^2-1)}{2}$$

Operationen, d. i. die gesamten Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in Rücksicht gezogen. Wir schliessen daraus insbesondere, dass wir die sämtlichen cyclischen Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ kennen gelernt haben, sobald wir

hier noch derjenigen Untergruppen gedenken, die in den $G_{\frac{q+1}{2}}$ der beiden letzten Paragraphen enthalten sind. Diese werden leicht erledigt sein.

Ist σ irgend ein Teiler von $\frac{q-1}{2}$, jedoch von $\frac{q-1}{2}$ selbst verschieden, ist ferner v die Erzeugende irgend einer der im vorletzten Paragraphen aufgestellten $G_{\frac{q-1}{2}}$, so wird ersichtlich v^σ eine Operation der Periode $\frac{q-1}{2\sigma}$ sein. Andrerseits überzeugt man sich durch elementare zahlentheoretische Überlegung, dass jede in dieser $G_{\frac{q-1}{2}}$ enthaltene Operation der Periode $\frac{q-1}{2\sigma}$ in der Gestalt $v^{\nu\sigma}$ darstellbar ist. Es giebt demgemäss in $G_{\frac{q-1}{2}}$ eine und nur eine cyclische Untergruppe der Ordnung $\frac{q-1}{2\sigma}$. Zusammenfassend haben wir also das Resultat: *In der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *sind für jeden Teiler* $\sigma < \frac{q-1}{2}$ *der Zahl* $\frac{q-1}{2}$ *im ganzen* $\frac{q(q+1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische Untergruppen* $G_{\frac{q-1}{2\sigma}}$ *der Ordnung* $\frac{q-1}{2\sigma}$ *enthalten.* Durch eine ganz analoge Überlegung entspringt der Satz: *In der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *giebt es für jeden Teiler* $\tau < \frac{q+1}{2}$ *der Zahl* $\frac{q+1}{2}$ *im ganzen* $\frac{q(q-1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische Untergruppen* $G_{\frac{q+1}{2\tau}}$ *der Ordnung* $\frac{q+1}{2\tau}$.

Unter den nun gefundenen Untergruppen kommen stets solche der Ordnungen zwei und drei vor. Bedeutet nämlich $\left(\frac{q}{3}\right)$ das in der Theorie der quadratischen Reste gebräuchliche Legendre'sche Zeichen, so ist $\left(\frac{q}{3}\right) = +1$ oder -1, je nachdem q, durch 3 geteilt, den Rest $+1$ oder -1 lässt. Immer ist also $\frac{q-\left(\frac{q}{3}\right)}{6}$ eine *ganze* Zahl, und zwar haben wir in ihr entweder einen Teiler von $\frac{q-1}{2}$ oder $\frac{q+1}{2}$. Indem wir diesen Teiler für σ bez. τ in den gerade erhaltenen Satz substituieren, entspringt das Resultat: *In der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *giebt es* $\frac{1}{2}q\left[q+\left(\frac{q}{3}\right)\right]$

gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_3 der Ordnung drei. In entsprechender Weise erhält man unter Gebrauch des Legendre'schen Zeichens $\left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$ den weiteren Satz: *In der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ giebt es $\frac{1}{2}q\left[q + \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_2 der Ordnung zwei.* Hierüber hinaus giebt es aber nicht noch weitere Untergruppen dieser Ordnungen zwei und drei in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$. Wir merken uns übrigens noch den durch directe Rechnung leicht beweisbaren Satz: *Die hier gefundenen $q\left[q + \left(\frac{q}{3}\right)\right]$ gleichberechtigten Operationen der Periode drei sind diejenigen, für welche $\alpha + \delta \equiv \pm 1$, (mod. q) ist. Desgleichen decken sich die $\frac{1}{2}q\left[q + \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ gleichberechtigten Operationen der Periode zwei mit denjenigen Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, für welche $\alpha + \delta \equiv 0$ ist.*

Diese letzten Gruppen setzen wir nun gleich wieder in Beziehung mit dem zur $\Gamma_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ gehörigen Polygon $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ bez. der zugehörigen geschlossenen Fläche. Ganz allgemein hatten wir doch, um hier kurz zu recapitulieren, die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Operationen unserer $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ durch ebenso viele eindeutige Transformationen der geschlossenen Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in sich anschaulich gedeutet. Diese eindeutigen Transformationen der Fläche in sich waren solche, bei deren Ausführung die Einteilung der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Doppeldreiecke mit sich selbst zur Deckung kam, und zwar ging dabei ein einzelnes Elementardreieck jedesmal wieder in ein Dreieck gleicher Art über. Die Lagerung der Dreiecke auf der geschlossenen Fläche war aber so beschaffen, dass sich um die $\frac{q(q^2-1)}{4}$ Punkte a je vier Elementardreiecke lagerten, desgleichen um die $\frac{q(q^2-1)}{6}$ Punkte b je sechs, endlich um die $\frac{q^2-1}{2}$ Punkte c jedesmal $2q$ Elementardreiecke.

Nachdem wir solches in Erinnerung gebracht haben, gehen wir auf die in der Modulgruppe enthaltenen cyclischen Untergruppen der Ordnung drei zurück, um etwa mit ihnen zu beginnen. Zu jedem in der ω-Halbebene mit ϱ äquivalenten Punkte war wechselweise eindeutig

eine Untergruppe der Ordnung drei aus elliptischen Modulsubstitutionen zugeordnet. Reducieren wir die Modulgruppe mod. q, so werden diese Untergruppen der Ordnung drei die obigen $\frac{1}{2}q\left[q+\left(\frac{q}{3}\right)\right]$ gleichberechtigten G_3 liefern, da eine elliptische Modulsubstitution der Periode drei mod. q nicht mit der Identität congruent sein kann. Es wird also zu jedem Punkte b der geschlossenen Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine G_3 derart zugeordnet sein, dass bei den dieser Gruppe G_3 entsprechenden Transformationen der Fläche in sich der in Rede stehende Punkt b in sich selbst übergeht. Aber es ist gar nicht nötig, dass zwei verschiedenen Punkten b auch zwei verschiedene, der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ angehörige G_3 zugeordnet sind. Es tritt vielmehr der Fall ein, dass zwei verschiedene in der Modulgruppe enthaltene cyclische Untergruppen dritter Ordnung mod. q congruent ausfallen, auch ohne dass die zugehörigen Fixpunkte bezüglich der Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe äquivalent sind. In der That haben wir ja nur $\frac{1}{2}q\left[q+\left(\frac{q}{3}\right)\right]$ gleichberechtigte G_3 und demgegenüber $\frac{q(q^2-1)}{6}$ Punkte b. Da aber alle G_3 gleichberechtigt sind, so entnehmen wir daraus sofort den Satz: *Jede der* $\frac{1}{2}q\left[q+\left(\frac{q}{3}\right)\right]$ G_3 *besitzt* $\frac{1}{3}\left[q-\left(\frac{q}{3}\right)\right]$ *Fixpunkte* b *auf der geschlossenen Fläche.* Als Fixpunkte der G_3 bezeichnen wir dabei natürlich diejenigen Punkte, welche durch die zur G_3 gehörigen Transformationen der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ sich selbst zugewiesen sind.

Auf die cyclischen Untergruppen zweiter Ordnung der Modulgruppe, sowie auf diejenigen aus parabolischen Modulsubstitutionen sind genau die nämlichen Überlegungen anwendbar. Wir werden sofort die bezüglichen Resultate hier angeben dürfen: *Jede der* $\frac{1}{2}q\left[q+\left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ *gleichberechtigten Untergruppen* G_2 *der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *besitzt* $\frac{1}{2}\left[q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ *Fixpunkte auf der geschlossenen Fläche, welche Punkte* a *dieser letzteren sind. Endlich besitzt jede der* $(q+1)$ *gleichberechtigten* G_q *an Fixpunkten auf* $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *im ganzen* $\frac{q-1}{2}$ *Punkte* c *dieser Fläche.* — Derartige, die Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ betreffende geometrische Überlegungen werden wir auch weiterhin immer zwischendurch ausführen, um dadurch die arithmetische Betrachtung unserer Gruppen in zweckmässiger Weise zu versinnlichen,

sowie auch die früheren auf die Fälle $q = 5, 7$ bezüglichen geometrischen Entwicklungen zu verallgemeinern*).

Specialisieren wir nunmehr die gewonnenen allgemeinen Resultate für $q = 5$, so müssen wir auf die cyclischen Gruppen der Drehungen des Ikosaeders in sich zurückkommen. In der That liefern die $(q+1)$ G_q des § 3 nunmehr sechs cyclische G_5, und entsprechend kommen aus den §§ 4 und 5 fünfzehn gleichberechtigte G_2 und zehn gleichberechtigte G_3. Zu diesen beiden letzteren Arten cyclischer Untergruppen führen übrigens auch unsere letzten allgemeinen Erörterungen über die G_3 und G_2. Die Fixpunkte der cyclischen Untergruppen der G_{60} anlangend, so ergiebt sich als gemeinsamer Wert von $\frac{q-1}{2}$, $\frac{1}{2}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ und $\frac{1}{3}\left[q + \left(\frac{q}{3}\right)\right]$ für $q = 5$ die Anzahl 2. Alles das ist bekanntermassen in Übereinstimmung mit der Ikosaedergruppe und der Figur des Ikosaeders. Besonders interessant ist es auch noch, zu beobachten, wie unsere nun auf arithmetischem Wege erzielten allgemeinen Resultate für $q = 7$ wirklich in voller Übereinstimmung mit dem sind, was wir im vorletzten Kapitel auf rein geometrischem Wege über die cyclischen Untergruppen der G_{168} erfahren haben; man wird das sofort ins einzelne verfolgen. Mit der allgemeinen Angabe der cyclischen Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ ist augenscheinlich der Grund für die früher bemerkten, zwischen den Gruppen G_{60} und G_{168} bestehenden Analogien aufgewiesen.

§ 7. Die cyclischen Untergruppen der homogenen $G_{q(q^2-1)}$.

Äusserst einfach erledigt sich jetzt die Aufzählung der cyclischen Untergruppen, die in der homogenen $G_{q(q^2-1)}$ enthalten sind. Da diese Gruppe hemiedrisch isomorph auf die $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ bezogen ist, so wird zuvörderst der identischen Operation der letzteren *eine ausgezeichnete* G_2 der ersteren entsprechen. Dieselbe umfasst ausser der Identität die Operation der Periode zwei $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$, welche wir als Operation der $G'_{q(q^2-1)}$ in der Gestalt $\xi_1' = -\xi_1$, $\xi_2' = -\xi_2$ zu schreiben haben. Die in Rede stehende Operation, welche übrigens aus

*) Wir nennen schon jetzt hierauf bezügliche Überlegungen der Hrn. Klein und Dyck, auf die wir übrigens hernach noch zurückkommen müssen; siehe Dyck, *Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen entspricht*, Math. Ann. Bd. 18, p. 507 (1881).

der homogen geschriebenen Substitution T durch einmalige Wiederholung entsteht, *wird mit jeder Operation der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *vertauschbar sein,* da die aus ihr entspringende G_2 in der Gesamtgruppe ausgezeichnet ist.

Wir haben nun ganz allgemein den Satz: *Jeder cyclischen Untergruppe der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *ist eine cyclische Untergruppe der doppelten Ordnung in der* $G_{q(q^2-1)}$ *durch den Isomorphismus der beiden Gruppen zugeordnet.* Das galt soeben schon für die aus der Identität allein bestehende Untergruppe G_1 der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, insofern derselben die homogene G_2 entsprach. Die allgemeine Gültigkeit des gerade ausgesprochenen Satzes ergiebt sich aus der folgenden Überlegung.

Die homogene Operation S: $\omega_1' = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$ erweist sich gerade wie die nicht-homogene Operation S als von der Periode q. Combinieren wir jene aber mit T^2, so werden wir in ST^2 zufolge der vorausgeschickten Bemerkungen über T^2 eine Operation der Periode $2q$ vor uns haben, indem in der That $(ST^2)^q \equiv T^2$, aber erst $(ST^2)^{2q} \equiv 1$ wird. *Es giebt sonach in der* $G_{q(q^2-1)}$ *im ganzen* $(q+1)$ *gleichberechtigte cyclische* G_{2q} *der Ordnung* $2q$; *innerhalb derselben finden sich ebenso viele, d. i.* $(q+1)$ *gleichberechtigte* G_q, *aber nur eine* G_2.

Nehmen wir ferner die homogene Operation v:

$$\omega_1' \equiv a\omega_1, \quad \omega_2' \equiv a^{-1}\omega_2$$

heran, die Zahl a in der Bedeutung des § 4, d. i. als reelle Primitivwurzel von q gebraucht, so erweist sich selbige sofort als von der Periode $(q-1)$. Daher erfahren wir: *Es giebt in der* $G_{q(q^2-1)}$ *im ganzen* $\frac{q(q+1)}{2}$ *mit einander gleichberechtigte cyclische Untergruppen* G_{q-1} *der Ordnung* $(q-1)$. Wir schliessen sogleich weiter an, was man leicht bestätigt: *Innerhalb der jetzt gefundenen* G_{q-1} *giebt es für jeden Teiler* $\sigma < \frac{q-1}{2}$ *von* $(q-1)$ *ebenso viele, d. i.* $\frac{q(q+1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische* $G_{\frac{q-1}{\sigma}}$, *während überdies noch die schon wiederholt genannte* G_2 *allen* G_{q-1} *gemeinsam ist.*

Endlich ist die homogene Substitution w: $\xi_1' \equiv j\xi_1$, $\xi_2' \equiv j^{-1}\xi_2$ eine solche der Periode $(q+1)$, und man erkennt, dass bei den hier in Betracht kommenden Gruppen die Verhältnisse wieder ganz ähnlich liegen, wie bei den soeben besprochenen. *Es giebt in der* $G_{q(q^2-1)}$ *im ganzen* $\frac{q(q-1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische* G_{q+1} *und innerhalb derselben*

für jeden Teiler $\tau < \frac{q+1}{2}$ *von* $(q+1)$ *im ganzen* $\frac{q(q-1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische Untergruppen* $G_{\frac{q+1}{\tau}}$; *ausserdem ist den* G_{q+1} *natürlich wieder die ausgezeichnete* G_2 *gemeinsam.*

Hiermit sind alle cyclischen Untergruppen der homogenen $G_{q(q^2-1)}$ namhaft gemacht.

§ 8. Cyclische Untergruppen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ für den Fall $q = 4h+1$*).

Wenn wir jetzt endlich noch die $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ in Betracht ziehen, so werden wir die cyclischen Untergruppen auch dieser Gruppe im engsten Anschluss an diejenigen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ charakterisieren können. Entspringt nämlich aus der einzelnen Operation $\overline{V}(\omega) \equiv \frac{\alpha\bar{\omega}-\beta}{\gamma\omega-\delta}$ eine cyclische $\overline{G}_{2\varkappa}$, so ist innerhalb derselben eine cyclische $G_\varkappa$ enthalten, die aus

$$(1) \qquad \overline{V}^2(\omega) = V(\omega) \equiv \frac{(\alpha^2-\beta\gamma)\omega - \beta(\alpha-\delta)}{\gamma(\alpha-\delta)\omega + (\delta^2-\beta\gamma)}$$

erzeugt wird. Von den bekannten Gruppen $G_\varkappa$ der letzteren Art werden wir leicht zu den $\overline{G}_{2\varkappa}$ vordringen können.

Sei zuvörderst $\varkappa = 1$, so wird es sich um die cyclischen $\overline{G}_2$ in der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ handeln. Ist $\overline{V}$ Erzeugende einer solchen, so wird $\overline{V}^2 \equiv 1$, (mod. q) sein müssen. Solches ist erstlich für alle Substitutionen $\overline{V}$ mit $\alpha \equiv \delta$ der Fall, und deren giebt es im ganzen $\frac{q(q+1)}{2}$; in der That bestimmt man die Zahl incongruenter Lösungen von $\alpha^2 - \beta\gamma \equiv 1$ sehr leicht zu $q(q+1)$. *Die gefundenen* $\frac{q(q+1)}{2}$ *Operationen, unter denen sich auch* $A(\omega) = -\bar{\omega}$ *findet, sind nun in der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *mit einander gleichberechtigt.* Um das zu zeigen, bestimmen wir die Anzahl der mit A vertauschbaren Operationen erster Art $V \equiv \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$. Da müssen wir fordern $AVA \equiv V$ oder explicite:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & -\beta \\ -\gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \text{ (mod. } q),$$

d. i. ausführlich geschrieben:

$$\alpha \equiv \pm\alpha, \quad \beta \equiv \mp\beta, \quad \gamma \equiv \mp\gamma, \quad \delta \equiv \pm\delta,$$

*) Die in den beiden folgenden Paragraphen gegebenen Entwicklungen sind erst neuerdings vom Herausgeber durchgeführt worden und werden hier zum ersten Male mitgeteilt.

wo entweder die vier oberen oder die vier unteren Zeichen gelten. Durch Combination der ersten und dritten, sowie der zweiten und vierten dieser Congruenzen folgt

$$\alpha\gamma \equiv 0, \quad \beta\delta \equiv 0, \text{ (mod. } q),$$

Congruenzen, die gerade mit den unter (6) p. 430 genannten in Übereinstimmung sind. In der That erweisen sich die $(q-1)$ damals aus diesen Bedingungen hergeleiteten Operationen V und nur diese mit A vertauschbar. Neben V wird dann immer auch noch VA mit A vertauschbar sein, und zugleich muss sich jede mit A vertauschbare Operation zweiter Art unter diesen $(q-1)$ Operationen VA finden. A ist demnach innerhalb der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ mit $2(q-1)$ Operationen vertauschbar und also eine unter $\frac{q(q+1)}{2}$ gleichberechtigten. Da man nun leicht durch Rechnung zeigt, *dass für gleichberechtigte Operationen zweiter Art der Wert von*

$$\overline{k}^2 + 1 = \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)^2 + 1 \tag{2}$$

derselbe ist, so verificiert man damit sofort, dass wirklich, wie wir behaupteten, jene $\frac{q(q+1)}{2}$ Substitutionen $\overline{V}$ mit $\alpha \equiv \delta$ ein System gleichberechtigter Operationen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ bilden.

Soll es noch eine weitere $\overline{G}_2$ geben, so muss auf Grund von (1) für ihre Erzeugende $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ und $\alpha^2 \equiv \delta^2 \equiv \pm 1$ sein. Das obere Zeichen führt hier zur Operation A zurück. Soll aber das untere gelten, *so muss offenbar q die Form $(4h+1)$ haben, was wir demnach hier bis auf weiteres annehmen wollen.* Alsdann finden wir noch *eine isoliert auftretende und demnach ausgezeichnete $\overline{G}_2$, die*

$$\overline{V}(\omega) \equiv \frac{\sqrt{-1}\cdot\overline{\omega}}{\sqrt{-1}}, \text{ (mod. } q) \tag{3}$$

zur Erzeugenden hat, das Symbol $\sqrt{-1}$ dabei in dem schon früher (p. 429) erläuterten Sinne gebraucht.

Für die rückständigen Operationen $\overline{V}$ ist $(\alpha - \delta) \gtrless 0$, (mod. q). Berechnen wir sonach aus (1) für $\overline{V}^2$ die früher (p. 428) mit (k^2-1) bezeichnete Zahl, so findet sich, $\overline{k}$ in der Bedeutung von (2) gebraucht:

$$\left(\frac{k^2-1}{q}\right) = \left(\frac{\overline{k}^2+1}{q}\right).$$

Die Periodicität einer Operation $\overline{V}$ hängt also in erster Linie vom quadratischen Charakter von $(\overline{k}^2+1)$ ab, gerade wie sie für die Operationen V

durch den quadratischen Charakter von $(k^2 - 1)$ bedingt ist. So erhalten wir durch Rückgang auf die bezüglichen Sätze über die $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$:

Die Periode einer Operation $\overline{V}$ mit $\bar{k}^2 + 1 \equiv 0$, (mod. q) ist ein Teiler von $2q$; des ferneren ist die Periode von $\overline{V}$ ein Teiler von $(q - 1)$ oder $(q + 1)$, je nachdem $(\bar{k}^2 + 1)$ quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist. Indem wir diese drei Fälle jetzt nacheinander durchsprechen, greifen wir immer eine einzelne, in Betracht kommende Operation V auf und suchen für dieselbe diejenigen Operationen $\overline{V}$ zu bestimmen, welche in $\overline{V}^2$ eben jene herausgegriffene Operation erster Art V ergeben. Gemeinsam werden wir die so gemeinten Operationen zweiter Art durch das Symbol $\sqrt{V}$ bezeichnen.

Setzt man zunächst in (1) für V im speciellen die Operation S ein, so zeigt eine leichte Zwischenbetrachtung, dass es für unseren Fall $q = 4h + 1$ eine und nur eine Operation $\sqrt{S}$ giebt, nämlich:

$$\sqrt{S}(\omega) \equiv \frac{\sqrt{-1} \cdot \bar{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2}}{\sqrt{-1}}, \text{ (mod. } q). \tag{4}$$

Dieselbe ist Erzeugende einer cyclischen $\overline{G}_{2q}$, und solcher Untergruppen wird es in der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ im ganzen $(q + 1)$ gleichberechtigte geben. Sollen zwei unter diesen Gruppen eine Operation gemeinsam haben, so kann dies abgesehen von der Identität nur eine Operation $\overline{V}$ der Periode zwei sein, da doch auch die bezügliche Operation erster Art $\overline{V}^2$ beiden Gruppen gemeinsam sein müsste. Unter den Operationen $(\sqrt{S})^r$ ist aber allein

$$\sqrt{S}^q(\omega) \equiv \frac{\sqrt{-1} \cdot \bar{\omega}}{\sqrt{-1}}$$

von der Periode zwei, eine Operation, die wir als eine in der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ ausgezeichnete erkannten, und die also thatsächlich allen $(q + 1)$ $\overline{G}_{2q}$ gemeinsam ist. *Ausser dieser Operation sind in den $\overline{G}_{2q}$ im ganzen $(q^2 - 1)$ verschiedene Operationen $\overline{V}$ enthalten; dieselben sind alle von der Periode $2q$ und haben $\bar{k}^2 + 1 \equiv 0$, (mod. q).*

Wir wenden uns nun sogleich zu den Operationen $\overline{V}$ mit quadratischem Nichtrest $(\bar{k}^2 + 1)$, da diese sich nämlich im gegenwärtigen Falle einer Primzahl $q = 4h + 1$ leichter erledigen lassen, als die Operationen mit quadratischem Reste $(\bar{k}^2 + 1)$. Wir werden hier die imaginäre Gestalt unserer Gruppe benutzen müssen und gehen insbesondere auf die in § 5 (p. 432) durch w bezeichnete Operation $w(\xi) \equiv \frac{j\xi}{\sqrt{-1}}$ der

Periode $\frac{q+1}{2}$ zurück. Derselben gesellt sich als Operation $\sqrt{w}$ die nachfolgende zu:

$$(5) \qquad \sqrt{w}(\xi) \equiv \frac{j^{\frac{q+3}{4}}\sqrt{-1}}{j^{-\frac{q+3}{4}}\sqrt{-1}\cdot\xi}, \text{ (mod. } q),$$

und wir bemerken im voraus, dass weiterhin nicht noch eine andere Operation $\sqrt{w}$ eintritt. Da $\sqrt{w}$ die Periode $(q+1)$ besitzt, *so finden sich in der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *im ganzen* $\frac{q(q-1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische Untergruppen* $\overline{G}_{q+1}$. Die aus (5) entspringende $\overline{G}_{q+1}$ enthält die $(q+1)$ Operationen:

$$(6) \qquad \xi' \equiv \frac{j^{\nu}\xi}{j^{-\nu}}, \quad \xi' \equiv \frac{j^{\nu}\sqrt{-1}}{j^{-\nu}\sqrt{-1}\cdot\xi}, \text{ (mod. } q).$$

Sollen zwei verschiedene unter den $\overline{G}_{q+1}$ ausser der Identität noch eine weitere Operation gemeinsam haben, so kann selbige bekanntlich keine Operation erster Art sein, müsste vielmehr eine solche zweiter Art der Periode zwei sein. Aber unter den Substitutionen (6) ist nur $\xi' \equiv \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\cdot\xi}$ allein von dieser Periode; letztere Substitution muss in der That allen $\overline{G}_{q+1}$ gemeinsam sein, denn wir haben in ihr wieder die uns bereits bekannte in der Gesamtgruppe $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ ausgezeichnete Operation $\overline{V}$ der Periode zwei vor uns. Wir zählen daraufhin leicht ab, *dass in den* $\overline{G}_{q+1}$ *im ganzen* $\frac{q(q-1)^2}{4}$ *verschiedene Operationen zweiter Art enthalten sind.*

Indem wir endlich zu den $\frac{q(q+1)}{2}$ gleichberechtigten $G_{\frac{q-1}{2}}$ gehen, brauchen wir v wieder in der Bedeutung des § 4: $v(\omega) \equiv \frac{a\omega}{a^{-1}}$. Schon am Anfang des Paragraphen fanden wir, dass *sämtliche* Operationen der aus v entspringenden $G_{\frac{q-1}{2}}$ mit A vertauschbar waren, eine Thatsache, die für die sämtlichen Operationen keiner anderen $G_{\frac{q-1}{2}}$ zutrat. Wir finden so den wichtigen Satz: *Die* $\frac{q(q+1)}{2}$ *Gruppen* $G_{\frac{q-1}{2}}$ *sind den* $\frac{q(q+1)}{2}$ *mit A gleichberechtigten Operationen wechselweise eindeutig zugeordnet, und zwar in dem Sinne, dass mit der einzelnen der letzteren Operationen jede einzelne Operation der zugeordneten* $G_{\frac{q-1}{2}}$ *vertauschbar*

ist. Indem wir jedesmal die mit A gleichberechtigte Operation zur bezüglichen $G_{\frac{q-1}{2}}$ hinzusetzen, *gewinnen wir insgesamt* $\frac{q(q+1)}{2}$ *gleichberechtigte erweiterte* $\overline{G}_{q-1}$, welche den Rest der noch nicht genannten Operationen zweiter Art enthalten. *Diese* $\overline{G}_{q-1}$ *sind nun nicht etwa cyclisch, vielmehr sind die umfassendsten in denselben enthaltenen cyclischen Untergruppen solche von der Ordnung* $\frac{q-1}{2}$. Durch Iteration von $v^\nu A$ entspringt nämlich die Operation $v^{2\nu}$, so dass $v^\nu A$ in der That höchstens die Periode $\frac{q-1}{2}$ haben kann. Wir erblicken zugleich, *dass nur den Operationen* $v^{2\nu}$ *der in der* $G_{\frac{q-1}{2}}$ *enthaltenen* $G_{\frac{q-1}{4}}$ *Operationen* $\sqrt{v^{2\nu}}$ *zugeordnet sind und zwar immer zwei, indem thatsächlich jede der beiden Operationen*

$$\sqrt{v^{2\nu}}(\omega) = v^\nu A(\omega) \equiv \frac{a^\nu \overline{\omega}}{-a^{-\nu}},$$

$$\sqrt{v^{2\nu}}(\omega) = v^{\nu+\frac{q-1}{4}} A(\omega) \equiv \frac{a^\nu \sqrt{-1}\cdot\overline{\omega}}{a^{-\nu}\sqrt{-1}} \tag{7}$$

iteriert auf $v^{2\nu}$ *führt.* An Operationen zweiter Art der Periode zwei sind in jeder $\overline{G}_{q-1}$ zwei verschiedene enthalten; z. B. haben unter den Substitutionen (7) die beiden A und $v^{\frac{q-1}{4}} A$ diese Periode, deren letztere man sogleich als die ausgezeichnete $\overline{V}$ der Periode zwei erkennt. Die Gesamtzahl der übrigen, ausserdem noch in den $\overline{G}_{q-1}$ enthaltenen Operationen zweiter Art ist $\frac{q(q+1)(q-5)}{4}$; deren Perioden sind $\frac{q-1}{2\sigma}$, wo σ ein Teiler von $\frac{q-1}{2}$, und zwar $\sigma < \frac{q-1}{4}$, ist.

Mit den nun vollständig beschriebenen cyclischen Untergruppen der erweiterten Gruppe $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ haben wir zugleich die Gesamtheit der in dieser $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ enthaltenen Operationen zweiter Art kennen gelernt, da in der That

$$1 + \frac{q(q+1)}{2} + (q^2-1) + \frac{q(q-1)^2}{4} + \frac{q(q+1)(q-5)}{4} = \frac{q(q^2-1)}{2}$$

ist. Wir unterlassen, nun auch noch die in den $\overline{G}_{q\pm1}$ enthaltenen cyclischen Untergruppen in erschöpfender Weise zu charakterisieren*).

*) Bei den $\overline{G}_{q+1}$ hätte dies keine Schwierigkeit; bei den $\overline{G}_{q-1}$ müssten aber immer erneute Fallunterscheidungen getroffen werden, je nach den Resten, welche q mod. 16, 32, 64, u. s. w. lässt.

§ 9. Cyclische Untergruppen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ für den Fall $q = 4h-1$.

Ungleich viel einfacher gestaltet sich die Structur der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ im nun noch zu erledigenden Falle einer Primzahl q der Form $4h-1$. Da giebt es zuvörderst ausser den am Anfang des vorigen Paragraphen namhaft gemachten $\frac{q(q+1)}{2}$ gleichberechtigten $\overline{G}_2$ nicht noch weitere $\overline{G}_2$. Ferner kommen überhaupt keine Operationen $\overline{V}$ der Periode $2q$ vor, da $(\overline{k}^2+1)$ nicht durch q teilbar sein kann.

Nach wie vor sind die Operationen $v^\nu(\omega) \equiv \frac{a^\nu \omega}{a^{-\nu}}$ mit A vertauschbar. Jetzt aber ist die entsprechende erweiterte $\overline{G}_{q-1}$ cyclisch, indem wirklich $v^{\frac{q+1}{4}} A$, mit sich selbst combiniert, die Operation v giebt und sonach die Periode $(q-1)$ haben muss. *Wir finden demgemäss in der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *jetzt* $\frac{q(q+1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische* $\overline{G}_{q-1}$, *in denen dann die oben genannten* $\overline{G}_2$ *enthalten sind.* Insgesamt sind in diesen Gruppen $\frac{q(q^2-1)}{4}$ verschiedene Operationen zweiter Art enthalten, für welche durchgehends $(\overline{k}^2+1)$ quadratischer Rest ist, und mit denen die Gesamtheit der Operationen von Restcharakter erschöpft ist.

Um jetzt die Operationen mit quadratischem Nichtrest $(\overline{k}^2+1)$ zu erledigen, betrachten wir eine besondere Operation der Gestalt:

$$(1) \qquad \overline{w}(\xi) \equiv \frac{\mathsf{B}}{\overline{\mathsf{B}} \cdot \overline{\xi}}, \ (\text{mod. } q),$$

in welcher also B der Bedingung $\mathsf{B}\overline{\mathsf{B}} \equiv -1$ genügen muss. Durch Iteration von (1) entspringt $\overline{w}^2(\xi) \equiv \frac{\mathsf{B}^2 \cdot \xi}{\overline{\mathsf{B}}^2}$, worin wir eine Operation derjenigen $G_{\frac{q+1}{2}}$ vor uns haben, die aus $w(\xi) \equiv \frac{j\xi}{j^{-1}}$ entspringt. Sei etwa $\mathsf{B}^2 \equiv j^\mu$, (mod. q), so behaupten wir, dass μ eine *ungerade* Zahl ist; anderenfalls wäre nämlich offenbar $\mathsf{B}\overline{\mathsf{B}} \equiv \mathsf{B}^{q+1} \equiv 1$, was doch gegen die über B gemachte Voraussetzung streitet. Setzen wir also $\mathsf{B}^2 \equiv j^{1-2\lambda}$, so wird $(\mathsf{B}j^\lambda)^2 \equiv j$ sein, und damit ist offenbar

$$(2) \qquad \sqrt{w}(\xi) \equiv \frac{\mathsf{B}j^\lambda}{\overline{\mathsf{B}}j^{-\lambda} \cdot \overline{\xi}}, \ (\text{mod. } q)$$

eine Operation der Periode $(q+1)$. *Wir gewinnen solchergestalt* $\frac{q(q-1)}{2}$ *gleichberechtigte cyclische Untergruppen* $\overline{G}_{q+1}$, *deren einzelne eine cyclische*

$G_{\frac{q+1}{2}}$ *in sich enthält.* Unter den Operationen erster Art w^ν sind nur denjenigen mit *ungeraden* Exponenten ν Operationen zweiter Art $\sqrt{w^\nu}$ zugeordnet und zwar jedesmal *zwei.* So führt z. B. auf w ausser der Operation (2) durch Iteration auch noch:

$$\sqrt{w}(\xi) = \frac{\mathsf{B}j^{\lambda+\frac{q+1}{4}}}{\overline{\mathsf{B}}j^{-\lambda-\frac{q+1}{4}} \cdot \bar{\xi}}.$$

Da keine zwei $\overline{G}_{q+1}$ ausser der Identität eine Operation gemeinsam haben können, so sind in den $\overline{G}_{q+1}$ im ganzen $\frac{q(q^2-1)}{4}$ Operationen zweiter Art enthalten, d. i. gerade der ganze Rest der von den $\overline{G}_{q-1}$ her noch bleibenden Operationen dieser Art.

§ 10. Von den symmetrischen Umformungen der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in sich.

Unter den Operationen der erweiterten Gruppe $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ sind für die geometrische Betrachtung der geschlossenen Fläche namentlich diejenigen von der Periode zwei von Wichtigkeit. Sie bedeuten derartige eindeutige Transformationen der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in sich, bei denen die Winkel umgelegt werden, und die, ein zweites Mal angewandt, jeden Punkt der Fläche wieder an seine ursprüngliche Stelle zurückverlegen. Nennen wir eine solche Transformation der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in sich kurz eine *symmetrische Umformung* derselben. Schon oben haben wir ganz allgemein geschlossene Flächen mit symmetrischen Umformungen in sich als symmetrische Flächen bezeichnet*) und haben nunmehr eine wichtige Fallunterscheidung zu kennzeichnen, welche man für symmetrische Umformungen beschriebener Art eingeführt hat. Es kann sein, dass bei Ausführung einer solchen eine oder mehrere geschlossene Linien der Fläche Punkt für Punkt in sich übergeführt werden, Linien, welche wir dann als *Übergangs- oder Symmetrielinien* bezeichnen werden; es kann zweitens sein, dass kein einziger Punkt der Fläche in sich transformiert wird. Im ersten Falle sprechen wir von einer symmetrischen Umformung mit Übergangscurven und teilen

*) Man vergl. hier die bereits p. 337 genannten Abhandlungen über symmetrische Flächen.

weiter nach Anzahl derselben ein; im zweiten Falle haben wir eine symmetrische Umformung ohne Übergangscurve*).

Unter den symmetrischen Umformungen, wie sie für die $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ von den $\overline{G}_2$ geliefert werden, steht nun zuvörderst im Falle $q = 4h + 1$ die der ausgezeichneten $\overline{G}_2$ entsprechende isoliert. Bei Ausführung derselben kann kein Punkt der geschlossenen Fläche in sich übergehen. Sollte nämlich die $\overline{G}_2$ auf dem Rande irgend eines der $q(q^2-1)$ Elementardreiecke von $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ einen Fixpunkt haben, so müssten alle zu letzteren homologen Punkte der übrigen Dreiecke gleichfalls Fixpunkte der $\overline{G}_2$ sein, da diese $\overline{G}_2$ in $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ ausgezeichnet ist; solches erkennt man aufs leichteste als unmöglich. Wir schliessen: *Für Primzahlstufen q der Form $q = 4h + 1$ lässt $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine ausgezeichnete symmetrische Umformung zu, bei welcher keine Übergangscurve auftritt.* Für $q = 5$ erkennt man hierin sofort diejenige Transformation der ikosaedrisch geteilten Kugel in sich, bei der der einzelne Punkt in den diametral gegenüberliegenden übergeführt wird.

*Hierüber hinaus kommen für jede Primzahlstufe q noch weitere $\frac{q(q+1)}{2}$ gleichberechtigte symmetrische Umformungen der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ hinzu, welche Symmetrielinien haben***). In der That haben wir ja hier mit denjenigen Operationen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ zu thun, die bei der Reduction mod. q aus den Spiegelungen der erweiterten Modulgruppe entspringen. Wollen wir also die hier in Rede stehenden $\frac{q(q+1)}{2}$ symmetrischen Umformungen kurz wieder als *Spiegelungen* bezeichnen. Solcher Spiegelungen hatten wir in der That für $q = 5$ im ganzen fünfzehn, den fünfzehn Symmetriekreisen der Ikosaederteilung entsprechend. Auch für $q = 7$ kommen wir auf bekannte Verhältnisse zurück; da haben wir 28 Spiegelungen, und ihnen entsprechen offenbar die 28 Symmetrielinien der F_{168}, von denen wir oben (p. 376) bereits ausführlich handelten.

Im allgemeinen Falle sind die Verhältnisse durchaus den be-

*) Der weiteren Einteilung der symmetrischen Flächen in orthosymmetrische und diasymmetrische (cf. die Weichold'sche Arbeit) können wir im Texte nicht nachgehen und bemerken in diesem Betracht nur noch, dass unsere $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, sofern nur ihr Geschlecht $p > 0$ ist, d. i. für $q > 5$, stets diasymmetrische Flächen sind.

**) Man vergl. hier das auf S. 438 ausführlich gegebene Citat.

sonderen für $q = 7$ analog gebildet, so dass unsere damaligen Überlegungen Schritt für Schritt auch hier Anwendung finden. Indem wir den Elementardreiecken auf der geschlossenen Fläche in ihren Ecken durchgehends die Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{q}$ geben, setzt sich *jede* Dreiecksseite über ihre Endpunkte hinaus in stetiger Krümmung in bestimmte andere fort. Die einzelne Dreiecksseite erscheint so als Glied in einer ganzen Kette solcher Seiten, die zusammen eine geschlossene, stetig gekrümmte Linie auf der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ abgeben. Man überzeugt sich sofort an der Hand der Dreiecksteilung $(2, 3, q)$, dass auf dieser geschlossenen Linie die Abfolge der Punkte a, b, c gerade dieselbe ist, wie sie schon bei $q = 7$ hervortrat; immer haben wir, wie dort (cf. Fig. 89, p. 377), Perioden zu je sechs Punkten in der Reihenfolge c, a, c, b, a, b, so zwar, dass die sechs Dreiecksseiten zwischen dem einzelnen Punkte c und dem an sechster Stelle in der Reihe auf ihn folgenden Punkte (der wieder ein Punkt c ist) gerade aus *zwei* Symmetriekreisen der Modulteilung entspringen, welche letztere uns übrigens je einen einzelnen aus den beiden Gattungen dieser Kreise darstellen.

Da die $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ regulär ist, so schliessen wir genau wie oben bei der F_{168}, *dass alle fraglichen geschlossenen Linien der Teilung der* $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *mit einander äquivalent sind*; sie werden also insbesondere alle aus gleichviel Dreiecksseiten bestehen. Da ferner $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ regulär-*symmetrisch* ist, *so wird jede unserer Linien eine Symmetrielinie für* $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *sein und als Übergangscurve zu einer unserer* $\frac{q(q+1)}{2}$ *Spiegelungen gehören.* Besitzt nun eine dieser Spiegelungen im ganzen etwa d Übergangslinien, so gilt dasselbe auch von den übrigen, da sie alle mit einander gleichberechtigt sind. Wir haben dann also im ganzen $\frac{d \cdot q(q+1)}{2}$ Symmetrielinien bezeichneter Art, und da jede Dreiecksseite unserer Teilung einer Symmetrielinie angehört, so wird die einzelne solche sich aus je $\frac{3(q-1)}{d}$ Dreiecksseiten zusammensetzen. Bemerken wir endlich noch, *dass die einzelne unserer* $\frac{d \cdot q(q+1)}{2}$ *Symmetrielinien sich selbst nicht überkreuzt*; sie würde ja anderenfalls bei der bezüglichen Spiegelung nicht Punkt für Punkt an ihrer Stelle bleiben können.

Für die besonderen Fälle $q = 5$ und $q = 7$ war $d = 1$, da wir

seinerzeit wirklich 15 bez. 28 Symmetrielinien fanden. Wollen wir hier letzten Endes im allgemeinen Falle die Zahl d charakterisieren, so gehen wir etwa im besonderen auf diejenige Symmetrielinie ein, auf welcher die Eckpunkte c; a des Ausgangsdreiecks der Einteilung unserer geschlossenen Fläche gelegen sind. Verfolgen wir von hier aus die an der in Rede stehenden Symmetrielinie gelegenen Dreiecke, so folgt vom Ausgangsdreieck aus gerechnet an siebenter Stelle wieder ein Dreieck, das gerade so zur Symmetrielinie gelegen ist, wie das Ausgangsdreieck; beim weiteren Fortgang über die Symmetrielinie aber wiederholen sich die Verhältnisse periodisch. Die Substitution, welche das Ausgangsdreieck in das eben genannte andere Dreieck überführt, berechnet man ohne Mühe und findet, dass sie sich mod. q auf

$$V(\omega) \equiv \frac{2\omega}{2^{-1}}$$

reduciert. Wollen wir also die Seiten, welche unsere Symmetrielinie zusammensetzen, abzählen, so sei etwa die das Ausgangsdreieck durchziehende die erste. Die 7te gehört dann dem Dreieck V an, die 13te dem Dreieck V^2 u. s. w. Aber die $\left(\frac{3(q-1)}{d}+1\right)^{te}$ sollte wieder dem Ausgangsdreieck angehören; es muss also

$$V^{\frac{q-1}{2d}}(\omega) \equiv \frac{2^{\frac{q-1}{2d}}\omega}{2^{-\frac{q-1}{2d}}} \equiv 1, \text{ (mod. } q)$$

sein, während dies von keiner voraufgehenden Potenz von V gelten soll. Wir haben also das Resultat: *Man bestimme die niederste Potenz der Zahl* 2, *die modulo* q *mit* $+1$ *oder* -1 *congruent wird; ist dies die* ν^{te}, *so ist* $d = \frac{q-1}{2\nu}$ *die gesuchte Zahl* d. So ist z. B. d immer gleich 1, wenn 2 primitive Wurzel der Primzahl q ist. Der niederste Fall, bei dem $d > 1$ ausfällt, ist $q = 17$; da ist $2^4 \equiv -1$, und man gewinnt $d = 2$. Weiter folgt 31 mit $d = 3$, 41 mit $d = 2$ u. s. w.*)

Eine grosse Reihe weiterer Bemerkungen über die Symmetrielinien der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ versparen wir bis an passende Stellen des folgenden

*) Das hier zu Tage getretene unregelmässige Verhalten der verschiedenen Primzahlen q steht in Beziehung zu der Verschiedenartigkeit in der Structur der $\overline{G}_{q-1}$, deren wir auf Seite 444 unter dem Texte gedachten.

Kapitels, in welchem es sich um die nicht-cyclischen Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ handeln soll. Bei der geometrischen Interpretation dieser Untergruppen durch die Flächen $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ werden in der That die Symmetrielinien zur Veranschaulichung der in Betracht kommenden Verhältnisse die wichtigsten Dienste leisten.

Neuntes Kapitel.

Aufzählung aller nicht-cyclischen Untergruppen der zur Primzahlstufe q gehörenden Gruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

Auf Grund der Entwicklungen des vorigen Kapitels werden sich nun leicht auch die nicht-cyclischen Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ angeben lassen. Die vollständige Aufzählung derselben soll die Hauptaufgabe des gegenwärtigen Kapitels sein. Daneben werden wir noch wiederholt auf die homogene $G_{q(q^2-1)}$, sowie auf die erweiterte $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ Bezug nehmen; aber in Ansehung dieser Gruppen würde eine erschöpfende Untersuchung, wenn auch keineswegs schwierig, so doch umständlich und für unsere künftigen Zwecke keineswegs erforderlich sein.

Von den zu nennenden Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ sind diejenigen, welche wir als halbmetacyclische bezeichnen, sowie die vom Diedertypus bereits von Serret aufgestellt worden*). Die weiter in Betracht kommenden Untergruppen vom Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedertypus sind für die allgemeine Primzahlstufe erst von Hrn. Gierster abgeleitet und untersucht worden, sowie wir ihm auch den Vollständigkeitsbeweis für die hier abzuleitende Zerlegung der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ verdanken**).

Die in den beiden ersten Paragraphen des Nachfolgenden gegebenen Überlegungen, die uns zu sehr interessanten Sätzen von allgemeiner gruppentheoretischer Bedeutung hinführen, können wir für die ferneren Entwicklungen dieses Kapitels nicht mehr entbehren. Inhaltlich stehen sie freilich auch schon zu früheren Kapiteln in der innigsten Beziehung.

---

*) An der p. 411 angegebenen Stelle.

**) Man vergleiche die p. 411 genannte Arbeit Gierster's im 18ten Bande der Math. Annalen.

§ 1. Von den erzeugenden Substitutionen der zu einer beliebigen Zahl n gehörenden Gruppe $G_{(n)}$.

Wir gehen noch einmal zurück auf die oft gebrauchte Dreiecksteilung $(2, 3, n)$ und die ihr zugehörige Gruppe $G_{(n)}$ von Substitutionen erster Art, die jene Teilung mit sich selbst zur Deckung bringen. Diese $G_{(n)}$ hatten wir oben auf die Modulgruppe Γ meroedrisch isomorph bezogen und wollen jetzt diejenigen Operationen der $G_{(n)}$, welche dabei den Modulsubstitutionen S und T zugeordnet sind, selbst wieder S und T nennen. In letzteren beiden Operationen besitzen wir dann ein System von Erzeugenden der $G_{(n)}$; dabei ist S von der Periode n, während T und ST (gerade wie auch die entsprechenden Modulsubstitutionen) die Periode zwei bez. drei besitzen. Wir können das so ausdrücken, *dass die Erzeugenden S und T der $G_{(n)}$ die Relationen*

$$S^n = 1, \quad T^2 = 1, \quad (ST)^3 = 1 \tag{1}$$

befriedigen. Jetzt behaupten wir, *dass ausser* (1) *für S und T nicht noch eine weitere, wesentlich neue Relation bestehen kann.*

Der Sinn dieser Behauptung ist der folgende. Eine Relation für S und T gewinnen wir immer dann, wenn irgend eine Combination der S, T, die wir symbolisch als Product $\Pi(S, T) = S^a T^b S^c \cdots$ schreiben, auf die identische Operation führt; die betreffende Relation ist alsdann $\Pi(S, T) = 1$. Da haben wir zunächst solche Relationen, die unabhängig von der besonderen Bedeutung der Operationen S, T bestehen, und die wir weiterhin als *identische* bezeichnen wollen. Es werden das offenbar zunächst die folgenden vier sein:

$$SS^{-1} = 1, \quad S^{-1}S = 1, \quad TT^{-1} = 1, \quad T^{-1}T = 1. \tag{2}$$

Weiter rechnen wir dahin aber auch diejenigen, welche durch Combination oder Ineinanderschachtelung dieser vier Relationen entspringen, so z. B. $S^2S^{-2} = 1$ oder $S^3TS^{-1}ST^{-1}S^{-3} = 1$. Einschaltung oder Herausnahme von Factoren SS^{-1}, $S^{-1}S$ etc., welche einmal oder wiederholt an irgend welchen Stellen eines beliebig vorgelegten symbolischen Productes $\Pi(S, T)$ vorgenommen werden, bezeichnen wir fernerhin als „identische Umformung" des Productes. Jede identische Relation wird sich sonach durch identische Umformung auf die Gestalt $1 = 1$ bringen lassen. Demgegenüber sind die Formeln (1) als „wesentliche Relationen" zu bezeichnen, da sie nur erst auf Grund der besonderen Bedeutung bestehen, welche unseren Operationen S, T zukommt. Weil sie aber einmal bestehen, so dürfen wir an beliebigen Stellen eines symbolischen Productes $\Pi(S, T)$ einmal oder öfter wiederholt Factoren

$$S^n, \; S^{-n}, \; T^2, \; T^{-2}, \; (ST)^3, \; (ST)^{-3} \tag{3}$$

einschalten oder herausnehmen, ohne dass dabei die durch $\Pi(S, T)$ dargestellte Substitution der $G_{\{n\}}$ eine andere wird. Der Sinn unserer obigen Behauptung ist jetzt offenbar der, *dass irgend eine vorgefundene Relation* $\Pi(S, T) = 1$ *durch solche Ein- und Ausschaltungen von Factoren* (3) *im Verein vielleicht mit identischen Umformungen jederzeit selbst in eine identische Relation umgewandelt werden kann.*

Der Beweis unserer dermassen interpretierten Behauptung ist durch Rückgang auf die Teilung $(2, 3, n)$ vermöge geometrischer Überlegungen aufs leichteste zu führen. Liege ein Product allgemeinster Gestalt $\Pi(ST) = S^\alpha T^\beta S^\gamma T^\delta S^\varepsilon \cdots$ vor, welches die identische Substitution der $G_{\{n\}}$ darstellt: $\Pi(S, T) = 1$, so wollen wir das Product Π in folgender Weise geometrisch deuten. Von einem Punkte des Ausgangsdreiecks der Teilung $(2, 3, n)$ ziehen wir *eine die Ecken* a, b, c *der Teilung durchgehends meidende Linie* C, welche der Reihe nach die Doppeldreiecke $1, S, S^2, \cdots, S^\alpha, S^\alpha T, S^\alpha T^2, \cdots, S^\alpha T^\beta, S^\alpha T^\beta S, \cdots$ durchläuft, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \cdots$ gerade die in $\Pi(S, T)$ auftretenden Exponenten sind. Indem wir C so weiter nach Massgabe der expliciten Gestalt von $\Pi(S, T)$ hinleiten, werden wir letzten Endes im Doppeldreieck $\Pi(S, T) = 1$ das Ausgangsdreieck selbst wieder erreichen und lassen dortselbst die Curve C in ihrem Anfangspunkte endigen; sie wird demgemäss eine im Inneren der Teilung $(2, 3, n)$ verlaufende, übrigens beliebig oft sich selbst überkreuzende geschlossene Linie darstellen.

Curve C, welche die Ecken a, b, c durchgehends vermeiden sollte, wird eben dieserhalb umgekehrt das Product $\Pi(S, T)$ *eindeutig* bestimmen. Wir müssen uns nun vergewissern, was es für dieses Product für Folgen hat, wenn wir C einer stetig verlaufenden Gestaltsänderung unterwerfen, die jedoch derart beschränkt sein soll, dass bei ihrer Ausführung die Linie C über keinen der Eckpunkte a, b, c der Teilung $(2, 3, n)$ hinübergezogen wird. So beschränkte Abänderungen können wir entweder nur noch dadurch hervorrufen, dass wir einmal oder wiederholt C über eine einzelne Dreiecksseite zu einer Ausbuchtung in das benachbarte Doppeldreieck hinüberziehen, von dem aus C dann aber gleich wieder zu jenem ersteren Doppeldreieck zurückkehren würde, oder aber dadurch, dass wir derartige Ausbuchtungen zum Verschwinden bringen*). Da ist nun sofort evident, dass einmalige Ausführung oder Wegnahme einer solchen Ausbuchtung für $\Pi(S, T)$ darauf hinaus kommt, dass wir an bestimmter Stelle einen der Fac-

*) Man habe hier immer die Fig. 33, p. 109, vor Augen, welche die Teilung (2, 3, 7) zur Darstellung bringt.

toren (2) ein- oder ausschalten. Wir überblicken also das Resultat: *Die gekennzeichneten stetigen Gestaltänderungen von C bedeuten für* $\Pi(S, T)$ *identische Umformungen.*

Nun folgt aus dem Umstande, dass die Teilung (2, 3, n) einen einfach zusammenhängenden Bereich bedeckt, der auch in der Functionentheorie ausgiebig zur Verwendung kommende bekannte Satz, dass sich C durch die hier erlaubten Umänderungen unter Festhaltung seines Anfangspunktes in einen solchen Weg C' umwandeln lässt, der sich aus einer Reihe von jenem Anfangspunkt entspringender und in bestimmter Folge zu durchlaufender „Schleifen" zusammensetzt*). Dabei verstehen wir unter einer Schleife einen Weg, der von jenem Anfangspunkte aus immer unter Meidung der Ecken a, b, c in die unmittelbare Nähe einer einzelnen, bestimmten unter diesen Ecken hinzieht, selbige ein oder mehrere Male in der einen oder anderen Richtung umkreist, um alsdann auf der schon durchlaufenen Bahn zum Anfangspunkte zurückzukehren. Man bemerke also, dass sich $\Pi(S, T) = 1$ durch identische Umformung der linken Seite auf die Form $\pi_1(S, T) \cdot \pi_2(S, T) \cdots = 1$ bringen lässt, wo sich nun die einzelnen Factoren links auf die einzelnen, C' zusammensetzenden Schleifen beziehen. Das einzelne dieser Producte $\pi_\varkappa(S, T)$ hat jetzt auf Grund der Gestalt der bezüglichen Schleife selbst eine charakteristische Form; $\pi_\varkappa$ wird sich nämlich offenbar aus drei Bestandteilen zusammensetzen: Erstlich einem Producte $S^\alpha T^\beta \cdots S^\zeta T^\eta S^\vartheta$, dem Wege zum in Betracht kommenden Eckpunkte hin, alsdann folgt, je nach der Art der Ecke und der Anzahl und Richtung der Umkreisungen, einer der Factoren (3) in gewisser Potenz; den Schluss bildet, dem Rückwege entsprechend, das zu jenem ersten Product inverse $S^{-\vartheta} T^{-\eta} S^{-\zeta} \cdots T^{-\beta} S^{-\alpha}$. Haben wir also etwa eine Ecke c, so ist

$$\pi_\varkappa(S, T) = S^\alpha T^\beta \cdots S^\zeta T^\eta S^\vartheta \cdot S^{\nu n} \cdot S^{-\vartheta} T^{-\eta} S^{-\zeta} \cdots T^{-\beta} S^{-\alpha}.$$

Hier ist nun sofort evident, dass durch einmalige oder öfter wiederholte Herausnahme eines Factors (3) die Relation $\pi_\varkappa(S, T) = 1$ zu einer identischen umgestaltet werden kann. Damit ist aber unsere am Anfang des Paragraphen aufgestellte Behauptung in der That verificiert.

Bemerken wir zum Schluss noch, was man ja leicht überblicken wird, dass die gewonnenen Resultate auch für den Grenzfall $n = \infty$, d. i. für die Modulgruppe Γ, ihre Gültigkeit bewahren: *Die erzeugenden Modulsubstitutionen* S, T *genügen ausser* $T^2 = 1$, $(ST)^3 = 1$ *nicht noch weiteren Relationen.* Desgleichen hat die Übertragung unserer Über-

*) Man vergl. z. B. Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen* (Leipzig, 1866) p. 82 u. f.

legungen auch auf die übrigen im 3ten Kapitel des vorigen Abschnitts besprochenen Dreiecksteilungen und zugehörigen Gruppen keinerlei Schwierigkeit, weil wir auch da immer mit Dreiecksteilungen zu thun haben, welche einen *einfach zusammenhängenden* Bereich (das Innere des jeweiligen Orthogonalkreises bez. eine ganze complexe Ebene) *einfach* überdecken.

§ 2. Der Dyck'sche Satz über Erzeugung der mit $G_{\{n\}}$ holoedrisch isomorphen Gruppen.

Die Erzeugung aller Substitutionen V der $G_{\{n\}}$ aus den beiden besonderen linearen Substitutionen S und T kommt jetzt auf Grund der gewonnenen Resultate einzig und allein auf eine Aufgabe der Combinatorik hinaus. Wir werden alle denkbaren Producte $\Pi(S, T)$ bilden und immer unter denen, die durch identische Umformungen bez. Einschaltung von Factoren (3) § 1 in einander überführbar sind, ein particuläres nach Willkür auswählen. *So erhalten wir jede Operation V von $G_{\{n\}}$ und jede nur einmal.* Ersteres ist sofort evident, denn die oft genannten Abänderungen des Productes $\Pi(S, T)$ werden ja auf Grund von § 1 die dargestellte Substitution $V = \Pi(S, T)$ nicht modificieren. Würden nun aber noch zwei nicht in einander überführbare Producte Π_1, Π_2 ein und dieselbe Substitution V darstellen, so wäre $\Pi_1(S, T) = \Pi_2(S, T)$. Versteht man alsdann unter $\Pi_2^{-1}(S, T)$ das zu Π_2 inverse Product, das also die Factoren von Π_2 in entgegengesetzter Folge und mit entgegengesetzten Exponenten besitzt, so würden wir unter bezeichneten Umständen in $\Pi_1(S, T) \cdot \Pi_2^{-1}(S, T) = 1$ eine wesentlich neue Relation besitzen, was doch undenkbar ist.

Man prüfe nun noch einmal die gerade gezogenen Schlüsse und wird bemerken, dass wir dabei von der specifischen Bedeutung der S, T als linearer Substitutionen einer Variabelen gänzlich abgesehen haben. Überall ist nur dies Eine für die Gültigkeit unserer Schlüsse vorauszusetzen, *dass S und T gleichartige, allein den Relationen* (1) § 1 *genügende Operationen irgend welcher Art sind, die wiederholt und mit einander combiniert wieder Operationen derselben Art erzeugen.* Allein infolge dieser Voraussetzung über S und T werden die durch jene particulär gewählten Producte $\Pi(S, T)$ definierten Operationen V, wie wir ganz abstracter Weise schliessen, in ihrer Gesamtheit eine bestimmte Gruppe bilden, welche letztere mit unserer $G_{\{n\}}$ identisch wird, wofern wir den Erzeugenden S, T obige Bedeutung als bestimmte linear-gebrochene Substitutionen einer Variabelen wieder verleihen.

Wollen wir das nun, noch etwas anders gestaltet, in dem folgenden

Satze aussprechen, dessen Bedeutung für die Gruppentheorie übrigens eine ganz allgemeine ist: *Zwei gleichartige Operationen S', T', die combiniert immer wieder Operationen derselben Art herstellen, die des ferneren den Relationen*

$$S'^{n} = 1, \quad T'^{2} = 1, \quad (S'T')^{3} = 1, \tag{1}$$

darüber hinaus aber nicht noch wesentlich neuen genügen, sind die Erzeugenden einer mit $G_{\{n\}}$ holoedrisch isomorphen Gruppe $G'_{\{n\}}$. Das hier zu Tage tretende Princip der Definition von Gruppen durch erzeugende Operationen, deren Bedeutung gar nicht specificiert ist, zwischen denen aber gewisse Relationen vorgeschrieben sind, ist nach dem Vorgang von Cayley*) durch Dyck für die Gruppentheorie des näheren dargelegt worden**). Insbesondere ist unser gerade gewonnener Satz für die Specialfälle $n = 2, 3, 4, 5$ auch explicit an citierter Stelle von Hrn. Dyck abgeleitet worden. Wollen wir also diesen Satz künftighin als den *Dyck*'schen Satz bezeichnen.

Das besondere Interesse, welches diesen ersten Fällen $n = 2, 3, 4, 5$ anhaftet, ist darin begründet, dass hier die aus S', T' entspringenden Gruppen endliche sind und bez. den Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedertypus zeigen. Das muss man auch auf directem combinatorischen Wege einsehen können, wie wir hier für $n = 3$ thatsächlich ausführen wollen. Indem wir der Kürze halber die oberen Indices in der Bezeichnung der Operationen fortlassen, mögen uns irgend zwei gleichartige Operationen S und T gegeben sein, welche keinen anderen Relationen als

$$S^{3} = 1, \quad T^{2} = 1, \quad (ST)^{3} = 1 \tag{2}$$

genügen. Die dritte Relation schreiben wir sogleich noch mit Hilfe der zweiten und ersten in die neuen Formen um

$$STSTS = T, \quad STS = TS^{2}T \tag{3}$$

und wollen nun die aus S und T zu erzeugende Gruppe G herstellen.

In G wird sicher die Operation $R = S^{-1}TS = S^{2}TS$ auftreten, die als mit T gleichberechtigt von der Periode zwei ist. Dabei ist R von T verschieden; denn wäre $S^{2}TS = T$, so hätten wir die Relation $TS^{2}TS = 1$. Auf Grund von (3) und (2) setzt man letztere Gleichung aber sofort in $STS^{-1} = 1$ um, welche sicher nicht bestehen kann, da linker Hand eine mit T gleichberechtigte und also von der Identität verschiedene Operation steht. Indem wir weiter RT bilden,

*) Man sehe dessen Arbeit „*The theory of groups*“ in Bd. 1 des American Journal of Mathematics (1878).

**) Cf. *Gruppentheoretische Studien*, Math. Ann. Bd. 20, p. 1 (1882).

haben wir eine neue Operation der Periode zwei gewonnen; denn zufolge (3) und (2) ist

$$(RT)^2 = S \cdot STSTS \cdot STST = S \cdot T \cdot STST = 1.$$

Dementsprechend ist $RT = (RT)^{-1} = T^{-1}R^{-1} = TR$, d. h. R und T sind mit einander vertauschbar. *Es werden also die vier Operationen* $1, R, T, RT$ *für sich eine* G_4 *bilden, die ersichtlich den Vierertypus besitzt.*

Die gewonnene G_4 ist nun mit der Operation S vertauschbar. In der That wird T durch S in R transformiert, wie wir schon oben sahen. Weiter aber folgert man unter Anwendung von (3)

$$S^{-1}RST = S \cdot TS^2T = S^2TS = R,$$

so dass $S^{-1}RS = RT$ wird. Durch Benutzung dieser schon gewonnenen Resultate folgt dann drittens

$$S^{-1}RTS = S^{-1}RS \cdot S^{-1}TS = RTR = T,$$

so dass wirklich $S^{-1}G_4S = G_4$ und demnach auch $S^{-2}G_4S^2 = G_4$ zutrifft, was wir auch $SG_4 = G_4S$, $S^2G_4 = G_4S^2$ schreiben können.

Man bilde sich nun die Operationen:

$$\begin{array}{cccc} 1, & T, & R, & RT, \\ S, & TS, & RS, & RTS, \\ S^2, & TS^2, & RS^2, & RTS^2. \end{array}$$

Zufolge der gerade bewiesenen Gleichungen $SG_4 = G_4S, \cdots$ zeigt man sofort, *dass dieselben eine Gruppe bilden.* Dabei können aber keine zwei der aufgeschriebenen zwölf Operationen identisch werden; *unsere Gruppe muss vielmehr eine* G_{12} *der Ordnung zwölf sein,* da sie ja sowohl eine G_3, als eine G_4 in sich enthält. Aufs leichteste erkennt man nun weiter, dass G_{12} den Tetraedertypus besitzt, indem man die cyclischen Untergruppen der G_{12} studiert. Wir wollen dies hier ins einzelne nicht weiter ausführen.

§ 3. Nichtcyclische Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ und $G_{q(q^2-1)}$, an denen sich eine G_q beteiligt.

Nach diesen vorbereitenden Entwicklungen kehren wir zu unserer Hauptaufgabe zurück, die in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen nicht-cyclischen Untergruppen namhaft zu machen. Wir ziehen dabei zuvörderst die $(q+1)$ gleichberechtigten cyclischen G_q heran, um von ihnen aus unsere gewohnte Schlussweise zu beginnen. Als eine von $(q+1)$

gleichberechtigten ist z. B. die aus der Substitution S entspringende G_q vertauschbar im ganzen mit $\frac{q(q^2-1)}{2} : (q+1) = \frac{q(q-1)}{2}$ Operationen, die eine $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ bilden. Wie wir schon oben erfuhren, sind dies die Operationen mit durch q teilbarem γ:

$$(1) \qquad \omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\alpha^{-1}}, \pmod{q},$$

und wir werden demzufolge sehr leicht erkennen, welche cyclischen Untergruppen ausser der schon genannten G_q in der $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ enthalten sind. Da haben wir zuvörderst die aus der Operation (1) p. 429 zu erzeugende $G_{\frac{q-1}{2}}$ damit aber auch die mit ihr gleichberechtigten Gruppen

$$G^{(\nu)}_{\frac{q-1}{2}} = S^{-\nu} G_{\frac{q-1}{2}} S^{\nu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots, (q-1).$$

Keine zwei von diesen Gruppen können identisch sein; es wäre sonst $G_{\frac{q-1}{2}}$ mit einer von der Identität verschiedenen Potenz von S und also auch mit S selbst vertauschbar, was nicht der Fall ist. *Die Gruppe* $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ *setzt sich sonach aus einer einzelnen* G_q *und gewissen* q *gleichberechtigten* $G_{\frac{q-1}{2}}$ *zusammen*, welche Gruppen in der That gerade $\frac{q(q-1)}{2}$ verschiedene Operationen liefern. Da aber nur *eine* G_q in der $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ enthalten ist, so schliessen wir sofort: *Es giebt in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *insgesamt gerade* $(q+1)$ *gleichberechtigte Untergruppen* $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ *bezeichneter Structur.*

Hier reihen wir sogleich weitere nicht-cyclische Untergruppen an, die in den $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ enthalten sind. In jeder $G_{\frac{q-1}{2}}$ war *eine* $G_{\frac{q-1}{2\sigma}}$ enthalten für jeden Teiler σ von $\frac{q-1}{2}$, der $< \frac{q-1}{2}$ ist. *Dementsprechend giebt es in jeder* $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ *eine* $G_{\frac{q(q-1)}{2\sigma}}$, *welche alle Substitutionen enthält*:

$$\omega' \equiv \frac{\alpha^{\nu\sigma}\omega + \beta}{\alpha^{-\nu\sigma}}, \pmod{q},$$

unter α wie auch früher eine primitive Wurzel von q verstanden. Aber man bemerkt leicht, dass es in der einzelnen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ hierüber hinaus

nicht noch weitere Untergruppen giebt, an denen sich die bezügliche G_q selbst beteiligt.

Hiermit sind nun überhaupt alle Untergruppen erschöpft, an denen sich Operationen der Periode q beteiligen. Sollte nämlich die Operation S noch in einer von den nun erwähnten verschiedenen Untergruppe G von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ vorkommen, so müsste in G wenigstens eine Operation $V = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ mit nicht durch q teilbarem γ vorkommen; anderenfalls wäre ja G in der $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ enthalten. Mit S und V ist in G auch $S^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} V S^{\frac{1-\delta}{\gamma}}$ enthalten, wobei wir wie üblich unter $\frac{1-\alpha}{\gamma}$, $\frac{1-\delta}{\gamma}$ diejenigen ganzen Zahlen meinen, die, mit γ multipliciert, mod. q bez. die Reste $1-\alpha$, $1-\delta$ geben. Aber es ist zufolge leichter Rechnung

$$S^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} V S^{\frac{1-\delta}{\gamma}} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \gamma, & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } q).$$

Weiter finden sich mit der so gewonnenen Substitution in G auch

$$\left.\begin{aligned} \left(S^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} V S^{\frac{1-\delta}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} &\equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \\ S\left(S^{\frac{1-\alpha}{\gamma}} V S^{\frac{1-\delta}{\gamma}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} S &\equiv \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = T \end{aligned}\right\} \ (\text{mod. } q).$$

Die Gruppe G enthält demnach S und T und ist also die Gesamtgruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ selbst.

Wir gedenken hier auch noch der homogenen Gruppen, welche obigen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ durch den hemiedrischen Isomorphismus zugewiesen sind. Es werden dies offenbar $G_{q(q-1)}$ sein, und der oben besonders betrachteten $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ entspricht speciell die $G_{q(q-1)}$ der Operationen

$$\omega_1' \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' \equiv \alpha^{-1}\omega_2, \quad (\text{mod. } q).$$

Die Gruppe dieser Substitutionen benennt man anderweit als *metacyclische Gruppe**). Wollen wir hier diesen Namen übernehmen und dann überhaupt unsere $(q+1)$ gleichberechtigten $G_{q(q-1)}$ als die metacyclischen Untergruppen der homogenen $G_{q(q^2-1)}$ bezeichnen. Ent-

*) Man sehe die Note in „Ikos." p. 12.

sprechend sollen die nicht-homogenen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ als die *halbmetacyclischen Untergruppen* der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ bezeichnet werden.

Die damit eingeführten Namen braucht man gelegentlich auch für die $G_{\frac{q(q-1)}{\sigma}}$ resp. für die entsprechenden nicht-homogenen $G_{\frac{q(q-1)}{2\sigma}}$. Da wir indessen künftig zumeist nur mit den $G_{q(q-1)}$ bez. $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ zu thun haben, so werden wir von dieser Erweiterung der eben eingeführten Bezeichnungsweise absehen.

§ 4. Die halbmetacyclischen Untergruppen bei beliebiger Stufenzahl n.

Die halbmetacyclischen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ führen zu den wichtigsten nicht-ausgezeichneten Congruenzgruppen q^{ter} Stufe, die überhaupt existieren, und wir werden späterhin auch die entsprechenden Congruenzgruppen bei zusammengesetzten Stufenzahlen gelegentlich gebrauchen müssen. Wollen wir also gleich hier die dazu erforderliche Untersuchung für beliebige Stufenzahl $n = q^{\nu} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \cdots$ einschalten.

Vorerst mögen einige, auch in der Zahlentheorie in Gebrauch befindliche Zeichen erklärt werden, die wir hier und späterhin gelegentlich benötigen. In üblicher Weise setzen wir:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \cdots, \tag{1}$$

welches bekanntlich die Anzahl der zu n relativ primen Zahlclassen mod. n ist. Des weiteren aber schreiben wir:

$$\psi(n) = n\left(1 + \frac{1}{q}\right)\left(1 + \frac{1}{q_1}\right) \cdots, \tag{2}$$

so dass sich der Index der homogenen Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe $2\mu(n)$ in der folgenden Weise darstellt:

$$2\mu(n) = n\varphi(n)\psi(n). \tag{3}$$

Betrachten wir nunmehr die nicht-homogene Substitution S modulo n, so erkennt man sofort, dass S^n die niederste ihrer Potenzen ist, die mit 1 congruent ausfällt. Innerhalb der zur n^{ten} Stufe gehörenden $G_{\mu(n)}$ ist sonach S die Erzeugende einer cyclischen Untergruppe G_n der Ordnung n. Nun sei V eine mit dieser G_n vertauschbare Operation der $G_{\mu(n)}$, so soll es gelten, die Gestalt dieser Substitution V in Erfahrung zu bringen. Die notwendige und hinreichende Bedingung, welcher V genügen muss, ist die, dass S durch V in irgend eine Substitution S^{ν} der G_n transformiert wird: $V^{-1}SV \equiv S^{\nu}$, (mod. n).

Wir rechnen diese Congruenz aus und spalten sie in üblicher Weise unter Aufnahme eines Factors $e = \pm 1$ in die vier

$$1 + \gamma\delta \equiv e, \quad 1 - \gamma\delta \equiv e, \quad -\gamma^2 \equiv 0, \quad \delta^2 \equiv e\nu.$$

Indem wir $n > 4$ annehmen, folgt durch Addition der beiden ersten Congruenzen $e = +1$, so dass sich diese Congruenzen sofort auf $\gamma\delta \equiv 0$ kürzen. Multiplicieren wir die so gewonnene Congruenz mit α und addieren zu derselben die dritte jener vier eben geschriebenen Congruenzen, nachdem wir sie mit β multiplicierten, so folgt

$$\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma) \equiv \gamma \equiv 0.$$

Man bemerke überdies, dass die Bedingung $\gamma \equiv 0$ für unsere Zwecke hinreichend ist, und dass somit alle Operationen

$$(4) \qquad V(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\alpha^{-1}}, \quad (\mathrm{mod.}\ n)$$

der $G_{\mu(n)}$ mit G_n vertauschbar sind.

Um jetzt die Anzahl incongruenter Substitutionen (4) abzuzählen, berücksichtige man, dass α hier nur der einen Bedingung zu genügen hat, gegen n relativ prim zu sein; α ist also auf $\varphi(n)$ Zahlclassen eingeschränkt, während β ganz beliebig bleibt. Indem immer noch ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der Coefficienten von V ohne Änderung der Substitution V selbst vorgenommen werden kann, haben wir in der $G_{\mu(n)}$ im ganzen $\frac{1}{2}n\varphi(n)$ mit G_n vertauschbare Operationen. Daraus ziehen wir einerseits den Schluss, *dass die Operationen* (4) *in der* $G_{\mu(n)}$ *eine Untergruppe* $G_{\frac{1}{2}n\varphi(n)}$ *bilden*, des weiteren aber, *dass es im ganzen* $\mu(n) : \frac{1}{2}n\varphi(n) = \psi(n)$ *gleichberechtigte cyclische* G_n *in der* $G_{\mu(n)}$ *giebt.*

Was nun die Structur dieser $G_{\frac{1}{2}n\varphi(n)}$ anlangt) die wir übrigens wieder als halbmetacyclische Untergruppen bezeichnen werden) so bemerkt man innerhalb derselben ausser der G_n leicht n gleichberechtigte $G_{\frac{1}{2}\varphi(n)}$, welche die Verallgemeinerung der cyclischen $G_{\frac{q-1}{2}}$ darstellen (übrigens aber keineswegs in allen Fällen cyclische Structur zeigen). Alle Operationen (4) mit einem von ± 1 verschiedenen α gehören in die eine oder andere dieser $G_{\frac{1}{2}\varphi(n)}$, so dass also jedenfalls nur die *eine* G_n in der $G_{\frac{1}{2}n\varphi(n)}$ enthalten ist, deren Operationen durch $\alpha = 1$ charakterisiert sind. Wollen wir daraus noch den Schluss ziehen: *Es giebt in der*

$G_{\mu(n)}$ *im ganzen* $\psi(n)$ *gleichberechtigte halbmetacyclische Untergruppen* $G_{\frac{1}{2}n\varphi(n)}$ *der Ordnung* $\frac{1}{2}n\varphi(n)$.

§ 5. Zerlegung der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in $\frac{q-1}{2}$ Polygonkränze*).

Zur Primzahlstufe q zurückkehrend können wir uns jetzt an der Hand der halbmetacyclischen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ über die Gestalt der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ einen sehr bequemen Überblick verschaffen. Auf dieser Fläche liegen im ganzen $\frac{q^2-1}{2}$ Punkte c, jeder im Kreise umlagert von q Doppeldreiecken, die zusammengenommen ein Polygon von q Seiten bilden. Diese $\frac{q^2-1}{2}$ Polygone überdecken unsere Fläche gerade einfach und vollständig; es ist dies ein erstes, verhältnismässig einfaches Bild, das wir uns von der Fläche machen wollen. Um einen einzelnen unter diesen Punkten c zu charakterisieren, gehen wir auf die q incongruenten Substitutionen zurück, welche zu den ihn umgebenden Doppeldreiecken gehören. Ist eine unter denselben $V \equiv \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, so sind sie alle durch $VS^\nu \equiv \begin{pmatrix}\alpha, & \beta+\nu\alpha\\ \gamma, & \delta+\nu\gamma\end{pmatrix}$ dargestellt, wo ν ein Restsystem mod. q durchlaufen soll. Da kann man also den einzelnen Punkt c etwa durch Angabe des Zahlenpaares α, γ charakterisieren, das den ersten und dritten Coefficienten in den bezüglichen Substitutionen VS^ν abgiebt; wir werden geradezu vom Punkte (α, γ) sprechen und gewinnen solchergestalt alle Punkte c, indem wir α und γ ein System mod. q incongruenter Paare nicht zugleich durch q teilbarer Zahlen durchlaufen lassen und dabei immer (α, γ) und $(-\alpha, -\gamma)$ als nicht verschieden ansehen.

Nun haben wir schon oben (p. 437) gesehen, dass die einzelne G_q $\frac{q-1}{2}$ Fixpunkte c besitzt. Dieselben sollen jetzt des näheren für die aus S entspringende G_q angegeben werden. Durch Ausübung der Substitution S geht das Doppeldreieck $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}\alpha+\gamma, & \beta+\delta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ und also der Punkt (α, γ) in $(\alpha+\gamma, \gamma)$ über. Soll also (α, γ) Fixpunkt von G_q sein, so muss $\gamma \equiv 0$, (mod. q) sein, was in der That gerade $\frac{q-1}{2}$ Punkte c giebt: *Die Fixpunkte der aus* S *entspringenden* G_q *sind die folgenden Punkte* c:

(1) $$(1, 0),\ (2, 0),\ \cdots,\ \left(\tfrac{q-1}{2}, 0\right).$$

*) Vgl. das p. 438 in der Note gegebene Citat.

Die q Doppeldreiecke, welche den einzelnen Punkt c umgeben, denken wir uns jetzt, wie sie auf einander folgen, numeriert, und zwar soll, wofern V die Nummer 1 hat, VS die 2, VS^2 die 3 etc. bekommen. Wenn wir also z. B. am Punkte $(\alpha, 0)$ das Dreieck $\begin{pmatrix}\alpha, & 0\\ 0, & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$ als erstes rechnen, so wird $\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha\\ 0, & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$ zweites, allgemein $\begin{pmatrix}\alpha, & (\nu-1)\alpha\\ 0, & \alpha^{-1}\end{pmatrix}$ das ν^{te} werden. Jetzt transformiert S das Dreieck

$$\begin{pmatrix}\alpha, & 0\\ 0, & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix}\alpha, & \alpha^{-1}\\ 0, & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha, & \alpha^{-2}\cdot\alpha\\ 0, & \alpha^{-1}\end{pmatrix};$$

d. h. das erste Dreieck wird durch S in das $(\alpha^{-2}+1)^{te}$ übergeführt. Für die $\frac{q-1}{2}$ Punkte (1) durchläuft aber α^{-2} gerade die $\frac{q-1}{2}$ quadratischen Reste von q. Wenn also hier der Ausdruck gestattet ist, Substitution S bedeute eine „Drehung" jedesmal der q Doppeldreiecke um den einzelnen Fixpunkt c*), *so wird die Geschwindigkeit dieser Drehung für keine zwei unter den* $\frac{q-1}{2}$ *Fixpunkten* (1) *die nämliche sein.* Setzen wir vielmehr als Masseinheit die beim Punkte (1, 0) stattfindende Geschwindigkeit an, so werden die Geschwindigkeiten bei den $\frac{q-1}{2}$ Punkten (1) gerade durch die $\frac{q-1}{2}$ ganzen Zahlen gemessen sein, *welche die incongruenten quadratischen Reste der Primzahl q darstellen.*

Gehen wir nun von den q Doppeldreiecken $VS^\nu \equiv \begin{pmatrix}\alpha, & \beta+\nu\alpha\\ \gamma, & \delta+\nu\gamma\end{pmatrix}$ zu den q nach aussen hin benachbarten Dreiecken $VS^\nu T \equiv \begin{pmatrix}\beta+\nu\alpha, & -\alpha\\ \delta+\nu\gamma, & -\gamma\end{pmatrix}$, so werden keine zwei derselben ihre Ecke c gemeinsam haben. Wir kommen vielmehr solchergestalt zu q neuen Punkten $(\beta+\nu\alpha, \delta+\nu\gamma)$, welche ersichtlich mit ihren aus je q Doppeldreiecken bestehenden Polygonen das innere Polygon um (α, γ) rings umschliessen. In Fig. 90 (p. 464) ist solches für den Specialfall $q = 7$ dargestellt, vermöge dessen man sich leicht auch im allgemeinen Fall die Verhältnisse veranschaulicht. Wollen wir den Kranz der $(q+1)$ Polygone, der sich solchergestalt um den Punkt (α, γ) symmetrisch anordnet, kurz als einen *Polygon-*

*) Man vergesse hier nicht, dass eine der Transformationen unserer Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in sich bei höherem Geschlechte p sich nicht durch continuierliche Verschiebung der Fläche in sich bewerkstelligen lässt; das Wort „Drehung" wird also im Texte nur in übertragenem Sinne gebraucht.

kranz bezeichnen und insbesondere die um die $\frac{q-1}{2}$ Punkte (1) gelegenen Polygonkränze dieser Art in Rücksicht ziehen. Um das Polygon mit dem Mittelpunkt $(\alpha, 0)$ lagern sich rings die q Polygone mit den

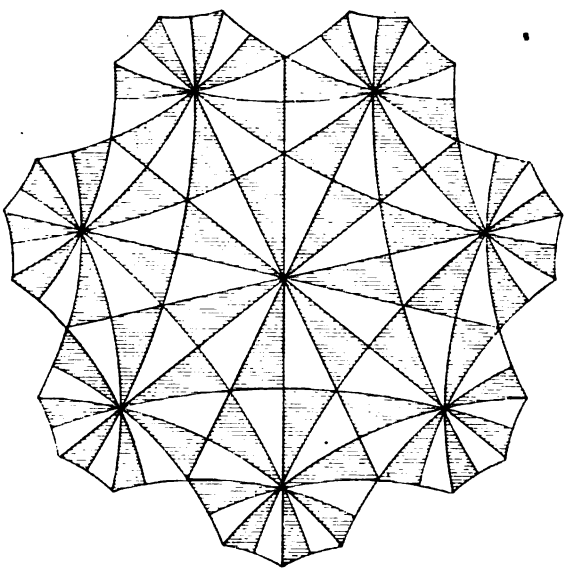


Fig. 90.

Mittelpunkten $(0, \alpha^{-1})$, $(1, \alpha^{-1})$, $\cdots$, $(q-1, \alpha^{-1})$. Man sieht also: Zu den $\frac{q-1}{2}$ unter (1) genannten Punkten c gehören ebensoviele Polygonkränze, *von denen keine zwei ein Polygon gemeinsam haben.* Da es aber nicht mehr als $\frac{q^2-1}{2}$ Polygone zu je q Doppeldreiecken giebt, so werden jene $\frac{q-1}{2}$ Polygonkränze gerade alle $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Doppeldreiecke der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ erschöpfen. *Wir können demgemäss den* $(q+1)$ *gleichberechtigten* G_q *entsprechend die ganze Dreiecksteilung der Fläche* $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *auf* $(q+1)$ *verschiedene Arten aus* $\frac{q-1}{2}$ *Polygonkränzen in bezeichneter Weise aufbauen.*

Gedenken wir endlich noch der cyclischen $G_{\frac{q-1}{2}}$, die in der zur betrachteten G_q gehörenden $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthalten sind. Die Operation $V(\omega) = \frac{a\omega + \beta}{a^{-1}}$ (unter a eine Primitivwurzel von q verstanden) transformiert zufolge leichter Rechnung den Punkt $(\alpha, 0)$ in $(a\alpha, 0)$. Wir

schliessen sofort: *Bei Ausführung der Operationen einer der q hier in Betracht kommenden $G_{\frac{q-1}{2}}$ permutieren sich die $\frac{q-1}{2}$ Punkte* (1) *unter einander und zwar cyclisch.* Eine sehr anschauliche geometrische Deutung dieses Satzes gewinnen wir baldigst, nachdem wir noch näher die Beziehung der $\frac{q(q+1)}{2}$ gleichberechtigten $G_{\frac{q-1}{2}}$ zu den $\frac{d \cdot q(q+1)}{2}$ Symmetrielinien der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ der Discussion unterworfen haben, was im übernächsten Paragraphen geschehen soll.

Man veranschauliche sich die besprochenen geometrischen Verhältnisse insbesondere in den Specialfällen $q = 5, 7$. Für den ersteren ist Fig. 30, p. 105 oder auch deren stereographische Projection auf die Kugeloberfläche Fig. 31, p. 106 heranzuziehen, wo man nun in der That mühelos den ganzen Complex der sechzig Doppeldreiecke in zwei Polygonkränze unserer Art zerlegt (und zwar auf sechs verschiedene Weisen). Für den Fall $q = 7$ ist bereits soeben in Fig. 90 ein einzelner Polygonkranz mitgeteilt; aus drei solchen wird sich die ganze Fläche F_{168} aufbauen.

§ 6. Die in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen Untergruppen vom Diedertypus.

Indem wir jetzt zu den übrigen cyclischen Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ vorgehen, zeigt sich auch an dieser Stelle die völlige Analogie der $G_{\frac{q-1}{2}}$ mit den $G_{\frac{q+1}{2}}$. Wir können diese zweierlei Gruppen geradezu zusammenfassend als die $\frac{q(q \mp 1)}{2}$ gleichberechtigten $G_{\frac{q \pm 1}{2}}$ bezeichnen und wollen dann unsere folgenden Überlegungen sowohl auf das obere, wie das untere Zeichen einzeln beziehen.

Da die einzelne $G_{\frac{q \pm 1}{2}}$ eine unter $\frac{q(q \mp 1)}{2}$ gleichberechtigten Untergruppen ist, so wird sie insgesamt mit

$$\frac{q(q^2-1)}{2} : \frac{q(q \mp 1)}{2} = q \pm 1$$

Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ vertauschbar sein, die alsdann eine $G_{q \pm 1}$ bilden. Aus § 4 des vorigen Kapitels (p. 428 u. f.) kennen wir als Beispiel einer G_{q-1} diejenige der Operationen:

$$(1) \qquad v^\nu(\omega) \equiv \frac{a^\nu \omega}{a^{-\nu}}, \quad v_2 v^\nu(\omega) \equiv \frac{-a^{-\nu}}{a^\nu \omega}, \ (\mathrm{mod.}\ q),$$

während wir entsprechend das Beispiel einer G_{q+1} unter imaginärer Gestalt angeben (cf. p. 432 u. f.):

$$(2) \qquad w^\nu(\xi) \equiv \frac{j^\nu \xi}{j^{-\nu}}, \quad w_2 w^\nu(\xi) \equiv \frac{\mathsf{B} j^\nu}{\mathsf{B} j^{-\nu} \cdot \xi}, \ (\mathrm{mod.}\ q).$$

Erinnern wir daneben an die auch im vorigen Kapitel schon benutzten Congruenzen:

$$(3) \qquad v_2 v^\nu v_2 \equiv v^{-\nu}, \quad w_2 w^\nu w_2 \equiv w^{-\nu}, \ (\mathrm{mod.}\ q).$$

Die einzelne der so gewonnenen Untergruppen $G_{q\pm1}$ enthält, wie man sieht, neben einer cyclischen $G_{\frac{q\pm1}{2}}$ nur noch $\frac{q\pm1}{2}$ Operationen der Periode zwei. Das ist aber gerade der Typus der Diedergruppen (cf. „Ikos." p. 10 u. f.); wir werden also sagen: *Es giebt in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ $\frac{q(q+1)}{2}$ *gleichberechtigte Diedergruppen* G_{q-1}, *sowie* $\frac{q(q-1)}{2}$ *ebensolche Gruppen* G_{q+1}.

Von den Zahlen $\frac{q\pm1}{2}$ ist die eine gerade, die andere ungerade, und dementsprechend ist die gegenseitige Stellung der Operationen der Periode zwei in der Diedergruppe G_{q-1} eine ganz andere als in der G_{q+1}. In der $G_{q\pm1}$ mit ungeradem $\frac{q\pm1}{2}$ giebt es überhaupt nur $\frac{q\pm1}{2}$ Operationen der Periode zwei, die sicher innerhalb der Gesamtgruppe, aber auch schon innerhalb der Diedergruppe $G_{q\pm1}$ gleichberechtigt sind. In der $G_{q\pm1}$ mit geradem $\frac{q\pm1}{2}$ ist zuvörderst eine innerhalb eben dieser $G_{q\pm1}$ ausgezeichnete Operation der Periode zwei enthalten, die von der cyclischen $G_{\frac{q\pm1}{2}}$ geliefert wird; des weiteren aber finden sich noch zwei Systeme von je $\frac{q\pm1}{4}$ gleichberechtigten Operationen der Periode zwei, welche beide wohl innerhalb der Gesamtgruppe, aber keineswegs innerhalb der $G_{q\pm1}$ gleichberechtigt sind. Es sind das sehr bekannte Sätze über die Structur der Diedergruppe. Da sie indessen an vorhin citierter Stelle („Ikos." p. 10 u. f.) geometrisch auf Grund der diedrischen Kugelteilung abgeleitet sind, so mag es gestattet sein, hier noch einen abstracten Beweis derselben einzuschalten.

Aus (3) folgt sofort $v^{-\nu} v_2 v^\nu \equiv v_2 v^{2\nu}$. Ist nun $\frac{q-1}{2}$ ungerade, so durchläuft 2ν mit ν ein Restsystem mod. $\frac{q-1}{2}$, und es wird v_2 demnach vermöge der $\frac{q-1}{2}$ Operationen v^ν gerade in sämtliche Operationen $v_2 v^\nu$

transformiert. Ist andrerseits $\frac{q-1}{2}$ gerade, so wird die Operation der Periode zwei $v^{\frac{q-1}{4}}$ durch alle $(q-1)$ Operationen (1), wie wir ja schon von früher her (p. 430) wissen, in sich transformiert. Die beiden Reihen zu je $\frac{q-1}{4}$ gleichberechtigten Operationen sind dann:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &v_2\ ,\ v_2v^2,\ v_2v^4,\ \cdots,\ v_2v^{\frac{q-5}{2}},\\ &v_2v,\ v_2v^3,\ v_2v^5,\ \cdots,\ v_2v^{\frac{q-3}{2}}. \end{aligned}$$

Da ist es nun nicht möglich, dass v_2v^ν innerhalb der G_{q-1} mit mehr als $\frac{q-1}{4}$ Operationen gleichberechtigt ist, weil sie in der That mit den vier eine G_4 bildenden Operationen

$$(5)\qquad 1,\ v^{\frac{q-1}{4}},\ v_2v^\nu,\ v_2v^\nu v^{\frac{q-1}{4}}$$

vertauschbar ist*). —

Die beschriebenen Verhältnisse haben nun ihre wichtigen Folgen, falls wir jetzt auch auf die Untergruppen Bezug nehmen wollen, die sich in der einzelnen Diedergruppe $G_{q\pm1}$ vorfinden mögen. Verstehen wir unter τ irgend einen Teiler von $\frac{q\pm1}{2}$, der indessen jetzt der Beschränkung $\tau < \frac{q\pm1}{4}$ unterliegen soll**), so giebt es in der einzelnen cyclischen $G_{\frac{q\pm1}{2}}$, wie wir wissen, eine cyclische $G_{\frac{q\pm1}{2\tau}}$, die ausgezeichnet in der bezüglichen Diedergruppe $G_{q\pm1}$ enthalten ist. $G_{\frac{q\pm1}{2\tau}}$ wird also insbesondere mit der einzelnen Operation der Periode zwei v_2v^ν (bez. w_2w^ν) vertauschbar sein und giebt demnach, mit ihr combiniert, eine $G_{\frac{q\pm1}{\tau}}$, welche man sofort wieder als Diedergruppe erkennt. In der G_{q-1} der Operationen (1) finden sich dergestalt im ganzen τ Gruppen $G_{\frac{q-1}{\tau}}$ dieser Art mit den Substitutionen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &v^\tau,\ v^{2\tau},\ v^{3\tau},\ \cdots,\ v^{\frac{q-1}{2\tau}\cdot\tau} = 1,\\ &v_2v^{\mu+\tau},\ v_2v^{\mu+2\tau},\ v_2v^{\mu+3\tau},\ \cdots,\ v_2v^{\mu+\frac{q-1}{2\tau}\cdot\tau} = v_2v^\mu, \end{aligned}$$

*) Wir brauchen kaum zu betonen, dass sich für die Operationen w die Entwicklung genau so gestaltet.

**) Der für das eine der beiden Zeichen eintretende Teiler $\tau = \frac{q\pm1}{4}$ verlangt besondere Untersuchung, die in § 8 folgt.

wobei μ eine Zahl aus der Reihe $\mu = 1, 2, \cdots, \tau$ sein soll. Wir wollen hier sogleich entscheiden, ob diese τ Gruppen $G_{\frac{q-1}{\tau}}$ in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ gleichberechtigt sind oder nicht. Sollen wir eine derselben in eine andere transformieren, so wird dabei offenbar die cyclische $G_{\frac{q-1}{2\tau}}$ der in der ersten Reihe (6) stehenden Operationen in sich übergehen müssen; dann dürfen wir aber nur die Operationen (1) zur Transformation anwenden, denn diese allein sind mit jener $G_{\frac{q-1}{2\tau}}$ vertauschbar. Zwei unserer τ Gruppen $G_{\frac{q-1}{\tau}}$, die innerhalb der Gesamtheit gleichberechtigt sind, sind dies daher auch schon innerhalb der G_{q-1}. Hier ist nun sogleich offenbar: Ist τ eine ungerade Zahl, so gehören die Operationen der zweiten Reihe (6) zur Hälfte in die erste, zur Hälfte in die zweite Reihe (4); da sind also alle τ $G_{\frac{q-1}{\tau}}$ in einander transformierbar. Ist dagegen τ gerade, so sind die Operationen der zweiten Reihe (6) entweder nur in der ersten oder nur in der zweiten Reihe (4) enthalten; dann also haben wir zwei unter einander nicht gleichberechtigte Systeme von je $\frac{\tau}{2}$ gleichberechtigten $G_{\frac{q-1}{\tau}}$.

Indem wir sofort überblicken, dass für die Operationen w genau entsprechende Überlegungen stattfinden, ziehen wir sogleich die gesamten $\frac{q(q\mp1)}{2}$ $G_{q\pm1}$ in Betracht. Offenbar haben wir das Resultat namhaft zu machen: *Für jeden ungeraden Teiler* $\tau < \frac{q\pm1}{4}$ *von* $\frac{q\pm1}{2}$ *giebt es in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *im ganzen* $\frac{\tau\cdot q(q\mp1)}{2}$ *gleichberechtigte Untergruppen* $G_{\frac{q\pm1}{\tau}}$ *vom Diedertypus; für jeden geraden Teiler* $\tau < \frac{q\pm1}{4}$ *von* $\frac{q\pm1}{2}$ *haben wir indes zwei Systeme von je* $\frac{\tau q(q\mp1)}{4}$ *gleichberechtigten Diedergruppen* $G_{\frac{q\pm1}{\tau}}$, *welche beide aber unter einander nicht gleichberechtigt sind.*

§ 7. Zusammensetzung der Polygonkränze zur Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

An die soeben gewonnenen Diedergruppen G_{q-1} schliessen wir jetzt einige geometrische Entwicklungen, welche uns insonderheit ein

sehr übersichtliches Bild der Fläche $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ liefern werden. Es zeigte sich seiner Zeit, dass die Spiegelung A gerade nur mit den $(q-1)$ unter (1) p. 466 stehenden Operationen erster Art vertauschbar war. Die $\frac{q(q+1)}{2}$ in der erweiterten $G_{q(q^2-1)}$ vorgefundenen Spiegelungen sind solcherweise den $\frac{q(q+1)}{2}$ gleichberechtigten Diedergruppen G_{q-1} eindeutig zugeordnet, was wir nun geometrisch in übersichtlichster Weise durch Rückgang auf die $\frac{d \cdot q(q+1)}{2}$ Symmetrielinien der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ deuten.

Wir verfolgen hier, der Kürze wegen, nur den einfachsten Fall $d=1$, für welchen die $\frac{q(q+1)}{2}$ Symmetrielinien in dem Sinne eindeutig den $\frac{q(q+1)}{2}$ G_{q-1} zugewiesen sind, *dass die einzelne Symmetrielinie durch die* $(q-1)$ *Operationen der bezüglichen* G_{q-1} *und durch keine weiteren in sich übergeführt wird.* Dabei tritt denn der Diedertypus der G_{q-1} aufs deutlichste zu Tage: Den Substitutionen der in der G_{q-1} enthaltenen cyclischen $G_{\frac{q-1}{2}}$ entsprechen solche Transformationen der Symmetrielinie in sich, welche, die Symmetrielinie für sich betrachtet, durch continuierliche Verschiebungen derselben in sich bewerkstelligt werden können (cf. Fig. 89, p. 377). Den $\frac{q-1}{2}$ Operationen der Periode zwei aber kommen solche Transformationen der Symmetrielinie in sich zu, welche wir im entsprechenden Sinne als Umklappungen derselben jedesmal um zwei auf ihr diametral gelegene Punkte a bezeichnen werden. Auch für den Umstand, dass bei geradem $\frac{q-1}{2}$ die gemeinten Operationen der Periode zwei in zwei verschiedene, nicht gleichberechtigte Classen zerfallen, wird man aufs leichteste durch blossen Anblick der soeben genannten Figur die geometrische Interpretation auffinden.

Auf Grund der inzwischen für die cyclischen $G_{\frac{q-1}{2}}$ gewonnenen Resultate können wir jetzt die geometrischen Betrachtungen des vorletzten Paragraphen in wichtiger Weise ergänzen. Dort zerlegten wir der einzelnen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ entsprechend die ganze Fläche $F_{\frac{q(q-1)}{2}}$ in $\frac{q-1}{2}$ Polygonkränze, welche für die damals besonders betrachtete $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ die Mittelpunkte $(\alpha, 0)$ hatten. Indem wir an dieser Gruppe $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$

der Operationen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\delta}$ auch hier noch festhalten, sind es nun gerade die q durch den Mittelpunkt (1, 0) des ersten Polygonkranzes ziehenden Symmetrielinien, welche den q in der $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ enthaltenen cyclischen Untergruppen $G_{\frac{q-1}{2}}$ in soeben bezeichnetem Sinne zugewiesen sind; in der That sahen wir schon oben (p. 449), dass zu der das Ausgangs-Doppeldreieck halbierenden Symmetrielinie die $G_{\frac{q-1}{2}}$ der Operationen $v^\nu(\omega) = \frac{a^\nu \omega}{a^{-\nu}}$ gehört. Erinnern wir uns ferner noch, dass durch die Operationen der in der $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ enthaltenen Gruppen $G_{\frac{q-1}{2}}$ die $\frac{q-1}{2}$ Mittelpunkte $(\alpha, 0)$ der Polygonkränze unter einander cyclisch permutiert wurden, so entspringt unter Rücksichtnahme auf die inzwischen erkannte geometrische Bedeutung der $G_{\frac{q-1}{2}}$ nachfolgender Satz: *Die q hier in Rede stehenden Symmetrielinien haben nicht nur in* $(1, 0)$ *einen ihnen allen gemeinsamen Schnittpunkt, sondern sie ziehen alle auch durch* $(2, 0), (3, 0), \cdots, \left(\frac{q-1}{2}, 0\right)$, *während über diese* $\frac{q-1}{2}$ *allen gemeinsamen Schnittpunkte hinaus keine zwei derselben sich sonst noch treffen.*

Umgekehrt aber folgern wir hieraus: *Längs der einzelnen dieser Symmetrielinien erscheinen die* $\frac{q-1}{2}$ *Polygonkränze, welche wir im vorletzten Paragraphen um die Mittelpunkte* $(\alpha, 0)$ *anordneten, gleichsam wie* $\frac{q-1}{2}$ *auf eine geschlossene Kette gereihte Glieder.* Wir gewinnen auf diese Weise eine sehr lebendige Vorstellung von der Gestalt der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, zumal wenn wir die Entwicklungen von p. 463 u. f. hinzunehmen, und man versäume nicht, auch hier wiederum die für die Specialfälle $q = 5, 7$ früher mitgeteilten Figuren zur besonderen Veranschaulichung des gerade gewonnenen Satzes zu verwerten. Da sich übrigens im allgemeinen Falle die $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ auf $(q+1)$ verschiedene Weisen in je $\frac{q-1}{2}$ Polygonkränze spalten lässt, und andererseits durch den einzelnen Mittelpunkt (α, γ) im ganzen q Symmetrielinien hindurchziehen, so wird sich die gekennzeichnete Anordnung der $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in eine Kette von Polygonkränzen im ganzen auf $q(q+1)$ verschiedene Weisen bewerkstelligen lassen. Die einzelne der $\frac{q(q+1)}{2}$ Symmetrie-

linien wird also immer bei zwei verschiedenen unter diesen $q(q+1)$ Anordnungen zur Verwendung kommen. In der That liegen ja auch auf der einzelnen Symmetrielinie $(q-1)$ Punkte c, von denen die Hälfte bei der einen, die andere Hälfte bei der anderen für diese Symmetrielinie in Betracht kommenden Anordnung die Mittelpunkte der Polygonkränze liefert.

§ 8. Die in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen Vierergruppen.

Unter den beiden Zahlen $(q \pm 1)$ ist $q - \left(\frac{-1}{q}\right)$ die durch 4 teilbare, und also haben wir innerhalb der Diedergruppen $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ eine ausgezeichnete Substitution der Periode zwei, die wir jetzt kurz V_2 nennen, sowie zwei Systeme von je $\frac{1}{4}\left[q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ gleichberechtigten Substitutionen der Periode zwei. Ist V_2' irgend eine der letzteren Substitutionen*), so sind V_2 und V_2' mit einander vertauschbar und also ist V_2V_2' wieder eine Substitution der Periode zwei, V_2'', die sich natürlich gleichfalls in der gerade vorliegenden $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ vorfindet. Infolge der Congruenz $V_2V_2' \equiv V_2''$, (mod. q) bemerkt man aufs leichteste, dass die vier Operationen

$$(1) \qquad 1,\ V_2,\ V_2',\ V_2''$$

für sich eine Untergruppe G_4 der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ bilden, die ersichtlich den *Vierertypus* besitzt**). Auf der anderen Seite kann V_2 jedenfalls nur mit einer solchen Operation der Periode zwei eine Vierergruppe erzeugen, mit der sie vertauschbar ist; das sind nun aber, wie wir schon aus vorigem Kapitel wissen, gerade nur die in der $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ enthaltenen Substitutionen der Periode zwei, und wir werden also auf dem bezeichneten Wege zur Kenntnis *aller* in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen Vierergruppen gelangen.

Beachte man weiter, dass es offenbar innerhalb der einzelnen $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ im ganzen $\frac{1}{4}\left[q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ Vierergruppen giebt, an denen sich V_2 be-

*) Es erscheint zweckmässig, hier die Periode der einzelnen Substitutionen V als unteren Index an V anzuhängen.

**) Cf. „Ikos." p. 12 u. f.

teiligt. Werden dieselben zunächst innerhalb der $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ alle mit einander gleichberechtigt sein oder nicht? Um hier vorerst die Voraussetzung $\left(\frac{-1}{q}\right) = +1$ zu machen, so sind innerhalb der $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ ganz offenbar alle $\frac{1}{4}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ Gruppen G_4 gleichberechtigt, wenn V_2' und V_2'' nicht der nämlichen Horizontalreihe (4) p. 467 angehören; sie zerfallen indessen in zwei Systeme von je $\frac{1}{8}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ gleichberechtigten G_4, wenn V_2', V_2'' entweder beide in der ersten oder beide in der zweiten Horizontalreihe (4) p. 467 stehen. Dieses Resultat kleidet sich nun in überaus einfache Form durch Rückgang auf die beiden Congruenzen:

$$V_2 \equiv v^{\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}}, \quad V_2'' \equiv V_2' v^{\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}}, \text{ (mod. } q).$$

Wir sprechen das Resultat gleich auch für den Fall $\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$ aus (wo wir zur Begründung statt der v die w würden in Betracht ziehen müssen): *Der erste der beiden unterschiedenen Fälle tritt für ungerades* $\frac{1}{4}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ *ein, d. i. für Primzahlen der Form* $q = 8h \pm 3$, *der zweite bei geradem* $\frac{1}{4}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$, *d. i. für Primzahlen der Form* $q = 8h \pm 1$.

Machen wir für den letzteren Fall, einer sogleich zu ziehenden Folgerung wegen, hier noch auf die Diedergruppe G_8 aufmerksam, welche die Substitutionen umfasst:

$$1,\ v^{\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{8}},\ V_2 \equiv v^{\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{4}},\ v^{\frac{3\left(q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right)}{8}},$$

$$V_2',\ V_2' v^{\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{8}},\ V_2' V_2 \equiv V_2'',\ V_2' v^{\frac{3\left(q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right)}{8}}.$$

In dieser G_8 ist die G_4 der Operationen (1) ausgezeichnet enthalten, was man festhalten wolle.

Jetzt sind zwar in der einzelnen $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ im ganzen $\frac{1}{4}\left[q - \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ verschiedene G_4 bezeichneter Art enthalten. Wenn wir aber die gesamten $\frac{1}{2}q\left[q + \left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ gleichberechtigten $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ in Betracht ziehen,

so finden wir keineswegs $\frac{1}{2}q\left[q+\left(\frac{-1}{q}\right)\right]\cdot\frac{1}{4}\left[q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right]=\frac{q(q^2-1)}{8}$ verschiedene G_4, vielmehr im ganzen nur $\frac{q(q^2-1)}{24}$. In der That werden wir ja z. B. zur G_4 der Operationen (1) ein zweites Mal von derjenigen $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ aus geführt, welche V_2' ausgezeichnet enthält, und endlich ein drittes Mal von der $G_{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}$ aus, welche V_2'' in dieser Weise enthält. Dass übrigens diese $\frac{q(q^2-1)}{24}$ G_4 für $q=8h\pm 3$ alle gleichberechtigt sind, ist nach den obigen Entwicklungen sofort offenbar. Nur für den anderen Fall $q=8h\pm 1$ haben wir noch darüber zu entscheiden, ob wir da zwei unterschiedene Systeme von je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ gleichberechtigten G_4 haben, oder ob beide Systeme, in der Gesamtgruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ betrachtet, gleichberechtigt werden. Hier ziehen wir den Gesichtspunkt heran, der sich an gleicher Stelle auch schon bei der speciellen Untersuchung der zu $q=7$ gehörenden G_{168} als nützlich erwies. Wäre der letztgenannte Fall der zutreffende, so wäre die einzelne G_4 als eine unter $\frac{q(q^2-1)}{24}$ gleichberechtigten nur mit den *zwölf* Operationen einer G_{12} vertauschbar; diese G_{12} müsste dann die G_8 der unter (2) stehenden Operationen als Untergruppe in sich enthalten, was widersprechend ist. Nach alledem haben wir das Hauptresultat: *Es giebt in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *der modulo* q *incongruenten Substitutionen* $\frac{q(q^2-1)}{24}$ *Vierergruppen* G_4; *dieselben sind im Falle* $q=8h\pm 3$ *unter einander gleichberechtigt, während sie sich für Primzahlen* $q=8h\pm 1$ *in zwei unter einander nicht gleichberechtigte Systeme von je* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *gleichberechtigten* G_4 *zerlegen.*

Hier noch zwei zusätzliche Bemerkungen über die gewonnenen Vierergruppen.

Erstlich betonen wir nochmals ausdrücklich, dass es in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *ausser den gefundenen* $\frac{q(q^2-1)}{24}$ G_4 *nicht noch weitere Untergruppen* G_4 *vom Vierertypus giebt.* Wir sahen nämlich schon, dass sich die einzelne Substitution der Periode zwei im ganzen an $\frac{1}{4}\left[q-\left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ Vierergruppen beteiligt. Indem wir diese Zahl mit der Anzahl $\frac{1}{2}q\left[q+\left(\frac{-1}{q}\right)\right]$ aller in

$G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen Operationen der Periode zwei multiplicieren, erhalten wir offenbar die dreifache Anzahl aller in $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen Vierergruppen. Die Zahl der letzteren ist demnach wirklich $\frac{q(q^2-1)}{24}$.

Des ferneren wollen wir entscheiden, ob vielleicht die für $q = 8h \pm 1$ eintretenden beiden Systeme von je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ gleichberechtigten G_4, die doch in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ nicht gleichberechtigt waren, dieses vielleicht in der erweiterten $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ sind*). *Sicher wird das für* $q = 8h + 1$ *nicht der Fall sein*; denn da werden uns die Vierergruppen von den Diedergruppen G_{q-1} geliefert, welche den Spiegelungen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ eindeutig zugeordnet waren. Wir werden also für eine vorgelegte G_4 sofort (und zwar noch auf drei Weisen) eine Spiegelung ausfindig machen, welche mit den Operationen der G_4 einzeln und also mit der G_4 selbst vertauschbar ist. Haben wir also in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ bereits

$$24 = \frac{q(q^2-1)}{2} : \frac{q(q^2-1)}{48}$$

mit G_4 vertauschbare Operationen**), so werden wir durch Combination derselben mit der eben gemeinten Spiegelung im ganzen 48 mit der G_4 vertauschbare Operationen der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ gewinnen. Mehr kann es nicht geben, da doch G_4 bereits in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine von $\frac{q(q^2-1)}{48}$ gleichberechtigten Untergruppen ist. *Bezeichnete* 48 *Operationen werden sonach eine erweiterte* $\overline{G}_{48}$ *bilden, und wir sehen, dass die einzelne* G_4 *auch in der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *nur eine unter* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *gleichberechtigten Gruppen ist.*

Demgegenüber zeigt sich, *dass für* $q = 8h - 1$ *beide Systeme von Vierergruppen innerhalb der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *mit einander gleichberechtigt*

*) Die über Erweiterungsfähigkeit durch Operationen zweiter Art, über Gleichberechtigung der Untergruppen innerhalb der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ u. s. w. hier und in den folgenden Paragraphen mitgeteilten Entwicklungen beruhen auf anderweit nicht veröffentlichten Untersuchungen des Herausgebers. Diese Angaben sind hier und in der Folge übrigens immer nur durchaus beiläufig gemacht; in der That sollte ja auch eine erschöpfende Zerlegung der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ hier keineswegs angestrebt werden.

**) Die wir im folgenden Paragraphen sogleich näher untersuchen.

sind. Existierte nämlich auch nun irgend eine Operation $\overline{V}$, die eine vorgelegte G_4 in sich transformiert, so würde aus G_4 und dieser $\overline{V}$ eine G_8 entspringen, deren vier Operationen $\overline{V}$ notwendig Spiegelungen wären. In der That giebt es zufolge des ersten Satzes p. 446, der hier bei $q = 8h - 1$ offenbar Anwendung gestattet, für keine in unserer G_4 enthaltene V_2 eine zugehörige $\sqrt{V_2}$. Mit $\overline{G}_8$ würde dann weiter eine gleichberechtigte $\overline{G}_8'$ existieren, die insbesondere die Spiegelung A enthielte, und da bemerke man, dass die drei Operationen V_2, V_2', V_2'' dieser $\overline{G}_8'$ durch A entweder einzeln in sich transformiert werden, oder dass dies doch wenigstens von einer unter ihnen gelten muss, während alsdann die beiden anderen durch A permutiert werden. Prüfen wir diese beiden Fälle nach einander. Die mit A vertauschbaren Operationen der Periode zwei sind gegenwärtig diejenigen der Form $\omega' \equiv \frac{-a^\nu}{a^\nu \omega}$. Es müssten demnach im ersteren unserer beiden Fälle

$$V_2(\omega) \equiv \frac{-a^\nu}{a^{-\nu}\omega}, \quad V_2'(\omega) \equiv \frac{-a^{\nu'}}{a^{-\nu'}\omega}, \quad V_2''(\omega) \equiv \frac{-a^{\nu''}}{a^{-\nu''}\omega}$$

die drei Operationen der Periode zwei unserer G_4 sein. Dann aber wäre

$$V_2 V_2'(\omega) \equiv \frac{a^{\nu-\nu'}\omega}{a^{\nu'-\nu}},$$

was gegen $V_2 V_2' \equiv V_2''$ offenbar streitet. Im anderen Falle käme*)

$$V_2(\omega) \equiv \frac{-a^\nu}{a^{-\nu}\omega}, \quad V_2'(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega - \alpha}, \quad V_2''(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega - \beta}{-\gamma\omega - \alpha},$$

$$V_2(\omega) \equiv V_2' V_2''(\omega) \equiv \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)\omega - 2\alpha\beta}{2\alpha\gamma\omega + (\alpha^2 - \beta\gamma)} \equiv \frac{-a^\nu}{a^{-\nu}\omega}.$$

Hier müssten also die drei Zahlen α, β, γ zugleich den beiden Bedingungen $\alpha^2 + \beta\gamma \equiv -1$, $\alpha^2 - \beta\gamma \equiv 0$ genügen, was ersichtlich

$$(2\alpha)^2 \equiv -2, \ (\text{mod. } q)$$

zur Folge hat. Letztere Congruenz ist indessen nicht möglich, da (-2) Nichtrest jeder Primzahl der Form $q = 8h - 1$ ist. *G_4 ist sonach auch in der Gesamtgruppe $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ nur mit 24 Operationen (erster Art) vertauschbar und also innerhalb der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ eine von $\frac{q(q^2-1)}{24}$ gleichberechtigten G_4*, wie wir das ja zeigen wollten.

*) Wir fanden schon p. 436, dass die Operationen der Periode zwei $\alpha + \delta \equiv 0$ haben.

§ 9. Die Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ vom Tetraeder- und Oktaedertypus.

Für Primzahlstufen q der Form $q = 8h \pm 3$ ist die einzelne Vierergruppe G_4 eine unter $\frac{q(q^2-1)}{24}$ gleichberechtigten Gruppen; sie ist demnach vertauschbar mit zwölf Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, die innerhalb derselben eine G_{12} bilden. Für Primzahlstufen q der Form $q = 8h \pm 1$ ist die einzelne G_4 eine unter $\frac{q(q^2-1)}{24}$ gleichberechtigten Untergruppen; sie ist also vertauschbar mit 24 Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, die eine G_{24} bilden. Wir behaupten: *Jene G_{12} besitzt den Tetraeder-, diese G_{24} den Oktaedertypus.*

Seien nämlich wieder $1, V_2, V_2', V_2''$ die Operationen der G_4, so wird, wenn wir es etwa vorerst mit einer G_{12} zu thun haben, selbige bekanntlich wenigstens eine Untergruppe G_3 besitzen, welche aus der Operation V_3 der Periode drei entspringen möge. Transformieren wir G_4 vermöge dieser V_3, so werden dabei die Substitutionen V_2, V_2', V_2'' entweder einzeln in sich transformiert, oder diese drei Operationen permutieren sich cyclisch. Von diesen beiden Möglichkeiten trifft nun die letztere zu*); freilich wird V_2, im Falle $q - \left(\frac{-1}{q}\right)$ auch durch 3 teilbar ist, durch diejenigen beiden Operationen der Periode drei in sich transformiert, welche mit V_2 derselben cyclischen $G_{\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{2}}$ angehören; aber diese Operationen werden dann jedenfalls nicht auch noch V_2' und V_2'' in sich transformieren, wie man aus den früheren, die $G_{\frac{q-\left(\frac{-1}{q}\right)}{2}}$ betreffenden Sätzen leicht schliesst. Wir setzen demnach an:

$$(1) \qquad V_3^{-1} V_2 V_3 = V_2', \quad V_3^{-1} V_2' V_3 = V_2'', \quad V_3^{-1} V_2'' V_3 = V_2.$$

Mit V_3 und V_2 wird nun auch $V_3 V_2$ der G_{12} angehören, und zwar ist diese Operation $V_3 V_2$ von der Periode drei. Wir können nämlich schreiben $(V_3 V_2)^3 = V_3 V_2 V_3^{-1} \cdot V_3^{-1} V_2 V_3 \cdot V_2$, was auf Grund von (1)

*) Der ersteren hier nicht in Betracht kommenden Möglichkeit entspricht, allgemein zu reden, eine G_{12} mit drei gleichberechtigten cyclischen G_6 und einer ausgezeichneten cyclischen G_3, die den G_6 gemeinsam ist. Ausser dieser G_{12} und der Tetraedergruppe giebt es keine andere G_{12} mit ausgezeichnet in ihr enthaltener Vierergruppe.

soviel wie $V_2'' V_2' V_2$ d. h. die Identität ist. V_3 und V_2 sind also zwei Operationen, die den Bedingungen genügen:

$$V_3^3 \equiv 1, \quad V_2^2 \equiv 1, \quad (V_3 V_2)^3 \equiv 1, \text{ (mod. } q);$$

unsere G_{12}, die aus V_3 und V_2 erzeugt wird, ist sonach zufolge des Dyck'schen Satzes eine Tetraedergruppe.

Haben wir zweitens im Falle $q = 8h \pm 1$ mit einer G_{24} zu thun, so schliessen wir zuvörderst genau so, wie oben. Die G_{24} wird eine G_3 besitzen und hat demnach eine G_{12} vom Tetraedertypus als Untergruppe in sich. Hierüber hinaus fanden wir schon im vorigen Paragraphen, dass die G_4 mit den Operationen einer Diedergruppe G_8 vertauschbar ist, die wir nun:

$$\begin{array}{llll} 1, & V_4, & V_4^2 \equiv V_2, & V_4^{-1}, \\ V_2', & V_4 V_2', & V_2 V_2', & V_4^{-1} V_2' \end{array}$$

schreiben wollen. Solcher Diedergruppen giebt es den drei Operationen V_2, V_2', V_2'' entsprechend im ganzen drei, und sie liefern die zwölf Operationen, welche die G_{24} noch ausser denen der G_{12} enthält. Das sind denn ersichtlich sechs Operationen der Periode vier $V_4^{\pm 1}$, $V_4'^{\pm 1}$, $V_4''^{\pm 1}$, sowie sechs neue Operationen der Periode zwei $V_4 V_2'$, $V_4^{-1} V_2' \equiv V_4 V_2''$, u. s. w.; man zeigt nämlich mühelos, dass irgend zwei der drei in Rede stehenden G_8 ausser den V_2, V_2', V_2'' keine Operationen der Periode zwei gemeinsam haben können.

Dieses ist nun alles in Übereinstimmung mit bekannten Verhältnissen der Oktaedergruppe. Dass unsere G_{24} aber wirklich den Oktaedertypus besitzt, zeigen wir wieder auf Grund des Dyck'schen Satzes. In der G_{24} finden sich acht Substitutionen der Periode drei, die ja schon in der G_{12} enthalten sind. Combinieren wir dieselben mit der einzelnen Operation V_4, so erhalten wir acht verschiedene der G_{24}, aber nicht schon der G_{12} angehörige Operationen; unter denselben müssen sich also wenigstens zwei von der Periode zwei befinden. Sei in diesem Sinne etwa $V_3' V_4 = V_2'''$ dieser Periode angehörig, so haben wir umgekehrt in $V_4 V_2'''$ eine Substitution der Periode drei. Nun sind, wie man aufs leichteste zeigt, V_4 und V_2''' Erzeugende unserer G_{24}; da jene aber den Bedingungen

$$V_4^4 \equiv 1, \quad V_2'''^2 \equiv 1, \quad (V_4 V_2''')^3 \equiv 1, \text{ (mod. } q)$$

genügen, so haben wir in der G_{24} thatsächlich eine Oktaedergruppe.

Jetzt haben wir nur noch auf die bekannte Thatsache zurückzugehen, dass sowohl die Oktaedergruppe, wie auch die Tetraedergruppe nur *eine* Vierergruppe ausgezeichnet enthält, um auf Grund des vorigen Paragraphen sofort das Resultat auszusprechen: *Für Primzahlstufen* q

der Form $q = 8h \pm 3$ *giebt es in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *im ganzen* $\frac{q(q^2-1)}{24}$ *gleichberechtigte Untergruppen* G_{12} *vom Tetraedertypus. Für Primzahlstufen* q *der Form* $q = 8h \pm 1$ *giebt es in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *zwei unter einander nicht gleichberechtigte Systeme von je* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *gleichberechtigten Oktaedergruppen* G_{24}. Da aber in jeder Oktaedergruppe eine Tetraedergruppe ausgezeichnet enthalten ist, so kommt weiter: *Es giebt für* $q = 8h \pm 1$ *in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *zwei Systeme von je* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *Tetraedergruppen* G_{12}. Des weiteren aber zieht man mühelos noch diese Folgerungen aus den bezüglichen Sätzen des vorigen Paragraphen: *Im Falle* $q = 8h + 1$ *sind die* G_{24} *der Erweiterung durch Operationen zweiter Art der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *fähig; wir haben da in letzterer Gruppe zwei Systeme von je* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *gleichberechtigten* $\overline{G}_{48}$, *die beide aber auch innerhalb der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *nicht gleichberechtigt sind. Im Gegensatz dazu werden für* $q = 8h - 1$ *die zweimal* $\frac{q(q^2-1)}{48}$ *Oktaedergruppen* G_{24} *innerhalb der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *alle mit einander gleichberechtigt und lassen dementsprechend eine Erweiterung durch Operationen zweiter Art der* $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ *nicht zu. Diese letzteren Sätze übertragen sich ohne weiteres auch auf die in den* G_{24} *enthaltenen* G_{12}. —

Wenn wir bislang überall von der einzelnen Gruppe auf diejenige Gruppe weiter schlossen, in welcher jene erstere ausgezeichnet enthalten ist, so wolle man jetzt bemerken, dass uns diese Art zu schliessen zur Kenntnis weiterer Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ nicht mehr hinzuführen vermag: Die halbmetacyclischen $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, die Diedergruppen $G_{q\pm1}$, endlich die eben gefundenen Oktaedergruppen G_{24}, resp. die Tetraedergruppen G_{12} (für $q = 8h \pm 3$) sind durchgehends nur noch mit ihren eigenen Substitutionen vertauschbar. Weitere Untergruppen der hiermit aufgezählten Typen kann es nun aber auch in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ nicht mehr geben; denn jede Diedergruppe enthält eine cyclische ausgezeichnet, und letztere haben wir alle zur Aufstellung von Diedergruppen verwertet; eine Oktaedergruppe enthält eine Vierergruppe ausgezeichnet, und wieder sind diese G_4 alle zur Verwendung gekommen u. s. w. Soll es bei dieser Sachlage noch weitere Untergruppen in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ geben, so müssen dieselben von der Art sein,

dass sie keine Untergruppe der bis jetzt vorgekommenen Typen ausgezeichnet enthalten. Solcher Anforderung genügt unter den uns von früher her bekannten Gruppen die Ikosaedergruppe, und wirklich werden wir nun sehen, dass es in gewissen Fällen Untergruppen G_{60} vom Ikosaedertypus in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ giebt.

§ 10. Aufstellung und Abzählung der in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen Untergruppen vom Ikosaedertypus.

Soll die $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine Untergruppe vom Ikosaedertypus enthalten, so muss ihre Ordnung $\frac{q(q^2-1)}{2}$ durch 60 teilbar sein; unsere hier folgenden Entwicklungen gelten also jedenfalls nur für Primzahlen q der Form $q = 10h \pm 1$. In beiden Fällen ergiebt in der That der Dyck'sche Satz die Existenz von Ikosaedergruppen G_{60}. Betrachten wir zuvörderst $q = 10h + 1$, so giebt es in der aus $v(\omega) \equiv \frac{a\omega}{a^{-1}}$ erzeugten $G_{\frac{q-1}{2}}$ vier Operationen der Periode fünf, von denen wir eine durch $V_5(\omega) \equiv \frac{a^\sigma \omega}{a^{-\sigma}}$ bezeichnen wollen. Wir combinieren dieselbe mit der Operation $V_2(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega - \alpha}$ der Periode zwei, die wir so gewählt denken, dass

$$V_5 V_2(\omega) \equiv \frac{a^\sigma \alpha\omega + a^\sigma \beta}{a^{-\sigma}\gamma\omega - a^{-\sigma}\alpha}, \pmod q$$

der Periode drei angehört. Zu dem Zwecke setze man unter Fixierung des Vorzeichens von α, β, γ:

$$\alpha(a^\sigma - a^{-\sigma}) \equiv 1, \quad -\beta\gamma(a^\sigma - a^{-\sigma})^2 \equiv a^{2\sigma} - 1 + a^{-2\sigma}, \pmod q,$$

wobei wir ausdrücklich noch darauf aufmerksam machen, dass die rechte Seite der letzten Congruenz bei der hier vorliegenden Bedeutung von a^σ nicht durch q teilbar sein kann. Die an V_2 gestellte Forderung ergiebt ersichtlich für α einen ganz bestimmten Wert, während das Product $\beta\gamma$ nur gehalten ist, mod. q mit einer gewissen von 0 verschiedenen Zahl congruent zu sein. Demgemäss giebt es $(q-1)$ verschiedene V_2 der geforderten Art, und indem wir berücksichtigen, dass es in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ für gegenwärtigen Fall $2q(q+1)$ Operationen der Periode fünf giebt, merken wir uns als erstes Resultat an: *Es giebt*

für $q = 10h + 1$ *in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *insgesamt* $2q(q^2-1)$ *Paare von Operationen* V_5, V_2, *die der Bedingung:*

$$(1) \qquad V_5^5 \equiv 1, \quad V_2^2 \equiv 1, \quad (V_5 V_2)^3 \equiv 1, \ (\text{mod. } q)$$

genügen.

Genau derselbe Satz gilt nun auch für $q = 10h - 1$. Da werden wir

$$V_5(\xi) \equiv \frac{j^\varkappa \xi}{j^{-\varkappa}}, \qquad V_2(\xi) \equiv \frac{A\xi + B}{\bar{B}\xi - \bar{A}}$$

schreiben müssen und genügen dann der Forderung $(V_5 V_2)^3 \equiv 1$ durch solche Werte von A, B, welche die Bedingungen befriedigen:

$$A(j^\varkappa - j^{-\varkappa}) \equiv 1, \quad B\bar{B} \equiv B^{q+1} \equiv -(A^2+1), \quad (\text{mod. } q).$$

Hier ist wieder A fest bestimmt und, wie man sieht, thatsächlich als „rein imaginäre Zahl", wobei dann auch wieder (A^2+1) infolge der Bedeutung von $j^\varkappa$, als einer zum Exponenten 5 bez. 10 gehörigen Zahl, notwendig relativ prim gegen q ist. Des ferneren hat die Congruenz $B^{q+1} \equiv -(A^2+1)$ im ganzen gerade $(q+1)$ incongruente Wurzeln; genügt derselben nämlich B_0, so thun das Gleiche B_0, $B_0 j$, $B_0 j^2$, $\cdots$, $B_0 j^q$; und es muss überdies jede weitere Wurzel B_0' in $\frac{B_0'}{B_0}$ eine Wurzel der Congruenz $\left(\frac{B_0'}{B_0}\right)^{q+1} \equiv 1$ geben, weshalb B_0' notwendig die Form $B_0 j^\nu$ hat*). Jetzt giebt es somit für die festgewählte Operation V_5 im ganzen $(q+1)$ unserer Forderung genügende Operationen V_2. Da aber im gegenwärtigen Falle $2q(q-1)$ verschiedene V_5 in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthalten sind, *so haben wir wirklich auch für* $q = 10h - 1$ *im ganzen* $2q(q^2-1)$ *der Bedingung* (1) *genügende Substitutionenpaare* V_5, V_2.

Jene $2q(q^2-1)$ Substitutionenpaare erzeugen nun ebenso viele G_{60} vom Ikosaedertypus**), und wir erhalten auf diese Weise sicher

*) Dass aber thatsächlich wenigstens eine Wurzel B_0 eintritt, sieht man so: Man erhebe alle (q^2-1) incongruenten, von Null verschiedenen complexen Zahlen $(m + n\varepsilon)$ auf die $(q+1)^{\text{te}}$ Potenz. Wir erhalten dabei lauter reelle Zahlen, aber keine mehr als $(q+1)$ Mal. Da es aber nur $(q-1)$ incongruente durch q nicht teilbare reelle Zahlen mod. q giebt, so kommt hierbei thatsächlich *jede* der letzteren als $(q+1)^{\text{te}}$ Potenz gewisser complexer Zahlen vor.

**) Man könnte hier vielleicht noch den Nachweis fordern, dass zwischen V_5, V_2 ausser den Relationen (1) nicht noch weitere bestehen. Sollte letzteres der Fall sein, so würde vielleicht nicht die G_{60} selbst, vielmehr nur eine Untergruppe derselben erzeugt werden. Ersichtlich könnte letztere nur von der Ordnung 30 sein, aber eine G_{30} giebt es bekanntlich in der Ikosaedergruppe G_{60} nicht.

die Gesamtheit der in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ enthaltenen Ikosaedergruppen. Aber dieselben sind keineswegs alle von einander verschieden, und um in diesem Betracht die Abzählung der verschiedenen G_{60} unserer Art durchzuführen, müssen wir vorab erst noch untersuchen, aus wieviel solchen ihr angehörigen Paaren V_5, V_2 die einzelne Ikosaedergruppe hergestellt werden kann. Betrachten wir die G_{60} der mod. 5 incongruenten Substitutionen, welche ja den Ikosaedertypus besitzt, so ist z. B.

$$S^{\nu}(\omega) \equiv \omega + \nu, \quad (\text{mod. } 5)$$

mit einem gegen 5 primen ν eine ihrer V_5. Man berechnet aufs leichteste, dass gerade nur die fünf Operationen:

$$V_2(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega - (\alpha^2+1)\nu}{\nu^{-1} - \alpha}, \quad (\text{mod. } 5)$$

mit willkürlich bleibendem α der Bedingung $(V_5 V_2)^3 \equiv 1$ genügen. Da es aber 24 Operationen der Periode fünf in der G_{60} giebt, so lassen sich in letzterer Gruppe im ganzen $24 \cdot 5 = 120$ Paare V_5, V_2 ausfindig machen, die $(V_5 V_2)^3 \equiv 1$ befriedigen. Indem wir also oben jede G_{60} 120 Male herstellten, entspringt als Resultat: *In der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *giebt es, wofern* $q = 10h \pm 1$ *ist, im ganzen* $\frac{q(q^2-1)}{60}$ *Untergruppen* G_{60} *vom Ikosaedertypus.*

Wir werden nun leicht darüber entscheiden, ob diese $\frac{q(q^2-1)}{60}$ Untergruppen G_{60} alle unter einander gleichberechtigt sind oder sich in mehrere Systeme gleichberechtigter G_{60} spalten. Jedenfalls ist die einzelne G_{60} mit $60 \cdot \nu$ Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ vertauschbar, wo ν eine noch nicht näher bekannte *ganze* Zahl ist. Jene G_{60} ist sonach eine unter $\frac{q(q^2-1)}{120 \cdot \nu}$ gleichberechtigten Untergruppen, woraus schon hervorgeht, dass jedenfalls nicht alle $\frac{q(q^2-1)}{60}$ Ikosaedergruppen innerhalb der Gesamtgruppe gleichberechtigt sein können.

Sei jetzt zunächst $q = 8h' \pm 3$, so beachten wir, dass jede G_{60} fünf Tetraedergruppen G_{12} besitzt. Wir gewinnen also in den $\frac{q(q^2-1)}{120 \cdot \nu}$ G_{60} insgesamt $\frac{5q(q^2-1)}{120 \cdot \nu}$ solche G_{12}, und indem sich die einzelne derselben immer an μ verschiedenen G_{60} beteiligt, finden sich insgesamt $\frac{5q(q^2-1)}{120\mu\nu}$ gleichberechtigte G_{12}. Nach § 9 ist aber diese Anzahl mit $\frac{q(q^2-1)}{24}$ identisch, so dass $\mu\nu = 1$ und also $\mu = \nu = 1$ ist. Daher der Satz:

Für $q = 10h \pm 1 = 8h' \pm 3$ *giebt es in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *im ganzen zwei unter einander nicht gleichberechtigte Systeme von je* $\frac{q(q^2-1)}{120}$ *gleichberechtigten Untergruppen* G_{60} *vom Ikosaedertypus; die einzelne Tetraedergruppe* G_{12} *beteiligt sich dabei immer an zwei Untergruppen* G_{60}*, deren eine dem einen, deren andere dem zweiten jener beiden Systeme angehört.*

Im Falle $q = 8h \pm 1$ hatten wir zwei Systeme von je $\frac{q(q^2-1)}{48}$ gleichberechtigten G_{12}. Da folgert man dann, μ und ν in der eben gebrauchten Bedeutung beibehaltend, sofort $\mu\nu = 2$, was die doppelte Möglichkeit $\mu = 2$, $\nu = 1$, bez. $\mu = 1$, $\nu = 2$ giebt. Um bei der Entscheidung hierüber umständlichen Betrachtungen zu entgehen, nehmen wir auf den in § 12 zu erhärtenden Satz Bezug, dass es in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ eine G_{120} oder eine Gruppe noch höherer Ordnung, in der eine unserer G_{60} ausgezeichnet wäre, nicht giebt. Man entnimmt daraus sofort, dass $\mu = 2$, $\nu = 1$ zutrifft, womit sich dann ergiebt: *Auch für* $q = 10h \pm 1 = 8h' \pm 1$ *giebt es zwei unter einander nicht gleichberechtigte Systeme von je* $\frac{q(q^2-1)}{120}$ *gleichberechtigten Untergruppen* G_{60} *des Ikosaedertypus in der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$*; die einzelne* G_{12} *beteiligt sich nun immer an zwei gleichberechtigten* G_{60}*).

Jetzt könnten wir auch noch die Frage behandeln, ob vielleicht die zwei für $q = 10h \pm 1$ gefundenen Systeme der G_{60} innerhalb der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ gleichberechtigt werden oder nicht; für den letzteren Fall würden wir in der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ erweiterte $\overline{G}_{120}$ besitzen, im ersteren jedoch nicht. Nun bemerkt man aber die Existenz solcher $\overline{G}_{120}$ sofort für den Fall $q = 4h' + 1$; da giebt es nämlich eine in der gesamten $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ ausgezeichnete Operation $\overline{V}$ der Periode zwei, die mit irgend einer G_{60} combiniert offenbar eine erweiterte $\overline{G}_{120}$ liefert, und zwar

*) Nebenher erwähnen wir hier noch eine interessante Art, die Operationen einer einzelnen G_{60} auf directem Wege anzugeben. In „Ikos." p. 41 sind die 120 homogenen Ikosaedersubstitutionen in solcher Form aufgestellt, dass die Coefficienten rational aus 5ten Einheitswurzeln bestehen und übrigens eine Determinante 1 geben. Da ersetze man nun die primitive 5te Einheitswurzel ε durch eine zum Exponenten 5 mod. q gehörige ganze Zahl (die übrigens reell oder imaginär ist, je nachdem $q = 10h + 1$ oder $10h - 1$ ist). Gehen wir dann noch zur nicht-homogenen Schreibweise, so haben wir 60 eine Ikosaedergruppe bildende Operationen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ thatsächlich aufgeschrieben. Dieselbe Massnahme lässt sich übrigens auch bei den Tetraeder- und Oktaedergruppen in Anwendung bringen, worüber man alles Nähere bei Hrn. Gierster a. a. O. nachsehen wolle.

eine solche vom Typus der erweiterten Ikosaedergruppe (cf. „Ikos." p. 23). *Für $q=4h'+1$ sind sonach die beiden Systeme der G_{60} auch innerhalb der erweiterten Gruppe $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ nicht gleichberechtigt.* Für $q=4h'-1$ können in der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ jedenfalls keine $\overline{G}_{120}$ vom Typus der bei $q=4h'+1$ gefundenen erweiterten Ikosaedergruppe existieren; denn in einer derartigen $\overline{G}_{120}$ giebt es stets eine ausgezeichnete $\overline{V}$ der Periode zwei (cf. p. 447), und eine mit den 60 Operationen einer G_{60} vertauschbare $\overline{V}$ dieser Periode giebt es in der $\overline{G}_{q(q^2-1)}$ bekanntlich für diesen Fall nicht. Doch ist von vornherein gar nicht ausgeschlossen, dass sich nun vielleicht die einzelne G_{60} zu einer $\overline{G}_{120}$ von anderem Typus erweitern lässt. Da wir inzwischen zur erschöpfenden Beantwortung der in Rede stehenden Frage wenigstens bei $q=8h'+3$ noch etwas weiter ausholen müssten, so mag hier die vorläufige Angabe genügen, dass jedenfalls in dem späterhin zumeist interessierenden Falle $q=11$ die hier eintretenden beiden Systeme von je 11 G_{60} thatsächlich innerhalb der erweiterten Gesamtgruppe gleichberechtigt werden. Wir beweisen das späterhin auf directem Wege.

§ 11. Allgemeine Bedingungsgleichungen für die Ordnung einer Untergruppe von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

Letzten Endes bleibt uns in Ansehung unserer $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ hier nur noch die eine Aufgabe, zu zeigen, dass ausser den jetzt aufgezählten Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ weitere innerhalb derselben nicht mehr existieren. Unser Nachweis gründet sich dabei auf einen zuerst von Camille Jordan*) bei ähnlicher, aber noch allgemeinerer Fragestellung eingeschlagenen Gedankengang, der dann von Hrn. Gierster**) für unser hier vorliegendes Problem im besonderen durchgebildet wurde.

Sei G_Q irgend eine Untergruppe der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, so soll es sich zuvörderst darum handeln, einige für Q gültige Bedingungen zu gewinnen. Hierbei bemerken wir vorab, dass wir oben (p. 459) *alle* Untergruppen kennen lernten, an denen sich Untergruppen G_q beteiligten. Auf diese brauchen wir sonach hier nicht mehr Bezug zu nehmen und *können demgemäss Q als einen Teiler von $\frac{q^2-1}{2}$ voraussetzen.*

*) C. Jordan, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique,* Crelle's Journ. Bd. 84 (1878).

**) In der oft genannten Arbeit im 18ten Bande der Math. Annalen, p. 358.

Nun möge G_{π_1} eine erste „umfassendste" cyclische Untergruppe von G_Q sein, wobei also nach dem gerade Gesagten π_1 eine Zahl $\frac{q \pm 1}{2\tau}$ ist. G_{π_1} soll aber in dem Sinne als eine umfassendste cyclische Untergruppe von G_Q bezeichnet werden, dass sich in G_Q nicht noch eine umfassendere cyclische Untergruppe $G_{\nu\pi_1}$ finden soll, die G_{π_1} in sich enthielte. Zufolge dieser Festsetzung werden sich aus der die Gruppe G_{π_1} enthaltenden cyclischen $G_{\frac{q\pm1}{2}}$ ausser den Operationen der G_{π_1} selbst nicht noch weitere an der G_Q beteiligen. G_{π_1} ist bei dieser Sachlage „innerhalb G_Q" entweder nur mit ihren eigenen π_1 Operationen vertauschbar oder aber ausser diesen noch mit weiteren π_1, letzteres, im Falle sich in G_Q Operationen*) V_2 finden sollten, welche die einzelne Operation von G_{π_1} in ihre inverse transformieren. Dass die Zahl dieser V_2, wofern sich solche in G_Q überhaupt finden, gleichfalls π_1 sein muss, sieht man mühelos ein. *Verstehen wir also unter* σ_1 *entweder* 1 *oder* 2, so haben wir als erstes Resultat, dass es innerhalb G_Q im ganzen $\frac{Q}{\sigma_1 \pi_1}$ mit G_{π_1} gleichberechtigte cyclische Untergruppen der Ordnung π_1 giebt, die offenbar alle, wie G_{π_1} selbst, umfassendste cyclische Untergruppen von G_Q sind. Da keine zwei unter ihnen ausser der Identität eine Operation gemeinsam haben können, so sind in den gewonnenen $\frac{Q}{\sigma_1 \pi_1}$ Gruppen insgesamt

$$\frac{(\pi_1 - 1)\, Q}{\sigma_1 \pi_1}$$

verschiedene Operationen enthalten.

Entweder bilden jetzt diese Substitutionen im Verein mit der Identität die gesamte G_Q, oder es kommen in dieser Gruppe noch weitere Operationen vor. Im letzten Falle werden wir eine zweite gleichfalls umfassendste cyclische Untergruppe G_{π_2} von G_Q aufgreifen können, die dann ausser der Identität mit keiner der voraufgehenden G_{π_1} eine Operation gemeinsam haben kann. Wir schliessen wieder in gleicher Weise wie soeben auf die innerhalb G_Q mit G_{π_2} gleichberechtigten Untergruppen und finden solchergestalt insgesamt

$$\frac{(\pi_2 - 1)\, Q}{\sigma_2 \pi_2}$$

neue Operationen in G_Q vor.

So weiter schliessend, mögen wir endlich die gesamten Operationen der G_Q in ν verschiedene Systeme jedesmal gleichberechtigter, um-

*) Wir halten auch hier noch an der Massregel fest, durch den unteren Index die Periode der einzelnen Operation zu bezeichnen.

fassendster cyclischer Untergruppen angeordnet haben. Jedes dieser Systeme liefert, immer abgesehen von der Identität,

$$\frac{(\pi_i - 1)Q}{\sigma_i \pi_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, \nu)$$

verschiedene Operationen der G_Q, wobei keine dieser Operationen zugleich in zwei verschiedenen Systemen enthalten sein kann. Indem wir also alle diese einzelnen Anzahlen zusammenzählen und die Identität mit einrechnen, müssen wir die Anzahl Q aller Operationen der G_Q wieder erhalten. *Es besteht also zwischen den hier in Rede stehenden Zahlen die Identität:*

$$(1) \qquad Q = 1 + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(\pi_i - 1)Q}{\sigma_i \pi_i}.$$

Ein paar zusätzliche Bedingungen für Q reihen wir hier noch an. Erstlich ist selbstverständlich

$$(2) \qquad Q \geqq \sigma_i \pi_i$$

für alle in Betracht kommenden Werte i. Fürs zweite mögen in G_Q zwei nicht gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_{π_i}, $G_{\pi_\varkappa}$ *ungerader* Ordnungen π_i, $\pi_\varkappa$ vorkommen, deren Erzeugende wir V_{π_i} bez. $V_{\pi_\varkappa}$ nennen. Dann hat man in den beiden Reihen

$$G_{\pi_i}, \quad V_{\pi_\varkappa}^{-1} G_{\pi_i} V_{\pi_\varkappa}, \quad V_{\pi_\varkappa}^{-2} G_{\pi_i} V_{\pi_\varkappa}^{2}, \quad \cdots, \quad V_{\pi_\varkappa}^{-\pi_\varkappa+1} G_{\pi_i} V_{\pi_\varkappa}^{\pi_\varkappa-1},$$

$$G_{\pi_\varkappa}, \quad V_{\pi_i}^{-1} G_{\pi_\varkappa} V_{\pi_i}, \quad V_{\pi_i}^{-2} G_{\pi_\varkappa} V_{\pi_i}^{2}, \quad \cdots, \quad V_{\pi_i}^{-\pi_i+1} G_{\pi_\varkappa} V_{\pi_i}^{\pi_i-1}$$

$(\pi_i + \pi_\varkappa)$ cyclische Untergruppen der G_Q vor uns, die aufs leichteste als durchgehends von einander verschieden erkannt werden. Die Gruppen der ersten Reihe bringen im ganzen $\pi_\varkappa(\pi_i - 1)$ von der Identität verschiedene Operationen der G_Q, diejenigen der zweiten Reihe $\pi_i(\pi_\varkappa - 1)$ eben solche. Für Q entspringt daraus als fernere Bedingungsgleichung:

$$(3) \qquad Q \geqq 2\pi_i \pi_\varkappa - \pi_i - \pi_\varkappa + 1.$$

§ 12. Beweis für die Vollständigkeit der gegebenen Zerlegung von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

Discutieren wir nunmehr die wichtigste der für Q aufgestellten Bedingungsgleichungen, nämlich die Gleichung (1) § 11, die wir nach Q aufgelöst in der Form schreiben:

$$(1) \qquad Q = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\pi_i - 1}{\sigma_i \pi_i}}.$$

Da hier σ_i immer nur eine der Zahlen 1, 2 sein kann, so ist der kleinste Wert, den das einzelne Glied $\frac{\pi_i - 1}{\sigma_i \pi_i}$ der im Nenner der rechten Seite von (1) auftretenden Summe haben kann, offenbar $\frac{1}{4}$. Da aber andrerseits die Zahl Q positiv ist, so kann unsere in Rede stehende Summe höchstens drei Glieder haben. Verfolgen wir nun nach einander Gleichung (1) in diesen drei Fällen $\nu = 1, 2, 3$, so zeigt sich, dass jedesmal nur eine ganz beschränkte Zahl von Lösungen derselben in ganzen Zahlen Q, π_i, σ_i existiert. Wir haben dieselben hier vollzählig aufgeschrieben:

$$\nu = 1, \quad \sigma_1 = 1; \quad \pi_1 = \pi_1, \quad Q = \pi_1,$$

$$\nu = 2 \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = 2 \; ; & \pi_1 = \pi_1, \quad \pi_2 = \pi_2; & Q = \frac{2\pi_1\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}, \\ \sigma_1 = 2, \; \sigma_2 = 1; & \pi_1 = \pi_1, \quad \pi_2 = 2 \; ; & Q = 2\pi_1 \quad , \\ \sigma_1 = 1, \; \sigma_2 = 2; & \pi_1 = 3 \; , \quad \pi_2 = 2 \; ; & Q = 12 \quad , \end{cases}$$

$$\nu = 3 \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2; & \pi_1 = \pi_1, \quad \pi_2 = 2, \quad \pi_3 = 2; & Q = 2\pi_1, \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2; & \pi_1 = 3 \; , \quad \pi_2 = 3, \quad \pi_3 = 2; & Q = 12 \; , \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2; & \pi_1 = 4 \; , \quad \pi_2 = 3, \quad \pi_3 = 2; & Q = 24 \; , \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2; & \pi_1 = 5 \; , \quad \pi_2 = 3, \quad \pi_3 = 2; & Q = 60 \; . \end{cases}$$

Hier verstösst die erste Lösung mit $\nu = 2$ gegen die Bedingung (2) § 11, die zweite mit $\nu = 3$ aber gegen (3) § 11. Indem wir sie ausschalten, bleiben noch die folgenden zurück:

$$(2) \qquad \nu = 1, \quad \sigma_1 = 1, \quad \pi_1 = \pi_1, \quad Q = \pi_1,$$

$$(3) \begin{cases} \nu = 2; & \sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 1 \; ; & \pi_1 = \pi_1, \quad \pi_2 = 2 \quad ; & Q = 2\pi_1, \\ \nu = 3; & \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2; & \pi_1 = \pi_1, \quad \pi_2 = \pi_3 = 2; & Q = 2\pi_1, \end{cases}$$

$$(4) \quad \nu = 2; \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 2 \; ; \quad \pi_1 = 3 \; , \quad \pi_2 = 2 \quad ; \quad Q = 12 \; ,$$

$$(5) \quad \nu = 3; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2; \quad \pi_1 = 4, \quad \pi_2 = 3, \quad \pi_3 = 2; \quad Q = 24 \; ,$$

$$(6) \quad \nu = 3; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2; \quad \pi_1 = 5, \quad \pi_2 = 3, \quad \pi_3 = 2; \quad Q = 60 \; .$$

Man erkennt aufs leichteste, wie sich die im Laufe der beiden letzten Kapitel gefundenen Untergruppen der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ in dieses Schema einordnen. Aber jede den Bedingungen (2) bis (6) genügende G_Q findet sich auch thatsächlich unter unseren oben aufgestellten Untergruppen, wie wir nun noch ins einzelne belegen wollen.

Hier machen die Fälle (2), (3) nicht die geringste Schwierigkeit. Wir haben es da offenbar mit cyclischen Gruppen, Dieder- und Vierer-

gruppen zu thun, und von solchen Untergruppen giebt es in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, wie wir wissen, ausser den oben angegebenen nicht noch neue. Auch (4) und (5) erledigen sich leicht; eine diesen Bedingungen genügende Untergruppe besitzt den Tetraeder- bez. Oktaedertypus, die wir in ihrer Gesamtheit oben gewannen. Thatsächlich gelingt es leicht in einer nach (4) gehörenden G_{12}, sowie in einer nach (5) gehörenden G_{24} eine Vierergruppe als ausgezeichnet nachzuweisen, wodurch unsere gerade geschehene Behauptung über den Typus der G_{12} und G_{24} dargethan ist. In der That ist in einer G_{12} die einzelne V_2 infolge $\sigma_2 = 2$ mit 2 weiteren V_2 vertauschbar. Da aber insgesamt nur drei V_2 in der G_{12} enthalten sind, so bilden diese im Verein mit der Identität notwendig eine in der G_{12} ausgezeichnete Vierergruppe. Bei der G_{24} bemerke man zuvörderst, dass dieselbe drei gleichberechtigte cyclische G_4 enthält, deren Erzeugende wir V_4, V_4', V_4'' nennen. Transformieren wir diese drei cyclischen G_4 durch eine einzelne der drei eben aufgeschriebenen Substitutionen, so wird die eine G_4 in sich transformiert, die anderen beiden werden entweder auch in sich transformiert oder permutieren sich mit einander. In beiden Fällen aber transformiert offenbar V_4^2, sowie dann auch $V_4'^2$, $V_4''^2$, jede G_4 in sich, so dass die drei in den G_4 enthaltenen gleichberechtigten V_2 mit einander vertauschbar sind und also eine in der G_{24} ausgezeichnete Vierergruppe bilden.

So bleibt nur noch der Fall (6) zu betrachten. Eine hierher gehörige G_{60} enthält im ganzen 6 G_5, 10 G_3 und 15 G_2 als cyclische Untergruppen, sowie infolge

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2$$

weiter 6 G_{10} und 10 G_6 vom Diedertypus, sowie 5 gleichberechtigte Vierergruppen G_4, deren Anzahl aus bekanntem Grunde den dritten Teil der Anzahl der G_2 darstellt. Als eine unter 5 gleichberechtigten ist dann die einzelne G_4 in einer G_{12} ausgezeichnet, welche den Tetraedertypus besitzt, und es entspringen in solcher Art in der G_{60} fünf gleichberechtigte G_{12} des genannten Typus. Das ist alles wohlbekannter Weise in Übereinstimmung mit der Structur der Ikosaedergruppe; dass wir aber eine solche hier wirklich haben, zeigt man unter mehrfacher Verwendung des Dyck'schen Satzes durch die nachfolgende Überlegung: Eine einzelne der in der G_{60} enthaltenen V_3 wollen wir der Reihe nach mit den 15 V_2 zu V_3V_2 combinieren. Ist $V_3V_2 = V_2'$, so erzeugen V_3 und V_2 eine Diedergruppe G_6; in der That beteiligt sich V_3 an *einer* solchen G_6, so dass drei Substitutionen V_2 in V_3V_2 wieder eine Substitution der Periode zwei bilden. Ist $V_3V_2 = V_3'$, so erzeugen V_3

und V_2 eine Tetraedergruppe, und da sich V_3, wie man leicht abzählt, nur an zwei solchen G_{12} beteiligt, so giebt es sechs der Bedingung $(V_3V_2)^3 \equiv 1$ genügende Operationen V_2 in der G_{60}. Irgend eine von den 6 noch rückbleibenden V_2 giebt nun $V_3V_2 = V_5$, welche Gleichung wir sofort in $V_5V_2 = V_3$ invertieren. Hier entspringt aus V_5 und V_2 eine Ikosaedergruppe, welches unsere zu Grunde liegende G_{60} sein muss. Die den Bedingungen (6) genügenden Untergruppen besitzen also ausnahmslos den Ikosaedertypus, und die Untergruppen dieses Typus haben wir in § 10 alle kennen gelernt.

Damit ist nun in der That der Nachweis vollständig geführt, *dass unsere oben entwickelte Zerlegung der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *erschöpfend gewesen ist.*

§ 13. Einfachheit der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$. Der Galois'sche Satz. Schlussbemerkungen.

Indem wir hier am Schlusse des Kapitels noch einmal den Blick auf die durchlaufenen Entwicklungen zurückwerfen, werden wir vor allem dem wichtigen Satze noch Worte geben, dass in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ keine ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist, von den beiden trivialen Fällen abgesehen, dass eine solche Gruppe entweder nur die Identität enthält oder mit der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ selbst zusammenfällt. *In der* $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ *besitzen wir also eine einfache Gruppe;* oder, wie wir es auch ausdrücken können: *Es giebt nur eine ausgezeichnete Congruenzgruppe der Primzahlstufe* q, *nämlich die Hauptcongruenzgruppe* $\Gamma_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$.

Wenn wir schon beim Ausspruch dieses letzten Satzes auf die Congruenzgruppen q^{ter} Stufe selbst wieder Bezug nahmen, so könnten wir ja nun ganz allgemein zu ihnen wieder zurückgehen. Da hätten wir denn jedem Systeme von gleichberechtigten Untergruppen G_Q der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ ein System von ebenso vielen gleichberechtigten Congruenzgruppen $\Gamma_{\frac{q(q^2-1)}{2Q}}$ q^{ter} Stufe vom Index $\frac{q(q^2-1)}{2Q}$ zuzuordnen. Es würde die Aufgabe entspringen, für jedes solche System in der ω-Halbebene Fundamentalpolygone $F_{\frac{q(q^2-1)}{2Q}}$ abzusondern, deren einzelnes, wie wir sagen werden, „einen Q^{ten} Teil" des Polygons $F_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ darstellt; wir

hätten die Geschlechter p für diese Untergruppen zu bestimmen u. s. w. Es ist aber weder interessant noch unserer künftigen Untersuchungen wegen nötig, diese Aufgaben hier im vollen Umfange zu lösen; wir wollen es vielmehr der ferneren Entwicklung anheimstellen, welche von den Congruenzgruppen q^{ter} Stufe der eingehenden Untersuchung besonders wert erscheinen, und werden dann speciell für diese die Lösung der eben gekennzeichneten Aufgaben leicht nachträglich erledigen.

Die eben geschehene Entschliessung soll uns nicht hindern, schon hier wenigstens der Frage nachzugehen, welches denn die Congruenzgruppen q^{ter} Stufe von „kleinstem Index" sind. Sie werden offenbar den Untergruppen grösster Ordnung der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ zugeordnet sein. Nun waren die Ordnungen derjenigen Untergruppen von $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$, die nicht noch in umfassenderen von der Gesamtgruppe $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ selbst verschiedenen Untergruppen enthalten sind, die folgenden:

$$(1) \qquad \frac{q(q-1)}{2},\ (q-1),\ (q+1),\ 12,\ 24,\ 60,$$

wobei freilich die Ordnung 12 nur für Stufenzahlen der Form $q = 8h \pm 3$, die nicht zugleich die Form $10h' \pm 1$ haben, in Betracht kommt, desgleichen die Ordnung 24 nur für $q = 8h \pm 1$ und 60 nur für $q = 10h \pm 1$. Da wir doch $q \geqq 5$ voraussetzen, so wird stets $\frac{q(q-1)}{2} > q+1 > q-1$ erfüllt sein, so dass wir nur noch $\frac{q(q-1)}{2}$ und die letzten drei unter (1) angegebenen Zahlen zu vergleichen haben. Da trifft nun in der That $\frac{q(q-1)}{2} \leqq 12$ für $q = 5$, $\frac{q(q-1)}{2} \leq 24$ für den hier allein in Betracht kommenden Fall $q = 7$, desgleichen $\frac{q(q-1)}{2} \leq 60$ allein für $q = 11$ zu; darüber hinaus aber ist $\frac{q(q-1)}{2}$ unter allen Umständen grösser als die übrigen in (1) angegebenen Zahlen. Wir haben damit den interessanten und folgereichen Satz gewonnen: *Die den halbmetacyclischen* $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ *entsprechenden* $(q+1)$ *gleichberechtigten Congruenzgruppen* Γ_{q+1} q^{ter} *Stufe vom Index* $(q+1)$ *sind im allgemeinen Falle der Primzahlstufe* q *die Congruenzgruppen von niederstem Index. Ausnahmen treten nur für* $q = 5, 7, 11$ *ein, wo wir bez. den* G_{12}, G_{24} *und* G_{60} *entsprechend bei* $q = 5$ *ein System, bei* $q = 7$ *und* 11 *aber beide Male zwei Systeme von je* q *gleichberechtigten* Γ_q *des Index* q *zu verzeichnen haben.*

Dass solchergestalt für $q = 5, 7, 11$, aber auch nur für diese, eine Ausnahme von der allgemeinen Regel eintritt, ist bereits von Galois*) erkannt worden; wollen wir also unseren soeben formulierten Satz künftig kurz als den Galois'schen Satz citieren**). Übrigens erscheint der betreffende Satz bei Galois noch unvermittelt, und es ist erst das Verdienst von Hrn. Gierster, den ausnahmsweisen Charakter der drei Fälle $q = 5, 7, 11$ auf das richtige Mass zurückgeführt zu haben. Nach Auffindung z. B. der G_{60} in der $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ für $q = 10h \pm 1$ würden wir den Galois'schen Satz im besonderen für $q = 10h \pm 1$ so auszusprechen haben: *Für alle Primzahlstufen gekennzeichneter Form giebt es zwei Systeme von je* $\frac{q(q^2-1)}{120}$ *gleichberechtigten Congruenzgruppen* $\Gamma_{\frac{q(q^2-1)}{120}}$ *vom Index* $\frac{q(q^2-1)}{120}$, *die also für* $q = 11$ *zweimal* 11 *gleichberechtigte* Γ_{11} *liefern.* Entsprechende Sätze wird man sofort von den G_{12} und G_{24} aus formulieren.

Indem wir hiermit überhaupt die Entwicklungen des zweiten Abschnitts abschliessen, kennzeichnen wir noch einmal mit wenigen Worten, inwieweit wir nun eine Auflösung unseres gruppentheoretischen Grundproblems erlangt haben. Nach der allgemeinen geometrischen Einleitung (Kap. 1, 2) und der sich hierauf stützenden zahlentheoretischen Untersuchung der cyclischen Untergruppen der Modulgruppe (Kap. 3) folgte die theoretische Auflösung unseres Problems in Form einer allgemeinen Exposition der Theorie der Untergruppen (insbesondere derjenigen von endlichem Index) auf geometrischer Grundlage (Kap. 5, 6). Die so gewonnenen allgemeinen Ansätze haben wir dann durch ausführliche Untersuchung der Congruenzgruppen und insbesondere derjenigen von Primzahlstufe teils auf geometrischer (Kap. 6), teils auf wesentlich arithmetischer Grundlage (Kap. 7, 8, 9) zu abgeschlossenen Einzelbetrachtungen durchgebildet.

---

*) Vgl. den Brief Galois' an seinen Freund Auguste Chevalier, veröffentlicht in der Revue encyclopédique von 1832, sowie später im Verein mit Galois' gesammelten Werken in Liouville's Journal Bd. 11 (1846). Letztere sind neuerdings (Berlin, 1889) von H. Maser in deutscher Ausgabe veröffentlicht.

**) Der erste Beweis des Galois'schen Satzes rührt wohl von Betti her, *Sopra l'abassamento della equazione modulari delle funzione ellitiche*, in Tortolini's Annali di scienze matematiche etc. Bd. 3 (1853). Man sehe übrigens die schon öfter genannte Arbeit Klein's, *Über die Erniedrigung der Modulargleichungen*, Math. Ann. Bd. 14, wo zahlreiche weitere Citate gegeben sind.

Dem wird nun genau der Gang der jetzt zu unternehmenden Behandlung des functionentheoretischen Grundproblems entsprechen. Indem wir uns gleich anfangs auf Untergruppen von endlichem Index beschränken (weil für höhere Untergruppen die erforderlichen functionentheoretischen Hülfsmittel noch nicht bereit stehen), werden wir zuerst auf geometrischer Grundlage eine allgemeine Exposition für die Auflösung des functionentheoretischen Problems entwerfen; alsdann folgt die specielle Ausführung der allgemeinen Ansätze für das Gebiet der Congruenzgruppen. In directer Weise gelingt die Durchführung dieses Planes allerdings nur für niedere Stufenzahlen, über deren Betrachtung wir darum im folgenden Abschnitte noch nicht hinausgehen.

Dritter Abschnitt.

Behandlung des functionentheoretischen Grundproblems.

Erstes Kapitel.

Grundlegung von Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.

Das zweite Problem, dessen Auflösung für die Durchführung der p. 137 u. f. formulierten Fundamentalaufgabe notwendig war, benannten wir p. 141 als das „functionentheoretische". Wie damals ausführlich auseinandergesetzt wurde, hatte es zur Aufgabe, *die elliptischen Modulfunctionen aufzustellen und zu untersuchen, welche in dem Sinne zur einzelnen, etwa vorliegenden Untergruppe Γ_μ der Modulgruppe Γ gehören, dass sie sich gegenüber den Transformationen ihres Argumentes ω durch die Substitutionen von Γ_μ, aber keinen anderen Transformationen gegenüber invariant verhalten.*

Für die Lösung dieses Problems ist die im voraufgehenden Abschnitte entwickelte Theorie der Fundamentalpolygone F_μ von grösster Bedeutung; denn es gelingt, wie wir ja bereits oben (p. 142) andeuteten, die von Riemann in die Theorie der algebraischen Functionen eingeführten geometrischen Anschauungsweisen und Massnahmen direct an die Fundamentalpolygone anzuknüpfen. Bevor wir dies ins einzelne belegen, wird es nötig sein, in einem kurzen Excurse gesondert auf Riemann's bezügliche Theorie einzugehen (Kap. 1 und 2 des gegenwärtigen Abschnitts). Wir beabsichtigen dabei nicht erschöpfend zu verfahren, sondern werden unseren Excurs nur soweit ausdehnen, als dies im Hinblick auf die künftige Verwendung desselben und auf die sonst zur Verfügung stehenden litterarischen Hülfsmittel erforderlich erscheint*).

*) Die beiden hier in Betracht kommenden Originalarbeiten Riemann's sind: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Inauguraldissertation, Göttingen, 1851), *Theorie der Abel'schen*

§ 1. Die mehrblättrige Riemann'sche Fläche F_n über einer Ebene.

Bereits im ersten Abschnitt haben wir des öfteren*) Gelegenheit gehabt, mit mehrblättrigen Riemann'schen Flächen zu arbeiten. Für die nun folgenden Entwicklungen sind dieselben geradezu das Fundament unserer Überlegungen, und wir wollen demgemäss einige bei ihrer Ausgestaltung wichtige Punkte vorab kurz in Erinnerung bringen.

Es möge eine algebraische Function n^{ten} Grades $w(z)$ vorliegen, welche wir definiert denken durch die algebraische Gleichung

$$f(w, z) = 0,$$

in der also w bis auf den n^{ten}, z etwa bis auf den m^{ten} Grad ansteigt. Zur Versinnlichung des Verlaufs dieser algebraischen Function w bedient man sich bekanntermassen der zugehörigen n-blättrigen Riemann'schen Fläche über der Ebene der complexen Variabelen z, eine Fläche, die wir in der Folge kurz durch F_n bezeichnen wollen. Dabei hängen die Blätter von F_n zu zweien oder auch mehreren in gewissen „Verzweigungspunkten" mit einander zusammen. Doch ist die Gesamtzahl dieser Verzweigungspunkte jedenfalls eine endliche; denn dieselben können bekanntlich nur an jenen Stellen z stattfinden, die zugleich den beiden Gleichungen

$$f(w, z) = 0, \quad \frac{\partial f(w, z)}{\partial w} = 0 \tag{1}$$

genügen. Durch Umkreisung der Verzweigungspunkte gelangt man aus einem ersten Blatte in andere hinein, wie denn diese Blätter überhaupt so mit einander zusammenhängen, dass sie ein Bild für den Zusammenhang der n Zweige unserer Function $w(z)$ abgeben**).

In Anbetracht des Zusammenhanges der n Blätter unter einander findet nun ein wichtiger Fallunterschied statt. Entweder nämlich kann man aus einem ersten Blatte durch zweckmässige Wege eines sich stetig bewegenden Punktes z in alle übrigen Blätter hinein-

---

Functionen (Crelle's Journal, Bd. 54, 1857). Von den zahlreichen an dieselben anknüpfenden Darstellungen anderer Mathematiker werden wir in der Folge besonders häufig zu nennen haben: Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale* (2te Aufl., Leipzig, 1884) und Klein, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882). Wir citieren die erste dieser beiden Schriften im Laufe des nun beginnenden Kapitels kurz durch Angabe des Autors unter Beifügung der betreffenden Seitenzahl.

*) In I, 2 § 1 (p. 27) bei der Einführung der Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung, sowie in I, 3 § 1 (p. 65) beim Ersatz gewisser Riemann'scher Flächen durch in Bereiche geteilte Ebenen.

**) Zur Einführung in den Gebrauch mehrblättriger Riemann'scher Flächen benutzt man zweckmässig Neumann Kap. 4 und 5.

gelangen, oder die Zahl der solchergestalt erreichbaren Blätter ist nur eine beschränkte, sagen wir $n' < n$. Im letzteren Falle wird unsere n-blättrige Fläche zerfallen, indem ja jene n' Blätter für sich eine Fläche bilden, welche mit den übrigen $(n - n')$ Blättern ausser Zusammenhang steht. Wohlbekannter Weise kommt dies darauf hinaus, dass sich die ganze rationale Function $f(w, z)$ von w und z in das Product von mehreren, gleichfalls in w und z ganzen rationalen Functionen spalten lässt, wobei dann der eine der entspringenden Factoren in w auf den Grad n' ansteigt und diejenigen n' Zweige unserer algebraischen Function $w(z)$ umfasst, welche durch die n' Blätter der für sich abgespaltenen Fläche versinnlicht werden. Indem nun aber diese n'-blättrige Fläche nicht mehr in getrennte Stücke zerfällt, wird jener Factor $f'(w, z)$ vom Grade n' in w irreducibel sein. Wir werden fortan diesen irreducibelen Factor und also die algebraische Function $w(z)$ vom Grade n', durch $f'(w, z) = 0$ definiert, allein betrachten. Indem wir sogleich wieder die oberen Indices bei n' und f' fortlassen, kommt dies darauf hinaus, *dass wir die zu Grunde liegende Gleichung* $f(w, z) = 0$ *als irreducibel voraussetzen und also mit einer nicht-zerfallenden Riemann'schen Fläche* F_n *zu thun haben.*

Weiter erinnern wir an die Einteilung der Riemann'schen Flächen in Geschlechter. Die oben p. 27 u. f. zu Grunde gelegte Fläche konnte durch zwei geeignet gewählte Querschnitte in eine „einfach zusammenhängende" zerschnitten werden, d. i. in eine solche, die zwar selbst noch zusammenhängend ist, die aber durch jeden neuen Querschnitt in getrennte Stücke zerlegt wird. Unsere hier vorliegende, noch nicht näher specificierte n-blättrige Fläche F_n wird sich in ganz entsprechender Weise durch eine *gerade* Anzahl von, sagen wir, $2p$ Querschnitten dermassen zerschneiden lassen, dass sie zwar selbst noch zusammenhängend ist, aber durch jeden $(2p + 1)^{\text{ten}}$ Querschnitt in getrennte Teile zerlegt wird. Die solchergestalt zu Tage tretende Zahl p behält unabänderlich denselben Wert, welches Querschnittsystem wir auch zu Grunde legen mögen*); wir bezeichnen dieselbe weiterhin als *das Geschlecht der Riemann'schen Fläche* F_n und haben also in der zweiblättrigen Fläche mit vier Verzweigungspunkten (cf. p. 27) eine solche des Geschlechtes $p = 1$. Noch merken wir uns als wichtig die Relation an, welche zwischen der Blätterzahl n, dem Geschlechte p und der Anzahl ν der in den einzelnen Verzweigungspunkten zusammenhängenden Blätter besteht. Dieselbe lautet:

$$p = -n + 1 + \sum \frac{\nu - 1}{2}, \tag{2}$$

*) Cf. Neumann, Kap. 7.

wobei die Summe über alle der Fläche F_n angehörenden Verzweigungspunkte auszudehnen ist*).

Ein besonders zweckmässiges Querschnittsystem gewinnt man in folgender Art. Von einem willkürlich ausgewählten Punkte z_0 in einem Blatte unserer Riemann'schen Fläche F_n ziehen wir einen ersten sich selbst nicht überkreuzenden Querschnitt, der nicht gerade in z_0, wohl aber in einem anderen seiner früheren Punkte endigt. In Fig. 91 ist derselbe schematisch durch die aus c_1 und der geschlossenen Curve a_1 zusammengesetzte Linie angedeutet. Dieser Querschnitt soll die Fläche jedenfalls nicht in getrennte Stücke zerschneiden, und es muss somit die Möglichkeit vorliegen, vom einen Ufer der Linie a_1 auf geschlossenem, a_1 nicht überkreuzenden Wege zum gegenüber liegenden Uferpunkte hinzugelangen. Ein derartiger geschlossener Weg ist in Fig. 91 schematisch angedeutet und mit b_1 bezeichnet; wir wollen ihn zum zweiten Querschnitt der Riemann'schen Fläche F_n wählen**). Ist das Geschlecht unserer Fläche $p > 1$, so werden wir in ganz entsprechender Weise von z_0 aus noch ein zweites solches Querschnittpaar herstellen können, das in Fig. 91 einerseits durch c_2, a_2 und andrerseits durch b_2 schematisch angedeutet ist. *In der That kann man bei einer Fläche F_n vom Geschlechte p insgesamt p derartige Querschnittpaare von z_0 aus ziehen, und hat dann durch diese die Zerschneidung der F_n in eine einfach zusammenhängende Fläche geleistet.* Das i^{te} Querschnittpaar werden wir dabei, gerade wie die beiden ersten, aus drei Linien c_i, a_i, b_i aufbauen und denken dieselben immer, wie Fig. 91 näher kennzeichnet, in gewissem Sinne durchlaufen, um gelegentlich von einem rechten und linken Ufer der einzelnen Linien c_i, a_i, b_i sprechen zu können. Unsere Figur, welche den Fall $p = 2$ versinnlicht, wird sofort veranschaulichen, wie die F_n

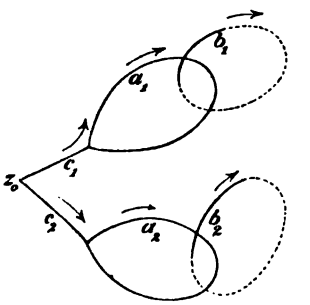


Fig. 91.

*) Wir gedenken hier sogleich der geschlossenen Flächen F_μ des vorigen Abschnitts, die wir gleichfalls nach dem im Texte zur Geltung gekommenen Princip in Geschlechter einteilten (cf. p. 330). Unsere damaligen Vorstellungen werden sich mit den jetzigen baldigst zusammenschliessen.

**) Bei einer Fläche F_n des Geschlechtes $p = 1$, z. B. der F_2 mit 4 Verzweigungspunkten, ist hiermit die Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende Fläche geleistet. In der That subsumiert sich ja auch die auf jene F_2 bezügliche Fig. 1, p. 28, direct unter die Vorschrift des Textes; nur wurde damals der erste Querschnitt nicht mit dem hier durch c_1 bezeichneten Linienstück versehen, welches letztere in der That bei $p = 1$ nicht in Betracht kommt.

des Geschlechtes p durch den Complex der $2p$ Querschnitte mit *einer* zusammenhängenden Randcurve versehen ist, bei deren Durchlaufung dann jedesmal beide Ufer der einzelnen Linie c_i, a_i, b_i beschrieben werden, das linke im Sinne der Pfeilrichtung, das rechte in dem dazu entgegengesetzten. Benennen wir unsere dergestalt verabredeten $2p$ Querschnitte künftighin als *ein normales Querschnittsystem der* F_n.

Letzten Endes bringen wir eine bereits wiederholt von uns verwendete Massregel zum Gebrauch, indem wir an die Stelle der Ebene der complexen Variabelen z die aus ihr durch stereographische Projection entspringende Kugeloberfläche setzen. Unsere n-blättrig überdeckte Ebene geht dabei in eine *„n-blättrige Riemann'sche Kugelfläche F_n des Geschlechtes p"* über. In derselben spielt die Stelle $z = \infty$ nicht mehr die besondere Rolle, die ihr bei der z-Ebene für die Anschauung zukommt; eine derartige Ausnahmestellung von $z = \infty$ entspricht in der That auch keineswegs dem Sinne der weiterhin von uns anzustellenden Überlegungen.

§ 2. Die zur betrachteten Fläche F_n gehörenden algebraischen Functionen.

An der einzelnen Stelle z liegen in unserer Fläche F_n n Punkte über einander, und die in diesen Punkten stattfindenden Werte der Function w gewinnen wir durch Auflösung der Gleichung $f(w, z) = 0$, in welcher wir für z den gedachten Specialwert eingetragen denken. Die so entspringenden n Werte w, die sich nun in ganz bestimmter Weise auf die n Blätter der Fläche verteilen, sind im allgemeinen von einander verschieden. Ausnahmen hiervon treten nur ein erstlich, wenn an der gewählten Stelle z ein Verzweigungspunkt F_n gelegen ist. Hängen in demselben etwa ν Blätter zusammen, so werden die ν diesen Blättern entsprechenden Zweige von w für jene Stelle z den nämlichen Wert annehmen. Wir müssen aber auch zweitens der Möglichkeit Raum geben, dass bei z *in zwei oder noch mehreren dortselbst nicht mit einander zusammenhängenden Blättern* der nämliche Wert w stattfinden kann. Ein solches Wertsystem w, z wird dann nicht nur den beiden Gleichungen $f(w, z) = 0$ und $\frac{\partial f(w, z)}{\partial w} = 0$ genügen, sondern es wird notwendig auch noch $\frac{\partial f(w, z)}{\partial z} = 0$ befriedigt sein, indem nämlich die Gleichung $f(w, z) = 0$, für den fraglichen Wert w nach z aufgelöst, eine mehrfache Wurzel z besitzen muss. Wertsysteme w, z dieser besonderen Art (die in zwei oder noch mehreren getrennten Punkten von F_n stattfinden) treten hiernach sicher nur in endlicher Zahl auf. Wir werden somit umgekehrt den Satz aussprechen können: *Ein*

einzelnes, der Gleichung $f(w, z) = 0$ genügendes Wertsystem w, z findet, allgemein zu reden, nur in einem Punkte der F_n statt, welcher letztere also durch Angabe dieses Systems w, z definiert werden kann; hiervon ist höchstens eine endliche Anzahl von Wertsystemen w, z ausgenommen, deren einzelnes in mehr als einem, aber weniger als $(n + 1)$ Punkten der F_n stattfindet. Diese letzteren besonderen Wertsysteme werden uns aber weiterhin, eben weil sie nur in endlicher Zahl vorhanden sind, nicht wesentlich stören.

Wir kommen jetzt ausführlich darauf zurück, dass z in der Gleichung $f(w, z) = 0$ bis auf den m^{ten} Grad ansteigen sollte. Wählen wir sonach irgend einen complexen Wert w, so giebt die Auflösung von $f(w, z) = 0$ nach z stets m Werte z als zugehörig. Wir werden dies dahin ausdrücken, dass der einzelne complexe Wert w immer in m (verschiedenen oder teilweise coincidierenden) Punkten der F_n stattfindet, und benennen in diesem Sinne w als *m-wertige algebraische Function von z.*

Mögen wir nun einen beliebigen Wert w_0 von w herausgreifen, der in einem bei z_0 gelegenen Punkte der Fläche F_n stattfindet. Bei speciellen Untersuchungen werden wir alsdann häufig die Frage zu erörtern haben, wie viele von den m zu w_0 gehörigen Punkten der F_n an dieser bei z_0 gelegenen Stelle der Fläche coincidieren; wir müssen zur Beantwortung derselben Reihenentwicklungen in Anspruch nehmen. Bekanntlich lässt sich $(w - w_0)$ bei z_0, allgemein zu reden, in eine Reihe nach ansteigenden ganzen Potenzen von $(z - z_0)$ entwickeln:

$$(1) \quad w - w_0 = a_0(z - z_0)^{\mu} + a_1(z - z_0)^{\mu+1} + a_2(z - z_0)^{\mu+2} + \cdots,$$

wobei der Exponent μ des ersten Gliedes eine positive ganze Zahl ist. *Eben diese Zahl μ ist es dann, welche uns angiebt, wie viele von den fraglichen m Punkten an jener bei z_0 gelegenen Stelle coincidieren.* Hierbei haben wir jedoch betreffs der durchgängigen Gültigkeit von (1) noch einige ergänzende Zusätze zu machen. Es ist nämlich zunächst vorausgesetzt, dass weder w_0 noch z_0 den Wert ∞ haben. Indessen haben wir zur Hebung dieser Besonderheit nichts weiter nötig, als die bereits in der Note unter Seite 35 verabredete Festsetzung auch hier festzuhalten, dass wir unter $(w - w_0)$ oder $(z - z_0)$ nichts anderes als $\left(\frac{1}{w}\right)$ bez. $\left(\frac{1}{z}\right)$ verstehen wollen, falls w_0 bez. $z_0 = \infty$ ist. Des ferneren aber setzt Formel (1) voraus, dass der betrachtete, bei z_0 gelegene Punkt der F_n nicht gerade ein Verzweigungspunkt der Fläche sei; indessen können wir auch diese Besonderheit durch eine analoge Festsetzung über $(z - z_0)$ heben. Ist nämlich der fragliche Punkt ein Verzweigungspunkt, in dem ν Blätter zusammenhängen, so müssen wir bekanntlich

statt nach $(z - z_0)$ vielmehr nach ansteigenden Potenzen von $(z - z_0)^{\frac{1}{\tau}}$ entwickeln; in dem ersten dabei auftretenden Exponenten μ dieser Entwicklungsgrösse werden wir wieder die gesuchte Anzahl erhalten. Wollen wir also für den in Rede stehenden Fall unter $(z - z_0)$ kurzer Hand $(z - z_0)^{\frac{1}{\tau}}$ verstehen. — Man sieht übrigens, dass in jedem Einzelfall die Grösse, nach der wir entwickeln, an der betrachteten Stelle der F_n, wie wir sagen werden, jeweils einfach algebraisch verschwindet.

Man bilde sich nunmehr eine beliebige rationale Function von w und z, die wir w' nennen wollen:

$$w' = R(w, z). \tag{2}$$

Diese Function w' wird alsdann mit w und z selbst im einzelnen Punkte von F_n einen eindeutig bestimmten Wert haben oder, wie wir sagen wollen, auf der Fläche F_n eine eindeutige Function sein. Dabei werden dem einzelnen Werte z stets n im allgemeinen verschiedene*) Werte w' entsprechen, die man durch Substitution der bezüglichen Werte w in (2) erhält. Die symmetrischen Verbindungen dieser n Werte w' werden aber eindeutig und darum rational von z abhängen, und also folgern wir sofort, dass auch w' Wurzel einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades $f'(w', z) = 0$ ist. Indem in dieser Gleichung $f'(w', z) = 0$ die Grösse z etwa bis auf die m'^{te} Potenz ansteige, erkennen wir in w' eine m'-wertige algebraische Function von z, die von sich aus gerade auch zur hier zu Grunde liegenden Fläche F_n hingeführt hätte. Wir werden also diese Überlegung dahin zusammenfassen, dass wir sagen: *Alle unter der Form* (2) *erscheinenden Grössen w' sind algebraische Functionen unserer n-blättrigen Fläche F_n.* Inwiefern dieser Satz umkehrbar ist, haben wir jetzt zu erörtern.

Dabei ist es von grundlegender Bedeutung, dass wir die solchergestalt gewonnenen algebraischen Functionen (2) der F_n in einer völlig independenten Weise definieren können. Möge uns nämlich eine Function**) w' von z vorgelegt sein, die in solcher Weise von z ab-

*) Für besonders construierte Functionen $R(w, z)$ kann es allerdings vorkommen, dass die Anzahl der verschiedenen beim einzelnen z eintretenden Werte w' ein von n selbst verschiedener Teiler τ der Zahl n ist. Wir sehen im Texte zunächst von diesem Falle ab; bei ihm ist w' Wurzel einer irreducibelen Relation τ^{ten} Grades, die von sich aus nicht schon zur gesamten F_n hinführen würde, vielmehr zu einer solchen F_τ, aus der erst durch $(n : \tau)$-fache Überlagerung die F_n herstellbar wäre. Inzwischen umfasst der sogleich zu gebende allgemeine Begriff der „algebraischen Function der F_n" auch die hier zunächst ausgeschlossenen besonderen $R(w, z)$.

**) Bezüglich der allgemeinen Begriffsbestimmung einer Function von z vergleiche man etwa Neumann p. 10 u. f.

hängig ist, *dass sie sich als eindeutige Function des Ortes in unserer F_n auffassen lässt.* Des ferneren soll diese Function w' in der F_n allenthalben *stetig* sein, mit Ausnahme einer *endlichen* Anzahl von Punkten, in deren einzelnem w' *in endlicher ganzzahliger Ordnung algebraisch unendlich* wird*). *Alle so charakterisierten Functionen w' und nur diese wollen wir hinfort als die algebraischen Functionen der F_n bezeichnen.* Wir behaupten alsdann: *Es ist w' in der Gestalt* (2) *als rationale Function von w und z darstellbar, so dass sich die Gesamtheit der jetzt allgemein charakterisierten algebraischen Functionen der F_n gerade mit den vorhin schon aufgestellten Grössen $R(w, z)$ deckt.*

Um solches zu zeigen, werden wir die soeben gemeinte Darstellung von w' durch w und z wirklich leisten müssen. Man benenne zu dem Ende die Werte von w und w', welche in den n bei einer beliebigen Stelle z über einander liegenden Punkten von F_n stattfinden, durch $w_1, w_2, \cdots, w_n$, bez. $w_1', w_2', \cdots, w_n'$. Indem man alsdann unter i irgend eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ versteht, bilde man die symmetrische Verbindung

$$w_1^i w_1' + w_2^i w_2' + w_3^i w_3' + \cdots + w_n^i w_n'.$$

Dieselbe nimmt offenbar in den n bei z über einander liegenden Punkten den nämlichen Wert an und ist sonach bereits von z allein eindeutig abhängig. Des näheren aber ist sie zufolge der für w und w' hier gültigen Voraussetzungen von z rational abhängig, wie man auf Grund wohlbekannter functionentheoretischer Sätze schliesst. Wir schreiben uns nun das System der n auf diesem Wege zu gewinnenden Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} w_1' + \quad & w_2' + \cdots + \quad w_n' = r^{(0)}(z), \\ w_1 w_1' + \quad & w_2 w_2' + \cdots + \quad w_n w_n' = r^{(1)}(z), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_1^{n-1} w_1' + \; & w_2^{n-1} w_2' + \cdots + w_n^{n-1} w_n' = r^{(n-1)}(z). \end{aligned} \tag{3}$$

Selbiges stellt uns ein System von n linearen Gleichungen mit den n Unbekannten $w_1', w_2', \cdots, w_n'$ dar, und es ist das Quadrat der Determinante dieses Gleichungssystems nach bekannten Sätzen eine nicht identisch verschwindende rationale Function von z. Jetzt stellt sich durch Auflösung von (3) nach w_1' dieser Wert als Quotient dar, dessen Nenner die eben gemeinte Determinante, dessen Zähler aber eine rationale Function von $z, w_2, w_3, \cdots, w_n$ ist, wobei noch dazu diese letzteren $(n-1)$ Argumente $w_2, \cdots, w_n$ in der Determinante des Zählers von w_1' derart enthalten sind, dass bei Vertauschung von zweien

*) Zusammenfassend können wir der neueren Ausdrucksweise folgend die von w' geforderten Eigenschaften dadurch bezeichnen, dass sie in der F_n eine eindeutige Function ohne wesentlich singuläre Punkte sein soll.

unter ihnen dieser Zähler nur einen Zeichenwechsel erleidet. Wir bemerken sogleich: Indem wir den Quotienten w_1' durch die in seinem Nenner stehende Determinante erweitern, wird der neue Nenner rational in z, der neue Zähler aber symmetrisch in $w_2, w_3, \cdots, w_n$. Aber man erkennt leicht, dass eine symmetrische Function dieser $(n-1)$ Wurzeln $w_2, \ldots, w_n$ von $f(w, z) = 0$ rational in z und der Wurzel w_1 darstellbar ist. Wir gewinnen dergestalt für w_1' die Darstellung:

$$w_1' = R(w_1, z).$$

In derselben Form werden sich dann auch die übrigen Zweige w_2', w_3', ... in w_2 bez. w_3, ... und z darstellen lassen, wie man entweder auf directem Wege durch Wiederholung des soeben eingeschlagenen Schlussverfahrens oder durch analytische Fortsetzung jenes ersten Zweiges w_1' erhärtet. Überhaupt ist somit $w' = R(w, z)$, wodurch unsere betreffs der Function w' geschehene Behauptung verificiert ist*).

Die Function w, von der wir anfänglich ausgingen, ordnet sich hiernach ein in den ganzen Complex der nunmehr vollständig charakterisierten algebraischen Functionen der Fläche F_n (zu denen übrigens, wie man bemerkt, auch z selbst zu rechnen ist). Bei dieser Sachlage hätten wir statt w irgend eine andere Function (2) zu Grunde legen können, die an z durch eine irreducibele Relation n^{ten} Grades $f'(w', z) = 0$ geknüpft ist. Auch von hier aus hätten wir gerade unsere vorliegende F_n gewonnen und würden nun deren sämtliche algebraische Functionen rational in w' und z darstellen können**).

§ 3. Die zur betrachteten Fläche F_n gehörenden Integrale.

Die wichtigste Verwendung findet die in § 1 eingeführte Riemann'sche Fläche F_n bei der Untersuchung der zu ihren algebraischen Functionen gehörenden Integrale j, welche wir auf Grund von (2) p. 498 in der allgemeinen Gestalt

*) Es mag befremden, dass die beiden Grössen w, z zur rationalen Darstellung aller Functionen w' ausreichen. Es ist ja keineswegs ausgeschlossen, dass sich vereinzelte Wertsysteme w, z ausfindig machen lassen, die in mehr als einem Punkte von F_μ stattfinden, und in solchen Punkten hat doch eine beliebig herausgegriffene Function w' im allgemeinen verschiedene Werte. Der hierin gegen die Möglichkeit der Darstellung $w' = R(w, z)$ liegende Widerspruch hebt sich durch den Umstand weg, dass für ein derartiges Wertsystem Zähler und Nenner der rationalen Function R zugleich verschwinden, worauf der sog. „wahre" Wert von w, den man durch Grenzübergang findet, an den verschiedenen Stellen (w, z) sehr wohl verschieden ausfallen kann.

**) Mit Riemann benennen wir die Functionen (2) als ein „System gleichverzweigter algebraischer Functionen von z". Übrigens kommen wir auf eine wesentlich allgemeinere Auffassung dieser Verhältnisse im folgenden Kapitel zurück.

$$(1) \qquad j = \int_{z_0, w_0}^{z, w} R(w, z)dz$$

aufschreiben. Dabei ist eine auf der Fläche festgewählte untere Integrationsgrenze durch z_0, w_0, die variabel gedachte obere Grenze aber durch z, w bezeichnet. Wir benennen (1) kurz als „ein zur F_n gehörendes Integral".

Vorab erinnern wir an die Einteilung dieser Integrale in drei Gattungen, je nach der Art ihrer Unstetigkeitspunkte auf der Fläche F_n*). *In die erste Gattung rechnet man diejenigen Integrale, welche auf der Fläche überall endlich sind.* Wir werden späterhin noch ausführlich zu zeigen haben, dass auf jeder Fläche F_n eines Geschlechtes $p > 0$ Integrale dieser Gattung thatsächlich existieren. Man wird dabei sehen, dass für diese Gattung die Unstetigkeitspunkte der unter dem Integralzeichen (1) stehenden Function $R(w, z)$ durchgehends in den Verzweigungspunkten von F_n liegen, woselbst sie überdies ganz bestimmte Multiplicitäten haben müssen. Dieserhalb kommen wir stets zu einem nicht der ersten Gattung angehörigen Integrale j, wenn $R(w, z)$ nicht in dieser speciellen Art auf F_n unendlich wird. Jedenfalls können wir (um hier noch weiter zu sondern) die in (1) unter dem Integralzeichen stehende Grösse in der Umgebung einer bei z_0 gelegenen Stellen näherungsweise in der Gestalt darstellen:

$$(2) \qquad \frac{a_\nu d(z-z_0)}{(z-z_0)^\nu} + \frac{a_{\nu-1} d(z-z_0)}{(z-z_0)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{a_1 d(z-z_0)}{z-z_0} + a_0 d(z-z_0),$$

für $(z - z_0)$ die p. 497 getroffenen Bestimmungen aufrecht erhalten. Hier scheiden wir nun, wofern $\nu \geqq 1$, den Fall $a_1 = 0$ vom anderen, wo a_1 eine von Null verschiedene Constante ist. Daher die fernere Einteilung der Integrale: *Wir benennen* (1) *als ein Integral der zweiten Gattung, wenn es auf der F_n nur algebraische Unstetigkeitspunkte besitzt; wir benennen es als ein solches von der dritten Gattung, wenn es ausser etwaigen algebraischen Unstetigkeitspunkten auch noch logarithmische besitzt.* In der That liefert (2) im Falle $a_1 \gtrless 0$ für j bei z_0 ein Glied $a_1 \log(z - z_0)$. Den hierbei auftretenden Coefficienten a_1 nennt man das logarithmische Residuum des in Rede stehenden Unstetigkeitspunktes und hat, wie wir nebenher bemerken, den Satz, dass die Summe der Residuen, die für die sämtlichen logarithmischen Unstetigkeitspunkte irgend eines einzelnen Integrals dritter Gattung eintreten, verschwindet**). Ein einfachstes Integral zweiter Gattung würde offenbar das sein, welches an einer bei z_0 gelegenen Stelle der F_n unstetig wird, wie $\frac{1}{z - z_0}$, im

*) Cf. Neumann, Kap. 9. **) Cf. Neumann, p. 203.

übrigen aber auf der F_n allenthalben stetig ist. Wir könnten es als ein elementares Integral zweiter Gattung benennen; in der That werden wir später Integrale dieser Art herstellen und ausführlich zu untersuchen haben. Endlich wäre ein einfachstes Integral dritter Gattung ein solches mit nur zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten z_1, w_1 und z_2, w_2, in denen sich j verhält wie $\log(z - z_1)$ bez. $-\log(z - z_2)$, während sonstige Unstetigkeitspunkte für j auf der F_n nicht auftreten. Auf Integrale dieser Art werden wir gleichfalls bald noch zurückkommen; indessen verschieben wir ihre gründlichere Besprechung bis in einen späteren Abschnitt.

Etwas ausführlicher gehen wir hier auf die Periodicität der Integrale j ein, um späterhin bei der Untersuchung derselben nicht noch einmal verweilen zu müssen. Das Geschlecht unserer Fläche $p > 0$ vorausgesetzt, kann man auf derselben immer geschlossene Curven ziehen, die sich ohne Zerreissen nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. *Führen wir ein vorliegendes Integral j von einem Punkte dieser geschlossenen Curve über deren ganze Länge bis zum Ausgangspunkte zurück, so hat dasselbe einen Wertzuwachs gewonnen, den man als eine Periode von j bezeichnet**). Jene geschlossene Curve benennen wir als die bezügliche Periodenbahn und haben den Satz, dass bei einem Integral der ersten oder zweiten Gattung die Periode unverändert ihren Wert behält, wenn wir die Periodenbahn irgend welcher ohne Zerreissen vor sich gehender Gestaltsänderung auf der F_n unterwerfen. Bei einem Integral dritter Gattung j müssen wir immer auch noch auf die logarithmischen Unstetigkeitspunkte Rücksicht nehmen. Umkreisen wir einen einzelnen solchen, etwa bei z_0 gelegenen, im positiven Sinne, so wird j um die additive Constante $2a_1\pi i$ wachsen, wenn sich j dortselbst wie $a_1 \log(z - z_0)$ verhält. Hier werden wir also eine gerade vorliegende Periodenbahn nicht über einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt von j hinüberziehen dürfen, wenn die bezügliche Periode bei der Verschiebung der Bahn eine Wertänderung nicht erfahren soll.

Geschlossene Wege bezeichneter Art, die zu Periodenbahnen tauglich sind, haben wir nun vor allen Dingen in den Curven a_i, b_i vor uns, welche (im Verein mit den Linien c_i) in Fig. 91, p. 495, das normale Querschnittsystem unserer F_n bildeten. Möge ein vorliegendes Integral, in der Pfeilrichtung der Fig. 91 über die Curve a_i geführt, um die Periode $\omega_1^{(i)}$ zunehmen, desgleichen, über b_i geführt, um

---

*) Es ist diese Begriffsbestimmung genau in Übereinstimmung mit der p. 27 und 28 im besonderen Falle $p = 1$ abgegebenen Definition der Perioden.

die Periode $\omega_2^{(i)}$. Finden wir dann als Wert unseres Integrales für einen gerade betrachteten Punkt der Fläche j, *so ist der allgemeinste durch analytische Fortsetzung erreichbare Wert des Integrales in diesem Punkte der F_n durch*:

$$j' = j + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \omega_1^{(i)} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \omega_2^{(i)} \tag{3}$$

gegeben, wobei die α, β irgend welche ganze Zahlen sind. Hinzusetzen müssen wir natürlich noch, dass für Integrale dritter Gattung j überdies auch noch solche additive Constante hinzukommen, die von Umkreisungen der logarithmischen Unstetigkeitspunkte herrühren.

Der Beweis dieser Behauptung gestaltet sich allgemein gerade so, wie er sich oben p. 28 u. f. im Specialfall $p = 1$ ableisten liess. Wir denken F_n durch das normale Querschnittsystem (Fig. 91, p. 495) in eine einfach zusammenhängende Fläche zerschnitten. In derselben sind alsdann die Integrale erster und zweiter Gattung (um hier der Kürze wegen nur von diesen zu handeln) eindeutige Functionen des Ortes. Inzwischen wird das einzelne gerade betrachtete Integral j in einander gegenüberliegenden Uferpunkten der Schnitte a_i, b_i, c_i, allgemein zu reden, nicht die gleichen Werte haben. So wird zunächst am Ende der Linie b_i der Wert von j um $\omega_2^{(i)}$ grösser sein, als am Ursprung von b_i. Da man aber den Kreuzungspunkt der Periodenbahn b_i mit a_i beliebig nach rechts oder links über a_i hinschieben kann, ohne den Wert $\omega_2^{(i)}$ dadurch zu ändern, so bemerken wir, *dass j zu beiden Ufern des Schnittes a_i allenthalben die constante Wertdifferenz $\omega_2^{(i)}$ aufweist,* und zwar ist dieses der Betrag, um welchen der Wert des Integrals j am rechten Ufer den am linken Ufer stattfindenden übertrifft. Durch leichte Fortsetzung*) dieser Überlegung bemerkt man, dass auch längs c_i unser auf die zerschnittene Fläche eingeschränktes Integral j eine constante Wertdifferenz aufweist; *diese aber ist in einfachster Weise stets Null,* wie man durch Aufstellung der Werte von j in den drei an die Mündung von c_i in a_i sich heranziehenden Spitzen der zerschnittenen F_n beweist. *Endlich besitzt j längs des Schnittes b_i die constante Wertdifferenz $\omega_1^{(i)}$,* und zwar ist dies zufolge der Fig. 91 der Betrag, um welchen der Wert von j am *linken* Ufer von b_i den im gegenüberliegenden Punkte stattfindenden Wert j übertrifft. — Haben wir jetzt in irgend einem Punkte der F_n den Integralwert j erreicht und beschreiben von hier aus in der unzerschnittenen F_n eine beliebige

*) Man vergleiche hier übrigens allenthalben die ausführlichen Darlegungen in Neumann, Kap. 8 und 9.

Periodenbahn, so möge nach Durchlaufung derselben j in j' übergegangen sein. Da brauchen wir dann nur abzuzählen, wie oft und in welcher Richtung diese Periodenbahn die einzelnen Curven a_i, b_i schneidet, um direct die ganzen Zahlen α, β der Relation (3) zu gewinnen, welche j' mit j verknüpft. Dass übrigens durch geeignete Periodenwege auch *jede* Combination ganzer Zahlen α_i, β_i erreicht werden kann, dürfte auf Grund der hiermit gegebenen Deduction ohne weiteres evident sein.

Zum Schlusse müssen wir noch ganz besonders betonen, dass wir gerade wie im vorigen Paragraphen für die algebraischen Functionen nun auch für die Integrale der Fläche F_n eine independente Definition aufstellen können. *Es möge nämlich in j eine Function von z vorliegen, die auf der F_n überall stetig ist, höchstens abgesehen von einer endlichen Anzahl besonderer Punkte der F_n, in denen j entweder algebraisch von ganzzahliger Ordnung oder logarithmisch unendlich wird, habe ferner die so beschränkte Function j die Eigenschaft, bei Durchlaufung eines geschlossenen Weges auf der unzerschnittenen F_n, allgemein zu reden, eine additive Constante anzunehmen, so ist sie ein Integral der Riemann'schen Fläche F_n im voraufgehend erklärten Sinne dieses Wortes.* In der That wird ja die Ableitung $\frac{dj}{dz}$ eine eindeutige Function auf der F_n, und man erkennt überdies sofort an $\frac{dj}{dz}$ alle charakteristischen Eigenschaften einer algebraischen Function der F_n. Es ist sonach $\frac{dj}{dz} = R(w, z)$, wodurch für die hier definierte Function j direct die Darstellung (1) gewonnen ist.

§ 4. Die zur betrachteten Fläche F_n gehörenden Potentiale.

Es sei jetzt durch w irgend eine der in den voraufgehenden beiden Paragraphen betrachteten Functionen bezeichnet, d. i. entweder eine algebraische Function der Fläche oder das Integral einer solchen. Wir wollen dann w in seinen reellen und imaginären Bestandteil spalten, indem wir $w = u + iv$ schreiben, und setzen zugleich für die unabhängige Variabele z deren entsprechenden Ausdruck $z = x + iy$. Der somit vollzogene Schritt ist nicht nur für den Gang unserer weiterhin einzuschlagenden Entwicklung erforderlich, sondern er ist überhaupt von fundamentaler Bedeutung für die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen. Jetzt werden nämlich u und v reelle Functionen der beiden unabhängigen reellen Variabelen x, y sein, und zwar genügen u und v als solche sehr bekannter Weise*) den Differentialgleichungen:

*) Vergl. Neumann p. 12.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Aber man benennt Integrale u der Differentialgleichung (2) im Sprachgebrauch der mathematischen Physik als *Potentiale*. Durch Spaltung von w in die Potentiale u und v haben wir also Anschluss gewonnen an die Anschauungsweisen der mathematischen Physik, was geschichtlich für die Entwicklung der Riemann'schen Theorie von grösster Bedeutung gewesen ist*).

Die Wichtigkeit der Einführung der Potentiale für unsere ferneren Entwicklungen wird in den weiter folgenden Paragraphen hinreichend evident werden. Hier haben wir vorab noch einige allgemeine, sie betreffende Begriffsbestimmungen und Erklärungen abzugeben. Indem wir vor allem daran festhalten, dass w eine zu unserer F_n gehörende Function sein sollte, werden wir die bezüglichen Potentiale u und v gleichfalls als zur Fläche F_n gehörig bezeichnen. Dabei sollen immer solche zwei der F_n zugehörige Potentiale u und v, welche in $(u+iv)$ eine Function der Fläche ergeben, als *conjugierte Potentiale* bezeichnet werden. Es ist dann besonders folgereich, *dass jedes Potential sein conjugiertes Potential bis auf eine additive Constante eindeutig bestimmt;* in der That stellt sich z. B. v auf Grund der Relationen (1) durch u in der Form:

$$v = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) \tag{3}$$

dar, wo wegen (2) unter dem Integralzeichen ein exactes Differential steht und nur die untere irgendwie anzunehmende Integrationsgrenze durch u allein noch nicht näher bestimmt ist**).

Die zu den algebraischen Functionen der F_n gehörenden Potentiale benennen wir als *algebraische Potentiale* der Fläche und sprechen in ganz analoger Weise den Integralen entsprechend kurz von *Potentialen erster, zweiter und dritter Gattung* der Fläche F_n. Alle diese Potentiale sind auch einer unabhängigen Definition fähig, wie wir späterer Verwendung halber insbesondere für die Potentiale erster und zweiter Gattung noch näher ausführen. *Ein Potential u, das auf der F_n überall stetig ist und bei Durchlaufung von eigentlichen Periodenwegen, allgemein gesagt, um eine Constante wächst, ist ein solches der ersten*

*) Man vergl. die Vorrede der p. 493 genannten Schrift von Klein.

**) Vergl. Neumann p. 388 u. f.

Gattung. Es wird nämlich das conjugierte Potential v in einem solchen Falle wegen (3) den nämlichen Charakter wie u besitzen, so dass $(u+iv)$ sich auf Grund der im voraufgehenden Paragraphen entwickelten Sätze als Integral erster Gattung zu erkennen giebt. Ferner aber: *Haben wir in u ein Potential, das auf F_n überall stetig ist, mit Ausnahme einer endlichen Zahl von Punkten, in deren einzelnem dasselbe unstetig wird, wie der reelle Teil einer gewissen Function*

$$(4) \qquad \frac{a_\nu}{(z-z_0)^\nu} + \frac{a_{\nu-1}}{(z-z_0)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{a_1}{z-z_0} + a_0$$

mit ganzzahligem ν, und besitzt u überdies die wiederholt gekennzeichnete Periodeneigenschaft, so haben wir in ihm ein Potential zweiter Gattung vor uns. Insonderheit kann es vorkommen, dass ein Potential zweiter Gattung u auf der unzerschnittenen F_n *eindeutig* ist (was, wie wir sehen werden, bei den Potentialen erster Gattung nicht eintreten kann); dann wird aber das conjugierte Potential v zufolge seiner Integralform (3) im allgemeinen noch ein solches sein, das bei der Durchlaufung von Periodenwegen um Constante zunimmt*). Es wird im speciellen weiterhin ein solches eindeutiges Potential zweiter Gattung der F_n eine wesentliche Rolle spielen, das nur in einem, beliebig vorzuschreibenden Punkte der Fläche F_n unstetig wird, und zwar wie der reelle Teil von $\frac{c}{z-z_0}$, unter z_0 den zum Unstetigkeitspunkte gehörigen Wert von z verstanden; wir bezeichnen dieses Potential weiterhin als ein *elementares Potential zweiter Gattung.* — Es würde schliesslich nicht schwer halten, hier auch noch die Potentiale dritter Gattung einer directen Definition zu unterziehen.

Wir arbeiten im folgenden gelegentlich mit einer geometrischen Versinnlichung unserer Potentiale u durch gewisse Flächen. Indem uns die Ebene der complexen Variabelen z nach Spaltung von z in x und y zur Coordinatenebene x, y geworden ist, wollen wir jetzt im Nullpunkte $x = y = 0$ senkrecht zu dieser Ebene eine dritte Coordinatenaxe errichten, welche wir nun gleich wieder als z-Axe benennen, da die Bezeichnung z für die complexe Variabele $(x+iy)$ zuvörderst nicht in Betracht kommt. Liege nun ein Potential u vor, *so versinnlichen wir dasselbe vermöge der durch:*

$$(5) \qquad z - u(x, y) = 0$$

dargestellten Fläche. Wir haben darin eine zusammenhängende Fläche, die sich senkrecht über allen Unstetigkeitspunkten von u in charakte-

*) Nur erst solche Potentiale u der in Rede stehenden Art, deren conjugierte Potentiale gleichfalls eindeutig sind, sind algebraische.

ristischer Weise ins Unendliche zieht*), die ferner von der einzelnen z-Ordinate jedesmal in n oder unendlich vielen Punkten durchstossen wird, je nachdem u auf der F_n eindeutig oder unendlich-vieldeutig ist.

Sei unser Potential u in der Umgebung irgend eines Punktes der F_n mit den Coordinaten x_0, y_0 stetig, so können wir es für diese Umgebung nach dem Taylor'schen Satze in eine Reihe entwickeln. Indem wir dabei noch $u(x_0, y_0) = u_0 = z_0$ schreiben, finden wir in der Nähe des Punktes x_0, y_0, z_0 unsere Fläche (5) dargestellt durch:

$$(6)\quad \begin{aligned}(z - z_0) &= (x - x_0)\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial u_0}{\partial y_0} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{(x-x_0)^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial y_0} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2}\right\} + \cdots\end{aligned}$$

Wir wollen auf Grund dieser Gleichung eine einfache geometrische Interpretation der Differentialrelation (2) p. 505 entwickeln. Das Bündel der Geraden des Raumes der x, y, z durch den Punkt x_0, y_0, z_0 ist dargestellt durch:

$$(7)\quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

wobei α, β, γ drei endliche Verhältnisgrössen sind. Wollen wir unter diesen Geraden insbesondere die Haupttangenten der Fläche (6) im Punkte x_0, y_0, z_0 haben, d. i. diejenigen Linien, welche an der fraglichen Stelle drei auf einander folgende Punkte mit der Fläche gemein haben, so müssen wir in (6) $x - x_0 = \varkappa\alpha$, $y - y_0 = \varkappa\beta$, $z - z_0 = \varkappa\gamma$ substituieren, alsdann die linke Seite von (6) nach Potenzen des Parameters $\varkappa$ ordnen und die Coefficienten von $\varkappa$ und $\varkappa^2$ mit Null identisch setzen. Solchergestalt ergeben sich für α, β, γ die beiden homogenen Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{aligned}\alpha\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \beta\frac{\partial u_0}{\partial y_0} - \gamma &= 0, \\ \alpha^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0 \partial y_0} + \beta^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2} &= 0.\end{aligned}$$

Gleichung (2) p. 505 besagt nun, dass die Wurzeln $\frac{\alpha}{\beta}$ der zweiten dieser beiden Gleichungen stets reell sind, und dass deren Product der Einheit gleich ist. Dies heisst aber geometrisch: *Unsere Fläche* (6) *ist im betrachteten Punkte* x_0, y_0, z_0 (*und also in jedem nicht singulären Punkte*) *hyperbolisch gekrümmt, und es geben ihre beiden dort stattfindenden Haupttangenten, auf die* xy*-Ebene projiciert, zwei einander senkrecht schneidende Gerade.* Hiermit ist die beabsichtigte Interpretation der Gleichung (2) gefunden.

*) Modelle solcher Flächen sind für einige besondere Potentiale von Hrn. Dyck angefertigt und im Brill'schen Verlage (Darmstadt) erschienen.

§ 5. Formulierung des Existenztheorems bei beliebig gegebener Riemann'scher Fläche F_n. Plan des Beweises.

In den voraufgehenden Erörterungen war F_n überall diejenige Riemann'sche Fläche über der z-Ebene, welche der ursprünglich vorgelegten irreducibelen Relation $f(w, z) = 0$ entsprach. In unseren späteren Entwicklungen wird aber die Sachlage umgekehrt die sein, dass uns n-blättrige Riemann'sche Flächen über einer Ebene *independent* vorgelegt sind, ohne dass von vornherein irgend eine Relation $f(w, z) = 0$ bekannt wäre, für welche die einzelne solche Fläche ein Mittel der Versinnlichung wäre. In der That können wir uns ja ganz unabhängig, nämlich auf rein geometrischem Wege über der z-Ebene eine n-blättrige, zusammenhängende Riemann'sche Fläche F_n mit einer endlichen Anzahl irgend wie gelegener Verzweigungspunkte und mit irgend wie geregeltem Blätterzusammenhange construiert denken und haben jetzt offenbar umgekehrt die Fragestellung auszusprechen: *Gehört zu der so gegebenen Fläche F_n stets ein wirklich existierendes System von algebraischen Functionen und Integralen, wie wir ein solches in den voraufgehenden Paragraphen für die dort zu Grunde liegende F_n kennen lernten?*

Es ist nun ein Fundamentalsatz von Riemann's Theorie der algebraischen Functionen, dass diese Frage thatsächlich in *bejahendem* Sinne zu beantworten ist, dass also zur gegebenen F_n wirklich immer ein solches System von Functionen gehört, *welches letztere demgemäss durch die F_n geradezu als definiert angesehen werden kann.* Wir werden fortan den somit ausgesprochenen Grundsatz der Riemann'schen Theorie kurz als das „Existenztheorem" bezeichnen. Trotz der principiellsten Wichtigkeit, welche man bei unseren ferneren, die elliptischen Modulfunctionen betreffenden Entwicklungen dem Existenztheoreme zuerkennen muss, bleibt es für uns gänzlich ausgeschlossen, einen erschöpfenden Nachweis desselben hier zu erbringen. Es muss vielmehr genügen, dass wir auf die Hauptgesichtspunkte dieses Nachweises hindeuten, um uns sodann in Betracht aller weiteren Ausführungen auf die diesem Gegenstande gewidmeten Einzeldarstellungen zu beziehen. Vorab noch ein paar historische Bemerkungen.

Riemann selbst glaubte (in seinen beiden p. 492 genannten Abhandlungen) das Existenztheorem in einer hier nicht näher zu erörternden Weise vermöge einer der Variationsrechnung entstammenden Schlussweise zum Nachweis bringen zu können, welche schon lange in der Potentialtheorie der Ebene und des Raumes im Gebrauche war und von Riemann zu Ehren seines Lehrers Dirichlet als *Dirichlet'sches Princip* bezeichnet wurde. Es ist indessen diese Schlussweise von

Weierstrass als unzureichend erkannt worden, womit denn die von Riemann gegebene Begründung seines Existenztheorems hinfällig wurde. Inzwischen ist es den Herren Schwarz und C. Neumann gelungen, die betreffenden Sätze der Potentialtheorie und damit das Riemann'sche Existenztheorem in anderer Weise zu stützen*). Diese Arbeiten, die bis zum Beginn der siebziger Jahre zurückreichen, sind in dem Umfange, wie wir sie hier brauchen, (nämlich allein für geschlossene Flächen) 1884 mit der Veröffentlichung des öfter genannten Neumann'schen Werkes als abgeschlossen anzusehen. Daher werden wir, um die Hauptgesichtspunkte des in Rede stehenden Nachweises zu skizzieren, uns eng an das soeben genannte Werk anschliessen, auf welches wir dann bezüglich aller Einzelausführungen verweisen.

Dem Gesagten zufolge wird es sich zunächst nicht darum handeln, die Existenz von *Functionen* auf unserer beliebig gewählten Fläche F_n zu beweisen, vielmehr haben wir zuvörderst mit den *Potentialen* zu beginnen. Unter ihnen ist es das im vorigen Paragraphen definierte elementare Potential zweiter Gattung, welches wir zunächst gewinnen wollen, um von ihm aus ohne besondere Mühe die Potentiale erster und dritter Gattung abzuleiten. Sonach ist es unser nächstes Ziel, *auf F_n die Existenz eines eindeutigen Potentials u zu beweisen, welches überall stetig ist, nur dass es in einem bei z_0 gelegenen Punkte der Fläche sich gerade so verhält, wie der reelle Teil der Function* $\frac{c}{z - z_0}$, unter c eine beliebige complexe Constante verstanden. Be-

*) Vergl. die Zusammenstellung der bezüglichen Citate in Klein's Abhandlung, *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie,* Math. Ann. Bd. 21 p. 156. — In seiner Schrift über Riemann's Theorie hat Klein auf einen genauen Beweis des Existenztheorems überhaupt verzichtet und dafür diejenigen physikalischen Betrachtungen in den Vordergrund gerückt, aus welchen die sämtlichen dem Existenztheoreme verwandten Potentialsätze ursprünglich entstanden sind. Es giebt dies der Darstellung eine besondere Anschaulichkeit, auf die wir im Texte leider haben verzichten müssen, da wir nicht zu weit ausholen durften. Übrigens betrachtet Klein daselbst Functionen nicht nur auf solchen geschlossenen Flächen, die über einer Ebene ausgebreitet sind, sondern überhaupt auf beliebig im Raume verlaufenden geschlossenen Flächen. Die hierin liegende Verallgemeinerung ist für weitergehende functionentheoretische Untersuchungen durchaus wesentlich; für die im Texte zu gebenden Entwicklungen ist dieselbe aber nicht nötig und soll daher gleichfalls bei Seite gelassen werden. — In neuerer Zeit hat Hr. Jules Riemann in seiner Dissertation: *Sur le problème de Dirichlet* (Paris, 1888) eine zusammenhängende Darstellung der Schwarz'schen Untersuchungen geliefert, während andrerseits die betreffenden Originalarbeiten durch das Erscheinen von Schwarz' *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* (Berlin, 1890, in 2 Bänden) in erhöhtem Masse zugänglich geworden sind. Vergl. insbesondere die Zusätze in Bd. 2 daselbst p. 356—362.

merken wir sogleich, dass dieses Potential, wofern es überhaupt existiert, ein völlig bestimmtes ist. Gäbe es nämlich zwei Potentiale u' und u der geforderten Eigenschaft, so wäre ihre Differenz $(u' - u)$ ein eindeutiges Potential *erster* Gattung, das in jenem bei z_0 gelegenen Punkte den Wert Null hätte. Ein „eindeutiges" Potential erster Gattung ist aber, wie wir p. 523 zeigen werden, mit einer Constanten identisch, welche hier offenbar im speciellen den Wert Null besitzt.

Zum Beweise der Existenz des eben gemeinten Potentials zweiter Gattung hat man nun zwei wesentlich verschiedene Untersuchungen anzustellen, deren erstere wir gleich in folgender Weise skizzieren: Möge in irgend einem Blatte von F_n ein kreisförmiger Bereich K abgegrenzt sein, der zuvörderst weder in seinem Innern noch auf seinem Rande einen Verzweigungspunkt der F_n trägt. Auf der Peripherie von K denken wir eine stetige, im übrigen aber willkürliche Folge reeller Werte aufgetragen. Man kann dann zeigen: *Es giebt im Bereiche K ein eindeutiges, überall stetiges Potential, welches stetig in die vorgeschriebenen Randwerte übergeht;* des ferneren aber: *Es giebt auf K ein Potential, das alle soeben namhaft gemachten Eigenschaften besitzt, nur dass es in einem Punkte von K unstetig wird, wie der reelle Teil von* $\frac{c}{z - z_0}$. Allgemein bezeichnet man das Problem der Bildung eines Potentials für einen Bereich B bei vorgeschriebenen Randwerten, sowie fest charakterisierten Unstetigkeitsstellen im Innern von B, als „Randwertaufgabe". Es ist der Charakter dieser Aufgabe, dass sie nur eine *einzige* Lösung zulässt, wofern sie sich überhaupt auflösen lässt*). Für den Kreis kann man, wie wir schon eben aussprachen, diese Lösung thatsächlich und zwar auf ziemlich einfache Weise angeben; wir werden dies im folgenden Paragraphen noch ausführlicher entwickeln.

Ist die Randwertaufgabe für kreisförmige Bereiche K wirklich gelöst, so ist sie dadurch zugleich für alle solche Bereiche mitgelöst, *welche sich conform auf den Kreis K abbilden lassen.* Ein Fall ist hierbei für uns besonders wichtig. Möge der Mittelpunkt von K bei $z = z_1$ gelegen sein, so schreibe man $z' - z_1' = (z - z_1)^\nu$ und suche das conforme Abbild von K in der z'-Ebene auf. Dasselbe stellt offenbar einen ν-fach überdeckten Kreis dar, wobei im Mittelpunkt ein Verzweigungspunkt eintritt, in welchem alle ν über einander geschichteten Blätter cyclisch mit einander zusammenhängen. Solche ν-fach überdeckten Bereiche werden wir weiterhin um die Verzweigungspunkte unserer F_n herum abzusondern haben. Auch für sie lässt sich also die Randwertaufgabe lösen, sobald wir dieselbe erst für einfach bedeckte Kreise K gelöst haben.

*) Cf. Neumann p. 393—396.

An diesen ersten Teil unserer Untersuchung schliesst sich nun zwecks voller Erledigung des Existenztheorems eine zweite wesentlich anders geartete Überlegung. Wir denken auf F_n zwei Bereiche B_1 und B_2 eingegrenzt, die sich beliebig durch die verschiedenen Blätter der F_n hindurchziehen dürfen und irgend welche Verzweigungspunkte der F_n enthalten können. Wir setzen voraus, dass B_1 und B_2 zum Teil über einander greifen und solchergestalt einen kleineren, in einem oder mehreren Blättern von F_n gelegenen Bereich gemeinsam bedecken; heisse dieser kleinere Bereich b, wärend B_1 und B_2 zusammengenommen den Bereich B formieren mögen. Jetzt bestehe die Voraussetzung, dass wir im Besitze einer Auflösungsmethode der Randwertaufgabe sowohl für B_1 wie für B_2 einzeln genommen sind. Man kann alsdann den Nachweis führen, *dass sich auch für den durch Verschmelzung von B_1 und B_2 entspringenden Bereich B die Randwertaufgabe lösen lässt.* Dieser Existenzbeweis eines die Randwertaufgabe für B befriedigenden Potentials wird durch sogenanntes *alternierendes Verfahren* geführt; den ganzen hiermit bezeichneten Ansatz benennt man als *Combinationsmethode.* Wir werden diese Combinationsmethode im übernächsten Paragraphen in einem einfachsten Beispiele erläutern. Die mannigfaltigen, je nach der Gestalt der Bereiche B_1 und B_2 hier möglichen Einzelfälle können wir nicht alle ausführlich nennen und verweisen diesbezüglich wieder auf das Werk von Neumann (Kap. 18).

Wie sich die beiden so gekennzeichneten Untersuchungen zum Existenzbeweise des Elementarpotentials zweiter Gattung auf der gegebenen F_n zusammenschliessen, liegt jetzt sehr nahe. Wir identificieren zunächst B_1 und B_2 mit zwei kreisförmigen Bereichen K_1 und K_2, für welche wir einzeln die Randwertaufgabe zu lösen vermögen, und werden letztere dann auch für den aus K_1 und K_2 durch Verschmelzung entspringenden Bereich B lösen können. Alsdann verschmelzen wir B aufs neue mit einem Kreise K_3 und fahren so fort, unsere Fläche F_n dachziegelartig durch alle ihre Blätter hin mit Kreisscheiben zu überdecken, bis schliesslich keine Lücke mehr bleibt. Dabei werden wir natürlich immer, so oft wir uns einem Verzweigungspunkte angenähert haben, nicht eine einfache Kreisscheibe, vielmehr einen mehrfach überdeckten Kreis von oben beschriebener Art anzuhängen haben. Welche stetigen Randwertfolgen wir bei unserem grösser und grösser werdenden Bereiche B zur Herstellung zugehöriger Potentiale benutzen wollen, ist völlig in unser Belieben gestellt. Dagegen haben wir die Vorschrift, überall stetige Potentiale zu construieren, so lange der für das endlich zu erreichende Potential zweiter Gattung vorgeschriebene Unstetigkeitspunkt noch nicht innerhalb B gelegen ist. Haben wir aber

einmal den Bereich über diesen Punkt hinüber ausgedehnt, so müssen unsere Potentiale fortan an dieser Stelle in vorgeschriebener Weise unendlich werden, übrigens aber allenthalben stetig sein. Ist schliesslich in dieser Weise die Fläche F_n durch alle ihre Blätter hindurch mit Kreisscheiben völlig überdeckt (so dass jede Lücke und damit jeder Randpunkt verschwunden ist), so haben wir, wie man sofort bemerkt, damit von selbst am Schlusse gerade dasjenige Potential gewonnen, dessen Existenz wir beweisen wollten*).

Unsere nächste Aufgabe ist jetzt, wie schon in Aussicht genommen, auf die beiden hier in Frage kommenden Specialuntersuchungen, nämlich auf die Lösung der Randwertaufgabe für kreisförmige Bereiche, sowie auf die Combinationsmethode noch ein wenig näher einzugehen.

§ 6. Lösung der Randwertaufgabe für kreisförmige Bereiche**).

Indem wir jetzt zunächst einige ausführlichere Angaben über die Lösung der Randwertaufgabe für kreisförmige Bereiche machen, denken wir als Kreis K der Einfachheit halber den Einheitskreis der xy-Ebene gewählt und nehmen nun auf der Peripherie desselben irgend eine stetige Folge reeller Werte gegeben an. Es gilt dann, ein auf K überall stetiges und eindeutiges Potential u anzugeben, das stetig in die aufgepflanzten Randwerte übergeht. Wir verfahren zur Lösung dieser Aufgabe wie folgt.

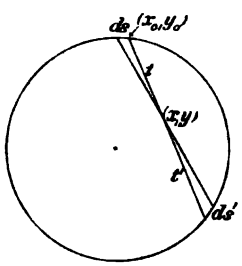


Fig. 92.

Ein beliebiger Punkt auf der Peripherie von K habe die Coordinaten x_0, y_0, ein beliebiger Punkt im Innern von K aber x, y. Die durch diese beiden Punkte zu legende Sehne des Kreises K werde durch den letzteren Punkt in die beiden Abschnitte t und t' zerlegt, wie hierneben in Fig. 92 angegeben. Der Quotient

$$\frac{t'}{t} = \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tag{1}$$

bildet dann, unter constanten x_0, y_0 als Function von x, y gedeutet, wie man durch leichte Rechnung bestätigt, für das ganze Innere von K ein überall stetiges Potential; in den Randpunkten von K selbst wollen wir zuvörderst den Quotienten (1) noch nicht näher untersuchen. Wir bezeichnen jetzt den im Punkte x_0, y_0 vorgeschriebenen Randwert des gesuchten Potentials durch u_s und benennen zugleich ein bei x_0, y_0 liegendes Element des Randes von K durch ds (cf.

*) Vergl. hier Neumann, p. 454. **) Cf. Neumann, Kap. 17.

Fig. 92). Wir bilden dann das Product $\frac{t'}{t} u_s ds$ und stellen, jetzt unter constant gedachten x, y, die nachfolgende Summe von solchen Potentialen her:

$$(2) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{t'}{t} u_s ds,$$

geführt über die ganze Peripherie von K*). *Die dergestalt erhaltene, im Innern von K überall stetige Function $u(x, y)$ von x und y ist, wie wir nun behaupten, das gesuchte Potential u.*

Dass wir es in (2) in der That mit einem Potentiale zu thun haben, ist an sich klar, weil jeder Factor $\frac{t'}{t}$ ein solches vorstellt. Es ist also nur noch zu zeigen, dass das Potential (2) bei Annäherung an die Peripherie von K stetig in die dort aufgepflanzten Randwerte übergeht; wir ziehen zu solchem Ende eine von Hrn. Schwarz angegebene Interpretation der Formel (2) heran**). In Fig. 92 ist auch noch die durch den Endpunkt des Elementes ds und den Punkt x, y bestimmte Sehne des Kreises K gezogen, wobei nun das Bogenelement ds über den Punkt x, y hinüber in das Element ds' projiciert erscheint. Dabei ist ersichtlich $\frac{t' ds}{t} = ds'$, so dass wir Formel (2) in die nachfolgende Gestalt transformieren können:

$$(3) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int u_s ds' = \frac{1}{2\pi} \int u_{s'} ds.$$

Der Wert von $2\pi \cdot u(x, y)$ wird hiernach gefunden, indem man das Bogenelement ds mit demjenigen Randwerte u_s multipliciert, welcher am anderen Endpunkte der durch die Lage von ds und den Punkt x, y bestimmten Sehne stattfindet, und das so entstehende Differential $u_s ds$ über die Peripherie von K integriert. Es bedarf nur einer kurzen Überlegung dieser Verhältnisse, um einzusehen, dass $u(x, y)$ bei Annäherung des Punktes x, y an einen Randpunkt von K in den gerade dort vorgeschriebenen Wert stetig übergeht. Die vorgelegte Aufgabe ist sonach in der That durch das in (2) gegebene Potential $u(x, y)$ gelöst***).

*) Das auf der rechten Seite der Formel (2) stehende Integral, welches sich übrigens noch in eine ganze Reihe verschiedener Gestalten überführen lässt, heisst das Poisson'sche. Man vergl. bezüglich dieser Benennung die Angaben von Schwarz in einer sogleich zu nennenden Arbeit in Crelle's Journal Bd. 74 p. 227.

**) Vergl. Ges. Abhandlungen, II p. 360.

***) Ob dabei das für das Innere von K definierte Potential $u(x, y)$ auch auf dem Rande dieses Bereiches partielle Ableitungen nach x und y besitzt, sowie der Differentialgleichung (2) p. 505 genügt, hängt augenscheinlich von den gewählten Randwerten ab. Es ist übrigens für uns nicht erforderlich, auf speciellere Fragen dieser Art hier einzugehen. Man vergl. vielmehr in diesem Betracht die bereits

Der Fall, dass für u im Inneren von K ein Unstetigkeitspunkt der von uns zu betrachtenden Art vorgeschrieben ist, erledigt sich jetzt mühelos. Möge u im Punkte z_0 von K unstetig werden wie der reelle Teil von $\frac{c}{z-z_0}$. Dieser reelle Teil u' giebt für K ein Potential ab, dessen Randwerte wir mit u_s' bezeichnen wollen, während die für u vorgeschriebenen Randwerte wie bisher u_s heissen. Wir bilden uns dann durch Subtraction der beiderseitigen Randwertfolgen die dritte $u_s^{(0)} = u_s - u_s'$ und stellen auf Grund der soeben gewonnenen Regel das zu diesen Randwerten $u_s^{(0)}$ gehörige auf K überall stetige Potential $u^{(0)}$ auf. *Alsdann ist offenbar*

$$u = u' + u^{(0)} \tag{4}$$

das von uns gesuchte Potential, dessen Existenz hiermit bewiesen ist.

§ 7. Beschreibung der Combinationsmethode in einem speciellen Falle.

Um nun auch über den Inhalt der *Combinationsmethode* kurz Bericht zu erstatten, nehmen wir an, dass die beiden im vorletzten Paragraphen mit B_1 und B_2 bezeichneten Bereiche in einfachster Weise Kreise K_1, K_2 seien, die sich in zwei Punkten P, Q schneiden (cf. Fig. 93). Wie wir soeben sahen, sind wir dann thatsächlich in der Lage, für K_1 und K_2 einzeln die Randwertaufgabe zu lösen. Dabei ist es jetzt besonders nützlich, für diese in K_1 und K_2 existierenden Potentiale auf die am Schluss von § 4 (p. 506) geschilderte geometrische Interpretation der Potentiale zurückzukommen. Wir denken uns also ein einzelnes z. B. auf K_1 existierendes Potential durch eine Fläche versinnlicht, welche über K_1 schwebt und in eine über der Berandung von K_1 hängende Randcurve eingespannt ist. Indem wir hier der Einfachheit wegen Unstetigkeitspunkte für die zu construierenden Potentiale innerhalb K_1 (sowie auch K_2) nicht vorschreiben, wird die einzelne der eben gemeinten Flächen durch Angabe ihrer über der Peripherie von K_1 schwebenden Randcurve völlig bestimmt sein.

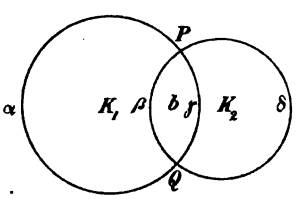


Fig. 93.

---

eben erwähnte Abhandlung von Schwarz, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, Crelle's Journ. Bd. 74 (1871) oder Ges. Abh. II, p. 184, sowie auch die Abhandlung von Prym, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, in Crelle's Journal, Bd. 73 (1871).

Ehe wir vorwärts gehen, müssen wir vorerst noch auf eine Eigenschaft unserer Potentiale hindeuten, die wir sogleich anschauungsmässig mit Hilfe der bezüglichen Flächen skizzieren. *Die beiden Punkte der einzelnen Fläche mit grösster und kleinster Ordinate z sind stets auf dem Rande derselben d. i. über der Peripherie von K_1 zu finden, niemals im Innern der Fläche**). Die über dem Rande von K_1 für unsere Fläche stattfindenden Höhenschwankungen werden also durch den innern Verlauf der Fläche mehr und mehr ausgeglichen. Zieht man insbesondere durch das Innere der Fläche hindurch irgend eine Curve, so wird der Unterschied der Ordinaten z des höchsten und tiefsten Punktes der Fläche längs dieser Curve zum entsprechenden auf dem Rande stattfindenden Unterschied in einem Verhältnis stehen, dessen Zahlwert ein *echter*, von der Einheit um eine *endliche* Differenz verschiedener Bruch ist**). Wir brauchen kaum hinzuzufügen, dass diese zunächst an K_1 angeknüpften Bemerkungen selbstverständlich in völlig gleicher Weise auch für K_2 gelten.

Wie schon in Fig. 92 angedeutet ist, soll der von K_1 und K_2 zugleich bedeckte Bereich b heissen, während durch Verschmelzung von K_1 und K_2 längs b der grössere Bereich B entstehe. Für die auf den beiden Peripherien durch die Punkte P und Q abgeschnittenen Bogen nehmen wir die in der Figur angegebenen Bezeichnungen α, β, γ, δ auf. Nun ist uns längs der aus α und δ bestehenden Berandung von B eine stetige Folge reeller Werte gegeben, die wir längs α und δ bez. durch u_α und u_δ bezeichnen. Unsere Aufgabe ist, *ein auf B überall stetiges und eindeutiges Potential zu bilden, das stetig in diese Randwerte u_α, u_δ übergeht.* Wir verfahren zur Lösung derselben, wie folgt.

Längs α denken wir uns die Werte u_α als Ordinaten aufgetragen, denken sodann längs γ irgend welche stetige reelle Wertfolge u_γ willkürlich ausgewählt, nur dass sie über P und Q hinüber stetig in die Werte u_α übergehen soll, und errichten die Werte u_γ gleichfalls als Ordinaten. Dergestalt ist über der Peripherie von K_1 eine Randcurve beschrieben, in welche wir nunmehr die das bezügliche Potential $u^{(1)}$ versinnlichende Fläche einspannen. Die längs β stattfindenden Werte von $u^{(1)}$ mögen zusammengefasst $u_\beta^{(1)}$ heissen; selbige bilden im Verein mit u_δ eine längs des Randes von K_2 vorgeschriebene stetige Folge reeller Werte. Wir spannen jetzt die diesen Randwerten entsprechende

*) Neumann, p. 395; man vergl. auch obige Entwicklung über die durchgängige hyperbolische Krümmung der Flächen (p. 507).

**) Ueber die genauere Durchbildung und den Beweis dieser Angaben vergl. man Neumann, Kap. 16 § 3, p. 397 u. f.

Fläche über K_2 aus, die uns das Potential $u^{(2)}$ versinnliche; letztere Fläche wird dann mit der soeben schon über K_1 ausgespannten Fläche über β zusammengeheftet sein. Umgekehrt bezeichnen wir nun wieder die Werte von $u^{(2)}$ über γ durch $u_\gamma^{(2)}$ und haben dann in u_α und $u_\gamma^{(2)}$ eine brauchbare Randwertfolge für K_1; ihr entsprechend wollen wir über K_1 eine neue Fläche ausspannen, die dem Potential $u^{(3)}$ angehören möge. Dieses Potential benutzen wir dann gerade wie $u^{(1)}$ für die Gewinnung eines neuen Potentials $u^{(4)}$ für K_2 u. s. w. In dieser Bildung von Potentialen abwechselnd für K_1 und K_2 nach der beschriebenen Regel besteht nun gerade die Combinationsmethode, die wir hier schildern wollten*).

In der That lässt sich jetzt vor allen Dingen der Nachweis erbringen, dass der beschriebene Process ein *convergenter* ist. Über K_1 ist eine Reihe von Flächen ausgespannt, welche die Potentiale $u^{(1)}$, $u^{(3)}$, $u^{(5)}$, $\cdots$ versinnlichen. Der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden Flächen verschwindet, wie wir behaupten, mehr und mehr, je weiter wir in der Reihe fortgehen. Diese Flächen nähern sich also einer gewissen Ruhelage an, *welche letztere für K_1 eine eindeutige, überall stetige Function $u^{(\infty)} = u_1$ von x und y definiert.* Man ziehe nämlich den Unterschied $U^{(2k-1)} = u^{(2k+1)} - u^{(2k-1)}$ von zwei auf einander folgenden unter unseren Potentialen in Betracht und setze übrigens entsprechend $U^{(2k)} = u^{(2k+2)} - u^{(2k)}$ für den Bereich K_2. $U^{(2k-1)}$ ist durch eine über K_1 ausgespannte Fläche versinnlicht, die in Fig. 92 linker Hand in den Bogen α selbst eingespannt ist, rechts aber längs γ sich über die xy-Ebene erheben oder unter dieselbe herabsinken mag. Nach den über die Flächen unserer Art vorausgeschickten Bemerkungen sind die Höhenschwankungen der eben gemeinten Fläche $U^{(2k-1)}$ längs β kleiner als die längs γ stattfindenden. Aber gerade über β ist die zu $U^{(2k)}$ gehörende Fläche an die Fläche von $U^{(2k-1)}$ angeheftet, während auf der andern Seite die Fläche von $U^{(2k)}$ in den Bogen δ selbst eingespannt ist. Wir schliessen jetzt umgekehrt, dass die Höhenschwankungen dieser letzteren Fläche über γ geringer sind, als diejenigen, welche dieselbe längs β zeigt. Da aber nun wieder über γ an diese Fläche die zu $U^{(2k+1)}$ gehörende Fläche angeheftet ist, so erblickt man leicht das Resultat: Die Fläche von $U^{(2k+1)}$, die übrigens linker Hand gleichfalls in den Bogen α eingespannt ist, zeigt längs γ geringere Höhenschwankungen als die Fläche von $U^{(2k-1)}$. Indem

*) Der Grundgedanke dieser Methode ist aus der mathematischen Physik hergenommen; wir erinnern z. B. daran, wie man sich den Ladungsprocess zweier einander influenzierender leitender Körper mit Elektricität vorstellt.

wir den verticalen Unterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Punkte dieser Flächen längs γ durch $M(U_\gamma^{(2k+1)})$ bez. $M(U_\gamma^{(2k-1)})$ bezeichnen, ist sonach:

$$M(U_\gamma^{(2k+1)}) \leqq e M(U_\gamma^{(2k-1)}), \tag{1}$$

wobei wir noch besonders betonen, dass e hier einen von k unabhängigen echten, um eine endliche Differenz von der Einheit verschiedenen Bruch bedeuten darf. Nunmehr können wir das für K_1 definierte Potential $u^{(2k+1)}$ offenbar durch die Reihe

$$u^{(2k+1)} = u^{(1)} + U^{(1)} + U^{(3)} + \cdots + U^{(2k-1)} \tag{2}$$

darstellen. Da aber, wie wir wissen, der grösste und kleinste Wert eines auf K_1 existierenden Potentials stets auf dem Rande von K_1 sich findet, so hat man aus (1) die Folgerung zu ziehen, dass die unter (2) gegebene Reihe auch für unendlich wachsende Zahl k im ganzen Bereiche K_1 eine endliche Summe $u^{(\infty)} = u_1$ hat; denn dies trifft längs der ganzen Berandung von K_1 zu.

Des näheren aber ergiebt sich aus (1) vermöge einer Überlegung, die wir hier nicht reproducieren können*), dass der Wert u_1 dieser Summe eine in K_1 überall stetige, eindeutige und der Differentialgleichung (2) p. 505 genügende Grösse darstellt. In der That ist dieser letztere Umstand mit der blossen Endlichkeit der Grösse u_1 noch keineswegs bewiesen. Freilich werden ja die Potentiale $U^{(1)}$, $U^{(3)}$, $U^{(5)}$, $\cdots$ oder, wie wir gleich sagen werden, die Flächen $U^{(1)}$, $U^{(3)}$, $\cdots$, einzeln genommen, immer flacher und flacher sich gestalten, aber dennoch könnten sie in ihrer Summe (2) eine Fläche $u^{(2k+1)}$ zusammensetzen, die mit wachsendem k immer mehr wellig wird, um schliesslich bei $k = \infty$ zu einer Fläche zu werden, die in jedem endlichen, wenn auch noch so kleinen Teile Höhenschwankungen aufweist. Dann würde u_1 im allgemeinen keine Ableitungen nach x und y besitzen und könnte also auch kein Integral der Differentialgleichung (2) p. 505 vorstellen. Inzwischen ist das Eintreten derartiger Verhältnisse, wie man l. c. nachsehen wolle, ausgeschlossen, und wir werden also den Satz formulieren können: *u_1 stellt ein auf K_1 überall stetiges, eindeutiges Potential dar.* — Ein Gleiches beweist man in völlig analoger Weise für diejenige Grösse u_2, der die Reihe der Potentiale $u^{(2)}$, $u^{(4)}$, $u^{(6)}$, $\cdots$ mehr und mehr zustrebt.

Um zum Schlusse zu kommen, bemerke man nunmehr, dass die Potentiale $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ $u^{(3)}$, $\cdots$ für den Bereich b mit den Randcurven β und γ zugleich definiert sind. Da wollen wir für beliebiges k die

*) Cf. Neumann, p. 432 u. f.

Differenz zwischen $u^{(2k)}$ und $u^{(2k-1)}$ durch $\overline{U}^{(k)}$ bezeichnen und in ihrem Verlauf über den Bereich b hin näher betrachten. Da $u^{(2k)}$ und $u^{(2k-1)}$ längs β dieselben Werte haben, so ist für jeden Punkt dieses Kreisbogens $U^{(k)} = u^{(2k)} - u^{(2k-1)} = 0$. Längs γ ist $u^{(2k-1)}$ allenthalben mit $u^{(2k-2)}$ gleich; hier ist also

$$\overline{U}^{(k)} = u^{(2k)} - u^{(2k-2)} = U^{(2k-2)},$$

und nun wissen wir, dass bei unendlich wachsendem k die Werte von $U^{(2k-2)}$ für den ganzen Bereich K_2 und damit auch für alle Punkte der Curve γ gegen Null convergieren. Es wird demnach das Potential $U^{(\infty)} = u_2 - u_1$ für die ganze Berandung von b und also auch für alle inneren Punkte dieses Bereichs verschwinden. Indem aber hiernach u_1 und u_2 auf dem von K_1 und K_2 gemeinsam bedeckten Bereiche b identisch ausfallen, *stellen sie, zusammen betrachtet, ein einziges für den ganzen Bereich B definiertes eindeutiges, überall stetiges Potential dar. Dass dieses nun gerade das verlangte Potential ist*, geht aus unserer anfänglichen Entwicklung ohne weiteres hervor.

Wir haben solcherweise in einem speciellen Falle alle diejenigen Gesichtspunkte namhaft gemacht, welche auch bei einem erschöpfenden Nachweise des Existenztheorems sich als ausreichend erweisen. Solches wird man in der That bei dem Studium des Neumann'schen Werkes bemerken.

§ 8. Herstellung der Potentiale dritter und erster Gattung.

Indem wir jetzt zu unserer beliebig gewählten Riemann'schen Fläche F_n zurückkehren, dürfen wir zufolge des nun vollendeten Excurses annehmen, dass auf derselben thatsächlich ein eindeutiges Potential zweiter Gattung u existiert, welches nur in einem bei der willkürlich gewählten Stelle z_0 gelegenen Punkte der F_n unstetig wird, wo es sich wie der reelle Teil von $\frac{c}{z - z_0}$ verhält. Dieses Potential u lässt sich nun leicht noch so umgestalten, dass wir von ihm aus ohne Mühe die Potentiale erster und dritter Gattung der F_n gewinnen können. Man wolle zu dem Ende u mit der unendlich kleinen *reellen* Zahl da multiplicieren und $uda = u_{z_0}$ setzen, während man andrerseits das Product der endlichen complexen Constanten c mit da als complexes Differential $dz_0 = cda$ schreibe. Man bemerkt ohne weiteres: *Das Elementarpotential u_{z_0} ist auf der F_n bis auf jenen bei z_0 gelegenen Punkt überall eindeutig, stetig und mit dz_0 von gleicher Grössenordnung; in dem einen soeben ausgeschlossenen Punkte verhält es sich aber wie der reelle Teil von $\frac{dz_0}{z - z_0}$*. Betonen wir noch ausdrücklich, dass dieses

Elementarpotential u_{z_0} durch das Differential dz_0 und Angabe seines Unstetigkeitspunktes auf der F_n eindeutig bestimmt ist (cf. p. 510).

Um jetzt wieder mit Grössen endlicher Ordnung zu thun zu haben, müssen wir unendlich viele solche Potentiale u_{z_0} zusammen addieren. Wir wollen solches in zwei charakteristisch unterschiedenen Weisen hier wirklich durchführen. Möge man zuvörderst auf der Fläche F_n das Differential dz_0 am Unstetigkeitspunkte z_0 von u_{z_0} antragen, um das solchergestalt vom fraglichen Punkte bei z_0 zum benachbarten $(z_0 + dz_0)$ führende Linienelement fortan als Axe des Potentials u_{z_0} zu bezeichnen. Diese Axe ist alsdann durch ihren Anfangspunkt auf der F_n, ihre Länge und Richtung völlig bestimmt, und wir bemerken jetzt weiter, *dass das Elementarpotential zweiter Gattung u_{z_0} seinerseits durch Angabe seiner Axe eindeutig bestimmt ist.* Nun wollen wir einerseits Elementarpotentiale unserer Art in unendlicher Zahl derart an einander reihen, dass der Anfangspunkt der Axe jedes folgenden Potentials mit dem Endpunkt der Axe des ihm voraufgehenden coincidiert, wobei sich dann alle in Betracht kommenden Axen etwa, wie Fig. 94 anzeigt, zu einer gebrochenen Linie zusammensetzen, die von $z_0 = a$ nach $z_0 = b$ hinführen möge. Wir wollen diese Massnahme kurz als „axiale" Aneinanderreihung von Elementarpotentialen u_{z_0} bezeichnen. Andrerseits

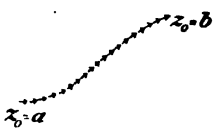


Fig. 94.

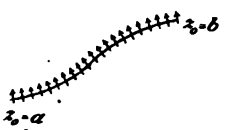


Fig. 95.

denke man sich die soeben zur Verwendung gekommenen Axen etwa um ihre Anfangspunkte samt und sonders in der Richtung wachsender Winkel um 90^0 gedreht, so erhalten wir die schon gezogene Linie von $z_0 = a$ nach $z_0 = b$ mit lauter gegen sie senkrecht verlaufenden Axen besetzt, wie Fig. 95 zeigt. Hierbei sprechen wir dann von einer „transversalen" Aneinanderreihung der diesen Axen zugehörigen Potentiale*).

Die axiale Aneinanderreihung erledigt sich jetzt sehr einfach. Möge die Kette der an einander gehängten Axen, wie wir schon annahmen, bei $z_0 = a$ beginnen und bei $z_0 = b$ endigen, während die-

*) Man vergl. hier, namentlich auch wegen der Beziehungen der beiden in Aussicht genommenen Massnahmen zur mathematischen Physik (Aneinanderreihung magnetischer Moleküle), die bezüglichen Angaben von Klein im 21ten Bande der Mathem. Ann. p. 161 und 162. Bei Neumann (Kap. 18) wird der Existenzbeweis zunächst nicht auf das Elementarpotential zweiter Gattung gerichtet, vielmehr auf die Potentiale dritter Gattung, die wir erst aus denen der zweiten herstellen.

selbe zwischen diesen beiden Punkten den in Fig. 94 schematisch dargestellten Verlauf zeigt. Durch Summierung aller bezüglichen Elementarpotentiale zweiter Gattung entstehe das Potential $u_{a,b}$, das wir als Integral

$$(1) \qquad u_{a,b} = \int_{z_0=a}^{z_0=b} u_{z_0},$$

genommen über die in Fig. 94 dargestellte Bahn, schreiben können. Um das Verhalten des Potentials $u_{a,b}$ in der Umgebung der zurückgelegten Integrationsbahn zu untersuchen, müssen wir auf das Verhalten jedes einzelnen Elementarpotentials u_{z_0} in seinem Unstetigkeitspunkte zurückgehen. Offenbar wird sich $u_{a,b}$ in Bezug auf Unstetigkeiten wie der reelle Teil des Integrals

$$\int_{z_0=a}^{z_0=b} \frac{dz_0}{z - z_0}$$

verhalten. Aber es ist

$$(2) \qquad \int_{z_0=a}^{z_0=b} \frac{dz_0}{z - z_0} = \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right),$$

und also ist dieser fragliche reelle Teil in der Umgebung der Integrationsbahn überall eindeutig und stetig, letzteres jedoch nur bis auf die beiden Punkte $z = a$ und $z = b$, in denen er wie der reelle Teil von $\log(z-a)$ bez. $-\log(z-b)$ unstetig wird. Da $u_{a,b}$ in allen übrigen Teilen der Fläche F_n aber jedenfalls eindeutig und stetig ist, so entspringt das Resultat: *Durch axiale Aneinanderreihung von Elementarpotentialen zweiter Gattung u_{z_0} entspringt ein auf der F_n eindeutiges Potential dritter Gattung mit zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten, die im Anfangs- und Endpunkt der Kette der Axen gelegen sind.*

Hierbei bietet sich eine neue Auffassung des Elementarpotentials zweiter Gattung dar. Setzen wir nämlich in $u_{a,b}$ für a und b bez. die Specialwerte z_0 und $(z_0 + dz_0)$, so geht $u_{a,b}$ ersichtlich wieder in das Elementarpotential zweiter Gattung u_{z_0} über. *Letzteres können wir sonach als eindeutiges Potential dritter Gattung mit zwei einander unendlich nahe liegenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten ansehen.* Durch diese Auffassungsweise wird es besonders leicht verständlich, weshalb bei der in (1) ausgeführten Aneinanderreihung im innern Verlaufe der Integrationsbahn alle Unstetigkeitspunkte zum Wegfall kommen, während nur am Anfang und Ende derselben je ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt zurückbleibt.

Um nun die transversale Aneinanderreihung unter Zugrundelegung der Fig. 95 durchzuführen, müssen wir uns zuvörderst mit denjenigen

eindeutigen Elementarpotentialen u'_{z_0} versehen, die in Anbetracht der Lage des Unstetigkeitspunktes mit den unter (1) zur Verwendung gekommenen Potentialen übereinstimmen, nur dass die Axen durchgehends um 90^0 gedreht erscheinen. Wir werden uns diese Potentiale u'_{z_0} ohne Mühe verschaffen. In der That war im Anfang des Paragraphen die mit c bezeichnete complexe Constante ganz willkürlich. Denke man also nur an Stelle von c vielmehr ic, dementsprechend statt dz_0 jetzt idz_0 gesetzt, so werden wir durch Wiederholung der obigen Massnahmen statt u_{z_0} gerade zu den beabsichtigten Grössen u'_{z_0} gelangen. Wir haben also das Resultat: *Das Elementarpotential u'_{z_0} ist auf der F_n bis auf jenen bei z_0 gelegenen Punkt überall eindeutig, stetig und mit dz_0 von gleicher Ordnung; im soeben ausgeschlossenen Punkte verhält es sich aber wie der reelle Teil von $\frac{idz_0}{z - z_0}$.*

Indem wir jetzt wieder längs der schon in (1) gebrauchten Bahn die Aneinanderreihung vornehmen, kommt unter Aufnahme eines geeigneten numerischen Factors:

$$(3) \qquad u'_{a,b} = \frac{-1}{2\pi} \int_{z_0 = a}^{z_0 = b} u'_{z_0}.$$

Bei der Untersuchung dieses Integrales hat man sich zunächst die Fläche F_n längs des Integrationsweges zerschnitten zu denken, wobei dann ein Überschreiten des Querschnittes der Variabelen z zu verbieten ist. Möge die solchergestalt vorbereitete Riemann'sche Fläche kurz F'_n heissen. Ohne alsdann sogleich nach den Werten des Integrals in Punkten der Integrationsbahn selbst zu fragen, werden wir jedenfalls für alle anderen Teile der F'_n in $u'_{a,b}$ ein eindeutiges stetiges Potential besitzen. Aber man bemerke, dass in gegenüberliegenden Punkten des Querschnitts dieses eindeutige Potential $u'_{a,b}$ der F'_n die constante Wertdifferenz 1 zeigen wird; denn in diesem Betracht muss sich, wie man leicht sieht, $u'_{a,b}$ gerade so wie der reelle Teil von

$$(4) \qquad \frac{-1}{2\pi} \int_{z_0 = a}^{z_0 = b} \frac{idz_0}{z - z_0} = \frac{-i}{2\pi} \log \frac{z - a}{z - b}$$

auf der F'_n verhalten. Nun aber bilde man sich aus $u'_{a,b}$ die unendlich vielen auf der F'_n eindeutigen Functionen $u'_{a,b} \pm 1$, $u'_{a,b} \pm 2$, $\cdots$. Diese, in zweckmässiger Folge angereiht, liefern uns offenbar die unendlich vielen Zweige eines auf der unzerschnittenen Fläche überall stetigen Potentials, das also, wie wir noch besonders hervorheben (auf Grund von Formel 4) selbst in den beiden Punkten $z = a, b$ stetig bleibt. Man sieht, *dass wir auf diesem Wege ein vieldeutiges Potential*

dritter Gattung erlangt haben, das bei positiver Umkreisung des Punktes $z = a$ um $+1$, bei positiver Umkreisung von $z = b$ aber um -1 sich ändert, *und dessen zunächst erhaltener einzelner Zweig* $u'_{a,b}$ *auf dem rechten Ufer des oben gezogenen Querschnitts um* $+1$ *grösser ist als auf dem linken**).

Zu wesentlich neuen Ergebnissen werden wir nun geführt, wenn wir für den hier wiederholt benutzten Integrationsweg eine Periodenbahn der F_n zu Grunde legen, *wobei wir also das Geschlecht* p *unserer* F_n *grösser als Null vorauszusetzen haben.* Da wird sich der bei der axialen Aneinanderreihung zu Beginn der Integration am Anfangspunkte der Bahn zunächst eintretende Unstetigkeitspunkt beim Abschluss derselben gerade fortheben, so dass die in den beiden Fällen entspringenden Potentiale u und u' *auf der ganzen Fläche* F_n *endlich und stetig* sind. Dabei bemerkt man sofort, dass u auch auf der unzerschnittenen F_n eindeutig ist und also nach einem sogleich zu beweisenden Satze mit einer Constanten identisch ist. *Demgegenüber besitzen wir in* u' *ein Potential, das auf der längs der Integrationsbahn zerschnittenen Riemann'schen Fläche* F_n *eindeutig ist, dabei aber längs des Querschnittes die constante Wertdifferenz* $+1$ *aufweist.* Auf der unzerschnittenen F_n werden wir also in u' ein Potential besitzen, *welches freilich überall stetig, dafür aber nicht mehr eindeutig ist, vielmehr eben jener constanten Wertdifferenz entsprechend die Periode* $+1$ *besitzt.* Damit haben wir also in u' ein Potential *erster* Gattung der F_n gewonnen und werden von hieraus deren Gesamtheit leicht bilden**).

Von den jetzt gewonnenen Potentialen erster und zweiter Gattung werden wir nun sogleich wieder zu den Integralen dieser Gattungen übergehen. Den entsprechenden Übergang zu den Integralen dritter Gattung verschieben wir bis zu einer späteren Gelegenheit.

---

*) Wir denken uns diesen Querschnitt in der Richtung von a nach b durchlaufen, so dass die Pfeile der Fig. 95 vom rechten zum linken Ufer weisen.

**) Man könnte übrigens auch noch in Betracht ziehen, was entstehen wird, wenn wir transversale Aneinanderreihung (3) längs einer geschlossenen Curve vornehmen, welche die F_n in zwei getrennte Stücke zerlegt. Da erhalten wir offenbar zunächst zwei getrennte, überall stetige Functionen für beide Bereiche, die längs jener geschlossenen Curve um $+1$ differieren. Aber diese Functionen müssen nun einfache Constante sein; vermehrt man nämlich die eine Function um $+1$, so werden sie zusammengenommen ein auf der ganzen Fläche stetiges eindeutiges Potential abgeben, und ein solches ist eine Constante. Hiermit ist zugleich evident geworden, warum die Entwicklungen des Textes $p > 0$ voraussetzen.

§ 9. Zwei Hülfssätze über Potentiale und Integrale der ersten Gattung.

Um die Gesamtheit der Integrale *erster* Gattung auf unserer willkürlich gewählten Fläche F_n zu überblicken, müssen wir die bezüglichen Potentiale selbst noch ein wenig näher verfolgen. Wir schalten deshalb an dieser Stelle die Ableitung zweier Hülfssätze ein, deren ersten wir bereits wiederholt benutzten. Bei diesen die Potentiale und Integrale *erster* Gattung betreffenden Erörterungen ist selbstverständlich, wie wir wiederholen, das Geschlecht der F_n als $p > 0$ vorauszusetzen. Wo es nötig ist, möge man zur Zerschneidung der F_n ein normales Querschnittsystem (cf. Fig. 91, p. 495) zu Grunde legen; zum Zwecke einer kurzen Bezeichnung benennen wir die solchergestalt zerschnittene Fläche durch F_n'.

Um die in Aussicht genommenen Hülfssätze abzuleiten, verstehen wir unter $w = u + iv$ irgend eine Function, die auf einem in der F_n eingegrenzten Bereiche allenthalben eindeutig und stetig ist. Zufolge elementarer Betrachtungen*) besteht dann die Identität:

$$\int\int \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx dy = \int u dv,$$

wobei das links stehende Integral über das ganze Innere des gedachten Bereiches, das Integral rechter Hand aber über dessen ganze Berandung in positiver Richtung zu erstrecken ist. Wir wollen Formel (1) dahin specialisieren, dass wir unter u ein Potential erster Gattung und also unter v das ihm conjugierte Potential erster Gattung verstehen, für den zu Grunde liegenden Bereich aber die zerschnittene Fläche F_n' wählen. Die in Betracht kommende Berandung setzt sich alsdann aus den Linien a_k, b_k, c_k der Fig. 91, p. 495 zusammen, und zwar ist jedesmal das linke Ufer in der Pfeilrichtung, das rechte aber in der entgegengesetzten Richtung zu durchlaufen.

Hier können wir nun zunächst mühelos den Beweis liefern, *dass ein auf der F_n eindeutiges Potential erster Gattung mit einer Constanten identisch ist*, ein Satz, den wir bereits wiederholt zur Verwendung brachten. In der That nehme man an, es sei u auf der F_n ein eindeutiges Potential erster Gattung, während natürlich das conjugierte Potential v zunächst als vieldeutiges Potential erster Gattung anzusehen ist, dessen Vieldeutigkeit sich aber auf das etwaige Zutreten von Perioden beschränkt. Man betrachte nun auf der über den Rand von F_n' führenden Integrationsbahn zwei Linienelemente, die bezüglich

*) Dies ist ein Specialfall des sog. Green'schen Satzes, cf. Neumann p. 26.

einer der Linien a_k, b_k, c_k einander gerade gegenüber liegen. Für beide Elemente hat u den nämlichen Wert, dv dagegen hat im einen Element gerade den entgegengesetzten Wert, wie im anderen; die Integrationsrichtung im einen Element ist ja derjenigen im anderen gerade entgegengesetzt und dv als solches ist auf unserer Fläche eindeutig. Man sieht, dass sich die Beträge, welche die beiden in Rede stehenden Elemente für unser Integral liefern, gerade gegenseitig fortheben, woraus dann ohne weiteres der Schluss entspringt, dass für gegenwärtigen Fall die rechte Seite von (1) verschwindet. Das Integral auf der linken Seite von (1) setzt sich aber, wie man sieht, aus lauter reellen, nicht negativen Differentialen zusammen. Wir schliessen sofort, dass dieselben in unserem Falle ohne Ausnahme verschwinden müssen. Sonach ist für die ganze Fläche $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, d. h. es ist u mit einer Constanten identisch, wie wir behaupteten.

Mit denselben Mitteln können wir jetzt ferner den folgenden, gleichfalls häufig zu verwendenden Satz beweisen: *Ein zur F_n gehörendes Integral erster Gattung $w = u + iv$, welches stets einen verschwindenden Integralwert liefert, wenn man es über irgend eine der p Curven b_k führt, oder (anders ausgedrückt) das, auf die zerschnittene Fläche F_n eingeschränkt, längs der Querschnitte a_k keine Wertdifferenzen aufweist, ist mit einer Constanten identisch.*

Es wird nämlich auch für die nun in Rede stehenden Potentiale u, v die rechte Seite von (1) verschwinden, wenn wir als Integrationsbahn wieder die soeben zu Grunde gelegte benutzen. Für diejenigen Teile dieser Bahn, die sich aus den Ufern der Linien a_k, c_k zusammensetzen, liegen die Verhältnisse in der That gerade, wie in dem soeben besprochenen Falle. Betrachte man des ferneren die beiden Strecken unserer Bahn, welche von den beiden Ufern etwa der Linie b_k geliefert werden. In zwei einander gegenüberliegenden Elementen zur linken und rechten Seite von b_k habe der reelle Teil unseres vorgelegten Integrales w bez. die Werte u und $(u + \tau)$, wo also τ eine längs des Schnittes b_k feste Constante bedeutet. Ist weiter das Differential des imaginären Teiles vom Integral w im Elemente linker Hand dv, so hat es (da wieder die Integrationsrichtung auf der rechten Seite die entgegengesetzte ist) rechts den Wert $-dv$, und beide Elemente zusammen liefern für das Randintegral auf der rechten Seite von (1) den Betrag

$$udv - (u + \tau)dv = -\tau dv.$$

Die ganze Linie b_k (d. i. ihre beiden Ufer) ergeben sonach für die rechte Seite von (1) den Beitrag $-\tau \int_{b_k} dv$, wo dieses Integral jetzt in

der Pfeilrichtung der Fig. 91, p. 495 über die geschlossene Linie b_k auszudehnen ist. Eben dieses letzte Integral $\int dv$ ist aber zufolge unserer Voraussetzung mit Null identisch, weil es denjenigen Betrag liefert, welchen v, auf F_n' eingeschränkt, längs a_k als Wertdifferenz aufweist. Die rechte Seite von (1) verschwindet demnach wieder, womit sich unsere Behauptung bestätigt.

§ 10. Die $2p$ Potentiale und die p Integrale erster Gattung der F_n.

Das am Schlusse des vorletzten Paragraphen auf unserer willkürlich gewählten F_n gefundene Potential erster Gattung u wird zu einer eindeutigen Function des Punktes der Fläche, wenn wir diese letztere längs der damals benutzten Periodenbahn wieder zerschneiden und u auf die so erhaltene zerschnittene Fläche einschränken. Am rechten Ufer des Schnittes weist alsdann u Werte auf, die jeweils um den Betrag $+1$ den im gegenüberliegenden Punkt stattfindenden Wert übertreffen.

Für die hier gemeinte Periodenbahn wollen wir nun nach und nach die $2p$ geschlossenen Linien a_k, b_k zu Grunde legen und finden dementsprechend $2p$ Potentiale $u_1, u_2, \cdots, u_{2p}$, wobei im Sinne der gerade reproducierten Angaben u_k zur Linie a_k, u_{p+k} aber zu b_k gehöre. Es soll also u_1, um es nochmals zu betonen, auf der F_n' eindeutig sein und dabei einzig nur am Schnitt a_1 eine nicht-verschwindende Wertdifferenz (nämlich $+1$) aufweisen u. s. w. Wir bemerken, *dass die $2p$ hiermit eingeführten Potentiale erster Gattung $u_1, u_2, \cdots$ durch ihre Periodicitätseigenschaften bis auf additive Constante fest bestimmt sind.* Giebt es nämlich ein Potential erster Gattung u_1', das dieselben Periodicitätseigenschaften wie u_1 besitzt, so ist $(u_1' - u_1)$ auf der F_n durchweg eindeutig und also nach dem gerade bewiesenen Hülfssatze mit einer Constanten identisch.

Wir behaupten jetzt weiter: *Es giebt auf der F_n ein Potential erster Gattung u, das, auf die F_n' eingeschränkt, an den $2p$ Schnitten a_k, b_k beliebig ausgewählte $2p$ reelle Wertdifferenzen A_k, B_k aufweist**); *dieses Potential u ist bis auf eine additive Constante fest bestimmt.* Letzterer Umstand folgt ohne weiteres durch die Überlegung, die wir soeben schon bei u_1 zur Verwendung brachten. Die Existenz des Potentials u ergiebt sich aber sofort aus seiner Darstellung vermöge

*) Wie bisher, meinen wir mit A_k, B_k immer den Überschuss der am rechten Ufer des bezüglichen Querschnitts stattfindenden Werte über die am linken Ufer.

der eben aufgestellten Potentiale $u_1, u_2, \cdots, u_{2p}$. In der That ist diese Darstellung durch:

$$u = \sum_{k=1}^{p} (A_k u_k + B_k u_{p+k}) + C \tag{1}$$

geleistet, wobei A_k, B_k jene ausgewählten reellen Zahlen sind, C aber die willkürlich bleibende reelle Constante bedeutet.

Während sonach auf der einen Seite sich alle Potentiale erster Gattung der F_n linear in den $2p$ Potentialen $u_1, u_2, \cdots, u_{2p}$ ausdrücken lassen, bilden ihrerseits diese letzteren, wie wir hier noch zu betonen haben, *ein System linear-unabhängiger Grössen.* Bestände nämlich zwischen denselben die lineare Identität mit reellen Coefficienten:

$$\sum_{k=1}^{p} (\alpha_k u_k + \beta_k u_{p+k}) = c, \tag{2}$$

so verfolge man doch auf der F_n' die linke Seite von (2) in ihrer Eigenschaft als Potential erster Gattung. Dasselbe wird an den Schnitten a_k, b_k bez. die Wertdifferenzen α_x, β_x aufweisen. Da es indessen auf der ganzen F_n mit c identisch sein soll, so folgt

$$\alpha_k = \beta_k = 0$$

und daraus auch $c = 0$. Eine Identität (2) kann also nicht bestehen*).

Um jetzt zu den Integralen erster Gattung selbst zu gelangen, mag v_k dasjenige Potential erster Gattung sein, welches zu dem soeben mit u_k bezeichneten Potentiale conjugiert ist. Wir bilden uns dann zunächst die $2p$ zur F_n gehörigen Integrale der ersten Gattung:

$$w_k = u_k + iv_k$$

und gewinnen aus den gerade vorausgeschickten Entwicklungen über die Potentiale den Satz: *Jedes zur F_n gehörende Integral erster Gattung $w = u + iv$ lässt sich (und zwar nur auf eine Weise) vermittelst reeller Coefficienten A_k, B_k in der Form:*

$$w = \sum_{k=1}^{p} (A_k w_k + B_k w_{k+p}) + C' \tag{3}$$

darstellen, wobei C' eine im allgemeinen complexe Constante ist. Das Potential u nämlich, welches den reellen Teil von w darstellt, gestattet eine Darstellung (1), und es wird sich alsdann das conjugierte

*) Wir brauchen kaum hervorzuheben, dass sich ein System von $2p$ linear-unabhängigen Potentialen erster Gattung noch in der mannigfaltigsten Weise wählen lässt. Jedes System von $2p$ linearen Functionen der $u_1, u_2, \cdots, u_{2p}$ mit reellen Coefficienten liefert ein solches, wenn nur die $2p$-gliedrige Determinante der hierbei auftretenden Coefficienten der u_k einen von Null verschiedenen Wert hat.

Potential v in der nämlichen Gestalt durch die v_k darstellen lassen, nur dass dabei das constante Glied einen anderen Wert bekommen mag. Aus diesen beiden Darstellungen setzt man dann leicht die Formel (3) zusammen.

Nun aber sind die so in ihrer Gesamtheit gewonnenen Integrale erster Gattung „complexe" Functionen der F_n, und es entspricht diesem Umstande durchaus, wenn wir an Stelle der soeben bei der Darstellung (3) zur Verwendung gebrachten reellen Coefficienten nun auch complexe gebrauchen wollen. Dann mag es sehr wohl sein, dass wir zur linearen Darstellung aller Integrale erster Gattung der F_n keineswegs die gesamten $2p$ Integrale $w_1, w_2, \cdots, w_{2p}$ benötigen. Denken wir uns, um hier Klarheit zu gewinnen, aus der Reihe der w ein solches System von $q < 2p$ Integralen herausgenommen, die selbst noch linear-unabhängig sind, jedoch zur linearen Darstellung jedes $(q+1)^{\text{ten}}$ Integrales erster Gattung der F_n ausreichend sind; diese q Integrale nennen wir etwa $w_1', w_2', \cdots, w_q'$. Da gilt es nun zuvörderst, den Wert der hier mit q bezeichneten Zahl in Erfahrung bringen.

Bemerke man zu dem Ende, dass sich jedes Integral erster Gattung $w = u + iv$ der F_n jedenfalls nur in einer einzigen Weise linear in der Gestalt

$$u + iv = \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i + i\beta_i)(u_i' + iv_i') + c_1 + ic_2$$

durch die q Integrale $w_i' = u_i' + iv_i'$ darstellen lässt. Indem wir hier u mit dem reellen Bestandteil der rechten Seite identificieren, entspringt das Resultat: Das beliebige Potential erster Gattung u lässt sich auf *eine und nur auf eine* Weise durch die $2q$ Potentiale u_i', v_i' darstellen. Dieserhalb ist offenbar $q = p$; denn da die eben gemeinte Darstellung von u in den $2q$ Potentialen u_i', v_i' überhaupt möglich ist, so muss notwendig $2q \geqq 2p$ sein; da andrerseits diese Darstellung nur in *einer* Weise zu leisten ist, müssen die u_i', v_i' linear unabhängig sein, so dass $2q \leq 2p$ ist*). Wir haben so bewiesen: *Aus der Gesamtheit der zur F_n gehörenden Integrale erster Gattung lässt sich (und zwar wieder auf die mannigfaltigste Weise) ein System von p linear-unabhängigen Integralen auswählen, in denen nun jedes $(p+1)^{\text{te}}$ linear mit constanten Coefficienten darstellbar ist.* Ein besonders zweckmässiges System von p linear-unabhängigen Integralen erster Gattung werden wir im folgenden Paragraphen einführen.

*) Es folgt dies alles ohne weiteres aus den betreffs der Potentiale erster Gattung zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphen gewonnenen Resultaten.

§ 11. Die p Normalintegrale erster Gattung der F_n.

Die beiden Hülfssätze des vorletzten Paragraphen geben betreffs der Potentiale und Integrale erster Gattung der F_n zu einer sehr merkwürdigen Gegenüberstellung Anlass.

Unter allen Potentialen erster Gattung der Fläche F_n lassen sich im ganzen $2p$ linear-unabhängige auswählen, unter allen Integralen erster Gattung in entsprechender Weise im ganzen p. Es giebt auf der F_n ein Potential erster Gattung u, welches, auf die F_n' eingeschränkt, längs der $2p$ Linien a_k, b_k beliebig gewählte reelle Wertdifferenzen*) aufweist; durch diese Wertdifferenzen ist u bis auf eine additive Constante bestimmt. Insbesondere haben wir $2p$ linear-unabhängige Potentiale $u_1, u_2, \cdots, u_{2p}$ vermöge ihrer Wertdifferenzen in solcher Weise definiert, dass sie, wie oben ausführlich erörtert, den $2p$ Curven a_k, b_k in charakteristischer Art zugeordnet waren. *In ganz analoger Art lassen sich die Integrale der ersten Gattung der Hälfte der Querschnitte, etwa den p Linien a_k zuordnen*, wie wir nun näher auszuführen haben. Vorab bemerke man, *dass ein Integral erster Gattung w seinerseits bis auf eine Constante durch die p Wertdifferenzen bestimmt ist, welche es, auf F_n' eingeschränkt, längs der Linien a_k aufweist.* In der That ergiebt sich dies aus dem zweiten Hülfssatze des § 9 gerade so, wie der analoge Satz für die Potentiale aus dem ersten Hülfssatze daselbst folgt. Hier würde die Analogie eine vollständige sein, wenn wir die p Wertdifferenzen an den Linien a_k beliebig (reell oder complex) auswählen könnten und dann immer der Existenz eines zugehörigen Integrals erster Gattung der F_n sicher sein würde. Wirklich ist dies aber statthaft, wie wir hier durch Einführung eines Systems von p „Normalintegralen" der ersten Gattung beweisen wollen.

Sei ein System von p linear-unabhängigen Integralen erster Gattung der F_n durch $w_1, w_2, \cdots, w_p$ bezeichnet. Das einzelne unter ihnen, w_k, besitze, auf die F_n' eingeschränkt, längs der Curve a_i die Wertdifferenz A_{ik}. Die p-gliedrige Determinante $|A_{ix}|$ dieser p^2 Zahlen A_{ik} hat, wie wir zunächst behaupten, notwendig einen von Null verschiedenen Wert. Wäre sie nämlich mit Null identisch, so könnte man nach bekannten Sätzen p nicht durchgängig verschwindende Constante $c_1, c_2, \cdots, c_p$ finden, für welche bei allen p Werten von i

$$c_1 A_{i1} + c_2 A_{i2} + \cdots + c_p A_{ip} = 0$$

erfüllt wäre. Die linken Seiten dieser p Gleichungen geben aber die Wertdifferenzen des Integrals $(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_p w_p)$ an den

*) Immer könnten diese Wertdifferenzen als Perioden von u bezeichnet werden, woran wir hier nebenher erinnern wollen.

Querschnitten a_i. Letzteres ist also, da die fraglichen Wertdifferenzen alle verschwinden, nach § 9 mit einer Constanten, etwa $-c_0$, identisch, so dass eine Gleichung mit nicht durchgehends verschwindenden Coefficienten identisch bestehen würde:

$$c_0 + c_1 w_1 + \cdots + c_p w_p = 0.$$

Dies widerspricht indessen der über die w gemachten Voraussetzung, linear-unabhängig zu sein, und also ist notwendig $|A_{ik}| \gtrless 0$.

Wir bilden uns jetzt für die F_n ein neues System von p Integralen erster Gattung:

$$\begin{aligned} j_1 &= c_{11} w_1 + c_{12} w_2 + \cdots + c_{1p} w_p, \\ j_2 &= c_{21} w_1 + c_{22} w_2 + \cdots + c_{2p} w_p, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ j_p &= c_{p1} w_1 + c_{p2} w_2 + \cdots + c_{pp} w_p, \end{aligned}$$

wobei die p^2 Coefficienten c durch nachfolgende Überlegung bestimmt werden. Wir wollen verlangen, dass das einzelne Integral j_i, auf F_n' eingeschränkt, unter den p Schnitten a nur an dem einzigen a_i eine von Null verschiedene Wertdifferenz, und zwar $+1$, aufweist. Die p Coefficienten $c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{ip}$ müssen demgemäss den p linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{i1} A_{k1} + c_{i2} A_{k2} + \cdots + c_{ip} A_{kp} &= 0, \quad k \gtrless i, \\ c_{i1} A_{i1} + c_{i2} A_{i2} + \cdots + c_{ip} A_{ip} &= 1 \end{aligned}$$

genügen. Durch diese aber sind die $c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{ip}$ gerade eindeutig bestimmt, da, wie wir soeben sahen, die Determinante $|A_{ik}| \gtrless 0$ ist.

Wie man jetzt nachträglich leicht bestätigt, bilden die p solchergestalt gewonnenen Integrale (1) ein System linear-unabhängiger Grössen; wir wollen dieselben kurz als *die Normalintegrale erster Gattung der F_n* bezeichnen*). Diese p Normalintegrale j stehen nun zu den p Querschnitten a_i gerade in derjenigen Zuordnung, wie die Potentiale $u_1, u_2, \cdots, u_{2p}$ des vorigen Paragraphen zu den $2p$ Curven a_i, b_i. Die Analogie zwischen den Potentialen und Integralen erster Gattung findet daher wirklich in dem Umfange statt, wie wir am Anfang des gegenwärtigen Paragraphen angaben.

Die Wertdifferenzen, welche die j, auf der F_n' betrachtet, an den Querschnitten b aufweisen, sind uns von vornherein nicht näher bekannt.

*) Dieselben sind offenbar mit dem zu Grunde gelegten normalen Querschnittsystem zugleich bestimmt. Letzteres lässt sich aber, gerade wie wir dies schon bei $p = 1$ erkannten (cf. p. 28 u. f.), auch im allgemeinen Falle auf unendlich viele Weisen auswählen. Dementsprechend lassen sich auch Systeme von Normalintegralen erster Gattung der F_n auf unendlich viele Weisen fixieren. — Wir können auf diesen wichtigen Gegenstand hier leider nicht näher eingehen.

Wir wollen dieselben übrigens, wofern wir sie gelegentlich gebrauchen sollten, durch τ_{ik} bezeichnen, und man entnehme das Nähere aus der hier für die Wertdifferenzen oder, anders ausgedrückt, für die Perioden der Normalintegrale entworfenen Tabelle:

	$a_1, a_2, \cdots, a_p$	$b_1, b_2, \cdots, b_p$
j_1	$1, 0, \cdots, 0$	$\tau_{11}, \tau_{12}, \cdots, \tau_{1p}$
j_2	$0, 1, \cdots, 0$	$\tau_{21}, \tau_{22}, \cdots, \tau_{2p}$
.	. . . . .	. . . . .
j_p	$0, 0, \cdots, 1$	$\tau_{p1}, \tau_{p2}, \cdots, \tau_{pp}$.

Unter den p^2 Grössen τ_{ik} sind übrigens jedesmal die beiden τ_{ix} und τ_{xi} einander gleich. Auf den Beweis dieser Behauptung, sowie auf fernere sich hier anschliessende Sätze*) gehen wir hier nicht ein, da wir sie künftighin doch nicht verwenden werden.

§ 12. Die Integrale, insbesondere die Normalintegrale zweiter Gattung der F_n.

Während die letztvoraufgehenden Entwicklungen das Geschlecht p der Fläche F_n stets > 0 vorausgesetzt hatten, gilt die nachfolgende an die Potentiale zweiter Gattung anknüpfende Betrachtung gleichmässig auch für die Flächen F_n des Geschlechtes $p = 0$. Inzwischen wollen wir doch hier vorerst $p > 0$ voraussetzen, um hernach die auf den Fall $p = 0$ bezüglichen besonders einfachen Folgerungen in einem Paragraphen für sich zu entwickeln.

Auf unserer willkürlich gewählten Fläche F_n giebt es, wie wir früher sahen, ein eindeutiges Potential u, das zugleich überall stetig ist bis auf einen willkürlich auf der F_n gewählten, etwa bei z_0 gelegenen Punkt, in dem u wie der reelle Teil von $\frac{1}{z - z_0}$ unendlich wird. Das mit u conjugierte Potential sei v; dasselbe wird, wie u, ein Potential zweiter Gattung der F_n vorstellen, ist jedoch auf der F_n im allgemeinen vieldeutig. Setzen wir jetzt u und v zu $w_{z_0} = u + iv$ zusammen, so haben wir in w_{z_0} eine complexe Function der F_n gewonnen, die überall stetig ist bis auf jenen einen bei z_0 gelegenen Punkt, in welchem w_{z_0} unendlich wird wie $\frac{1}{z - z_0}$, die ferner auf der F_n' eindeutig ist und längs der Schnitte a_i, b_i lauter rein imaginäre Wertdifferenzen aufweist. Hiernach ist zufolge früherer Sätze w_{z_0} *ein Integral zweiter Gattung der* F_n, und wir bezeichnen w_{z_0} noch genauer als ein *zu jenem Punkte* z_0 *gehöriges Integral zweiter Gattung.*

*) Man vergl. in dieser Hinsicht Neumann, p. 246 u. f.

Auf Grund des ersten Hülfssatzes in § 9, p. 523 beweist man jetzt mühelos, dass w_{z_0} durch die namhaft gemachten Eigenschaften bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Lassen wir nunmehr von der Forderung ab, dass die constanten Wertdifferenzen längs der a_i, b_i rein imaginär sein sollen, verlangen wir vielmehr ein Integral w'_{z_0} zu besitzen, das übrigens alle Eigenschaften von w_{z_0} hat, nur dass die fraglichen Wertdifferenzen irgend welche complexen Beträge haben dürfen, so ist w'_{z_0} noch keineswegs fest bestimmt. Vielmehr genügt den gestellten Anforderungen ersichtlich jede Function

$$(1) \qquad w'_{z_0} = w_{z_0} + c_0 + c_1 j_1 + c_2 j_2 + \cdots + c_p j_p,$$

wobei w_{z_0} das soeben gemeinte besondere Integral ist, die Grössen c irgend welche complexe Constante, die j aber unsere Normalintegrale erster Gattung bedeuten. Man bemerkt zugleich, dass jedes zur Stelle z_0 gehörige Integral zweiter Gattung der F_n in der Gestalt (1) darstellbar ist.

Hier ist jetzt besonders bemerkenswert, dass wir die Constanten $c_1, c_2, \cdots, c_p$ in der Art bestimmen können, *dass das dargestellte Integral w'_{z_0}, auf die F'_n eingeschränkt, längs aller p Querschnitte a_i verschwindende Wertdifferenzen aufweist.* Sind nämlich die Wertdifferenzen des w_{z_0} an den fraglichen Querschnitten a_i durch $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$ bezeichnet, so schreiben wir unter Einführung einer besonderen Bezeichnungsweise

$$(2) \qquad Z_{z_0} = w_{z_0} - \nu_1 j_1 - \nu_2 j_2 - \cdots - \nu_p j_p.$$

Die so definierte Grösse nennen wir *das zur Stelle z_0 gehörende Normalintegral zweiter Gattung*; dasselbe hat in der That, auf die F'_n eingeschränkt, längs der Curven a_i keine Wertdifferenzen. Aus dem zweiten Satze des § 9, p. 524, folgt, *dass das Normalintegral Z_{z_0} durch seine Unstetigkeitsstelle bis auf eine additive Constante fest bestimmt ist.*

Die constanten Wertdifferenzen, welche Z_{z_0} an den p Querschnitten b aufweist, sollen $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_p$ heissen. Für diese Zahlen τ_k giebt es eine sehr wichtige Darstellung vermittelst der Normalintegrale erster Gattung, von welcher wir künftighin Gebrauch zu machen haben. Bringen wir also gleich jetzt diese Darstellung zur Ableitung! Wir integrieren zu dem Ende das Differential $Z_{z_0} dj_k$ über die ganze Berandung der F'_n, und zwar in der bereits in § 9, p. 523, gewählten Richtung. Dabei kommen dann gerade wieder die Betrachtungen zur Geltung, die auch an der soeben citierten Stelle massgeblich waren. Es liefern zunächst die Linien c_i und a_i keinen Beitrag für unser Integral $\int Z_{z_0} dj_k$, da Z_{z_0} längs dieser Schnitte keine von Null verschiedene Differenzen aufweist. Des ferneren werden sich wieder die beiden auf die Ufer des einzelnen Querschnitts b_i bezüglichen Teile unseres Randintegrals

zusammenfassen lassen und liefern $-\tau_i \int dj_k$, wo letzteres Integral in der Pfeilrichtung der Fig. 91, p. 495 über die geschlossene Curve b_i auszudehnen ist. Vermöge der Definition der Normalintegrale j hat aber dieses Integral stets den Wert Null, so oft $i \gtrless k$ ist, dagegen den Wert $+1$, falls $i = k$ ist. Als Gesamtbetrag unseres Integrales über den Rand der F_n' findet sich so:

$$\int Z_{z_0} dj_k = -\tau_k. \tag{3}$$

Jetzt dürfen wir unbeschadet des Integralwertes die Integrationsbahn auf der F_n' zusammenziehen, wenn wir dieselbe nur nicht über die bei $z = z_0$ liegende Unstetigkeitsstelle von Z_{z_0} hinüberziehen. Insbesondere kann man, da F_n' einfach zusammenhängend ist, die fragliche Bahn auf einen beliebig kleinen Kreis um diesen Unstetigkeitspunkt zusammenziehen, welcher bei der hier vorliegenden Integrationsrichtung im positiven Sinne zu durchlaufen sein wird. Denken wir den Radius des Kreises sehr klein gewählt, so können wir zum Zwecke der Auswertung des Integrals

$$Z_{z_0} = \frac{1}{z - z_0}, \quad dj_k = \left(\frac{dj_k}{dz}\right)_{z=z_0} \cdot dz$$

setzen, wobei in der letzten Formel die Ableitung von j_k im Unstetigkeitspunkte von Z_{z_0} genommen sein soll. Wir finden solcherweise:

$$\int Z_{z_0} dj_k = \left(\frac{dj_k}{dz}\right)_{z=z_0} \cdot \int \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi \left(\frac{dj_k}{dz}\right)_{z=z_0}. \tag{4}$$

Durch Vergleich von (3) *und* (4) *ergiebt sich die beabsichtigte Darstellung von* τ_k:

$$\tau_k = -2i\pi \left(\frac{dj_k}{dz}\right)_{z=z_0}. \tag{5}$$

Die sich hier ohne weiteres anschliessenden Folgerungen für $p = 0$, auf die wir schon oben hinwiesen, leiten uns in das eigentliche Gebiet der algebraischen Functionen der F_n zurück. Von den letzteren handeln wir im folgenden Kapitel im Zusammenhang.

Zweites Kapitel.

Weiterführung von Riemann's Theorie der algebraischen Functionen.

Im voraufgehenden Kapitel haben wir auf unserer beliebig gewählten Fläche F_n die Existenz von Integralen der ersten und zweiten Gattung erkannt und hätten mühelos auch diejenigen der dritten Gattung herstellen können, die wir jedoch erst bei einer späteren Gelegenheit heranziehen. Auf Grund der so bezeichneten Resultate hat es nun keine Schwierigkeit mehr, die Aufstellung auch der algebraischen Functionen der F_n zu leisten, was in der That der Zweck des gegenwärtigen Kapitels ist. Da es sich später in erster Linie um die algebraischen Functionen der F_n handeln wird, so werden wir hier bei Aufstellung derselben ein wenig länger verweilen müssen. Insbesondere müssen wir denjenigen Besonderheiten gerecht werden, welche der einzelnen F_n je nach ihrem Geschlechte p zukommen. Wir beginnen in diesem Sinne geradezu mit einer speciellen Betrachtung über die Geschlechter $p = 0$ und $p = 1$.

§ 1. Die algebraischen Functionen auf einer Riemann'schen Fläche F_n des Geschlechtes $p = 0$.

Ein erstes wichtiges Resultat unserer bisherigen Entwicklungen ist eine besonders einfache Theorie für den Fall, dass unsere beliebig gewählte Fläche F_n dem Geschlechte $p = 0$ angehört. Sehen wir sogleich zu, was in diesem Falle aus den Integralen erster und zweiter Gattung wird, die wir oben allgemein einführten.

Wir wiederholen erstlich: Auf der F_n des Geschlechtes $p = 0$ giebt es keinen eigentlichen Periodenweg, demgemäss kein Potential der ersten Gattung und also auch kein Integral dieser Gattung. Die oben aufgestellten Potentiale der zweiten Gattung existieren demgegenüber auf allen Flächen und also auch auf denen des Geschlechtes $p = 0$. Das Besondere, was für den letzten Fall eintritt, besteht aber darin, dass ein solches Potential u auf der F_n nicht nur eindeutig gewählt werden kann, sondern unter allen Umständen eindeutig ist, wieder weil eigentliche Periodenwege auf der F_n nicht existieren. Aus

dem nämlichen Grunde ist dann auch das zu u conjugierte Potential v auf der F_n eindeutig. Wir besitzen demgemäss, wenn wir übrigens die Potentiale u, v hier gerade so gewählt denken, wie in § 12, p. 530 des vorigen Kapitels, in $w = u + iv$ eine auf der F_n *eindeutige Function, welche überall stetig ist, abgesehen nur von einem übrigens willkürlich gewählten, bei z_0 gelegenen Punkte, wo sich w wie $\frac{1}{z - z_0}$ verhält und also einfach unendlich wird.*

Auf Grund der Entwicklungen p. 498 u. f. erkennt man hiernach in w sofort *eine einwertige algebraische Function der Fläche*, die also jeden complexen Wert in einem und nur einem Punkte der F_n annimmt. Allgemein wollen wir jetzt eine einwertige algebraische Function unserer F_n als eine *Hauptfunction* dieser Fläche bezeichnen und sind dann jedenfalls der Existenz wenigstens einer solchen Hauptfunction, wie wir gerade sehen, gewiss. Verstehen wir aber sogleich unter w irgend eine Hauptfunction unserer Fläche F_n des Geschlechtes $p = 0$, so wird man aus den schon eben citierten Entwicklungen des vorigen Kapitels ohne weiteres folgern, dass zwischen w und z eine irreducibele algebraische Relation $f(w, z) = 0$ besteht, in der w bis auf den n^{ten} Grad ansteigt, z aber nur im ersten Grade enthalten ist. *Infolge des letzteren Umstandes ist z als rationale Function der Hauptfunction w:*

$$z = r(w) \tag{1}$$

darstellbar.

Mit w gehören nun alle rationalen Functionen von w und z als algebraische Functionen zur Fläche F_n, und wir gewinnen so bekanntlich (cf. p. 499) die Gesamtheit der zur F_n gehörenden algebraischen Functionen. Da wir aber zufolge (1) z seinerseits wieder als rationale Function von w darstellen können, so erhalten wir den für spätere Verwendung überaus wichtigen Satz: *Das System der zu unserer Fläche des Geschlechtes $p = 0$ gehörenden algebraischen Functionen deckt sich mit dem System der rationalen Functionen $R(w)$ unserer zur F_n gehörenden Hauptfunction w.* Dieser Satz ist, wie leicht zu sehen, für die Flächen des Geschlechtes $p = 0$ charakteristisch.

Wir haben bislang nur erst die Existenz einer einzigen Hauptfunction w der F_n bewiesen, was ja für die Aufstellung der soeben erhaltenen Sätze ausreichend war. Jetzt wollen wir uns über die Gesamtheit der Hauptfunctionen der F_n unterrichten. Sei also w' eine zweite, so wird dieselbe rational in w darstellbar sein $w' = R(w)$, und zwar muss diese rationale Function R *linear* sein:

$$w' = \frac{aw + b}{cw + d}, \tag{2}$$

da in der That mit w auch w' auf der F_n einwertig sein soll. Man bemerkt umgekehrt, dass jedes solche in der Gestalt (2) dargestellte w' eine Hauptfunction der F_n ist, wofern nur (damit w' nicht eine Constante wird) die Determinante $(ad - bc)$ einen von Null verschiedenen Zahlwert hat. Die in den vier Coefficienten von (2) liegende Willkürlichkeit ist indessen nur eine ∞^3-fache, da wir dieselben mit einem beliebigen von Null verschiedenen gemeinsamen Factor versehen können, ohne damit w' zu ändern. Merken wir uns also: *Es giebt auf unserer F_n des Geschlechtes Null ∞^3 Hauptfunctionen, die alle in jeder einzelnen, beliebig unter ihnen gewählten linear darstellbar sind.*

Es fragt sich, wie wir unter all' diesen Hauptfunctionen der F_n eine besondere in einfachster Weise zu charakterisieren vermögen. Die zu diesem Zweck zu gebende Regel stellen wir gleich so auf, wie sie späterhin häufigst zur Verwendung kommen wird. Wir fixieren uns drei getrennt liegende Punkte der F_n, in denen die der Darstellung der übrigen zunächst zu Grunde gelegte particuläre Hauptfunction w die Werte w_0, w_1, w_2 annehmen möge. *Eine zu construierende Hauptfunction w' soll in diesen drei Punkten bez. die Werte* 0, 1, ∞ *annehmen;* durch diese Bestimmung ist alsdann w', wie wir behaupten, gerade vollständig bestimmt. Setzen wir nämlich die drei zugleich eintretenden Wertsysteme w, w' in (2) ein, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$aw_0 + b = 0, \quad cw_2 + d = 0, \quad cw_1 + d = aw_1 + b,$$

welche sich zur endgültigen Bestimmung der Quotienten der a, b, c, d gerade als ausreichend erweisen und

$$w' = \frac{w - w_0}{w - w_2} \cdot \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_0} \tag{3}$$

ergeben.

Besonders interessant ist es endlich (wegen der Rückbeziehung auf frühere Untersuchungen), wenn wir die complexe Ebene irgend einer particulär gewählten Hauptfunction w neben die gegebene Riemann'sche Fläche F_n stellen. Da w eine einwertige algebraische Function der F_n ist, andrerseits aber zu jedem Punkte von F_n nur ein Wert von w gehört, so ist offenbar jene Ebene auf die F_n Punkt für Punkt wechselweise eindeutig bezogen. Daher das folgende (wiederum für $p = 0$ charakteristische) Resultat: *Die gegebene n-blättrige Fläche F_n des Geschlechtes Null lässt sich conform auf eine einfach bedeckte Ebene abbilden, nämlich die complexe Ebene der Hauptfunction w**). Damit haben wir nun in Übereinstimmung mit Formel (1) des gegenwärtigen Para-

*) Für diese durch $w(z)$ vermittelte Abbildung sind die Verzweigungspunkte der F_n singuläre Stellen im Sinne von p. 83 (letzter Absatz).

graphen direct den Ansatzpunkt wiedergewonnen, wo unsere p. 65 u. f. durchgeführten Überlegungen beginnen. Jene bewahren also ihre Bedeutung ganz allgemein für alle Riemann'schen Flächen des Geschlechtes $p = 0$, und so werden wir z. B. für unseren Fall in der complexen Ebene der Hauptfunction w die n über einander liegenden Blätter der F_n in n neben einander liegende Bereiche der Ebene w conform übertragen finden. Die verschiedenen Ebenen aber, welche den verschiedenen Hauptfunctionen w derselben F_n entsprechen, stehen, in Übereinstimmung mit der Formel (2) des gegenwärtigen Paragraphen, in Kreisverwandtschaft. Wir werden für diese allgemeinen Sätze später eine grosse Reihe von Beispielen kennen lernen.

§ 2. Die algebraischen Functionen auf einer Riemann'schen Fläche F_n des Geschlechtes $p = 1$.

Kaum minder einfach gestaltet sich die Erledigung des Falles, dass unsere beliebig gewählte Fläche F_n dem Geschlechte $p = 1$ angehört. Auf einer solchen Fläche F_n existiert zuvörderst nach unseren bezüglichen Erörterungen p. 527 ein *Integral der ersten Gattung*, welches wir im Anschluss an die früher (p. 145 u. f.) von uns gebrauchte Bezeichnungsweise u nennen. Jedes andere der Fläche zugehörige Integral erster Gattung u' ist alsdann, wie wir wissen, eine lineare ganze Function $u' = au + b$ von jenem beliebig particulär gewählten Integral u und es würde nicht schwer halten, aus der Gesamtheit dieser Integrale ein einzelnes durch geeignete Massnahmen zu charakterisieren. Das Integral u ist, wofern wir es auf die durch die Querschnitte a_1 und b_1 zerschnittene Fläche einschränken, vom Punkte derselben eindeutig abhängig. Die dabei längs der beiden Querschnitte eintretenden Wertdifferenzen bezeichnen wir, wie üblich, durch ω_1 und ω_2.

Das Integral u spielt nun für unsere Fläche mit $p = 1$ insofern eine ganz ähnliche Rolle, wie soeben bei $p = 0$ die einzelne Hauptfunction, als die Beschreibung der zur F_n gehörenden Functionen besonders einfach ausfällt, wenn wir die letzteren in ihrer Abhängigkeit vom Integral u betrachten. Die hiermit bezeichnete Aufgabe ist offenbar für unsere allgemeine Fläche des Geschlechtes $p = 1$ dieselbe, die wir p. 147 für die damals speciell betrachtete F_2 mit vier Verzweigungspunkten aussprachen. Wollen wir also auch hier vor allen Dingen nachsehen, wie sich die conforme Abbildung gestaltet, welche das Integral u von der durch a_1, b_1 zerschnittenen Fläche F_n leistet. Das Fundament dieser Untersuchung ist der nachfolgende, später noch zu belegende Satz: *Hat u in einem beliebig gewählten Punkte z_0*

der F_n den Wert u_0, so wird die Umgebung dieses Punktes der F_n vermöge u auf die einfach bedeckte Umgebung des u_0 glatt abgebildet *). Das Abbild der ganzen F_n' in der u-Ebene wird demnach einen einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Bereich derselben darstellen, *der keinen Verzweigungspunkt enthält.* Dieser Bereich wird, wofern wir die Schnitte a_1, b_1 selbst stetig gekrümmt annehmen, von vier stetig gekrümmten Randcurven eingegrenzt sein, welche die Abbilder der vier Ufer von a_1 und b_1 sind. Es wird dabei eine erste der vier Randcurven unseres Bereiches durch die Substitution $u' = u + \omega_1$ in die gegenüberliegende übergeführt werden, desgleichen eine dritte Randcurve durch $u' = u + \omega_2$ in die ihr gegenüberliegende vierte.

Die gerade gewonnenen Ergebnisse fassen wir kurz in den Satz zusammen: *Die Fläche F_n' wird vermöge des Integrales u conform auf ein im allgemeinen krummliniges Parallelogramm der u-Ebene abgebildet, dessen gegenüberliegende Seiten durch die soeben geschriebenen Substitutionen $u' = u + \omega_1$ bez. $u' = u + \omega_2$ in einander überführbar sind.* Damit haben wir ein Resultat erhalten, das sich dem oben (p. 147) für die F_2 mitgeteilten direct an die Seite stellt. Wie damals, können wir es auch nun wieder durch geeignete Legung der Schnitte a_1, b_1, bez. durch ein zweckmässig gewähltes particuläres u erreichen, dass das fragliche Parallelogramm der u-Ebene geradlinig wird und die Ecken $u = 0$, ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$ bekommt. Wenn wir alsdann unsere Fläche durch die unendlich vieldeutige Function u abbilden, wie letztere entsteht, falls wir beliebige Überschreitungen unserer beiden Querschnitte zulassen, so finden sich, gerade wie wir dies schon in Fig. 37, p. 148, darstellten, als die unendlich vielen Abbilder der Fläche in der u-Ebene unendlich viele mit einander congruente Parallelogramme, welche diese Ebene lückenlos und einfach bedecken. Dadurch ist alsdann eine ein-∞-deutige conforme Beziehung der u-Ebene auf unsere Fläche F_n begründet, bei welcher einem Punkte der u-Ebene immer *ein* Punkt der F_n, einem Punkte der F_n aber stets solche unendlich viele Punkte der u-Ebene entsprechen, welche homolog in den unendlich vielen Parallelogrammen dieser Ebene gelegen sind**).

---

*) Ist z_0 ein Verzweigungspunkt der F_n, so wird die Umgebung desselben auf der Fläche F_n sich selbst mehrfach überdecken; gleichwohl ist ihr Abbild in der u-Ebene ein einfach bedeckter Bereich um u_0. Diese Verhältnisse werden weiter unten in § 6 näher bewiesen.

**) Wir haben diese Verhältnisse um so ausführlicher skizziert, als sie ja augenscheinlich die allergrösste Analogie zu gewissen Untersuchungen des vorigen

Nunmehr steht der vollen Anwendung unserer früheren Entwicklungen aus I, 5 nichts mehr im Wege. Wir werden uns aus u, ω_1, ω_2 vermöge der Formeln (2) p. 149 vorab die beiden Functionen $\wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$, $\wp'(u \mid \omega_1, \omega_2)$ construieren und dann den Satz heranziehen, dass alle doppeltperiodischen Functionen n^{ten} Grades von u, ω_1, ω_2 rationale Functionen $R(\wp, \wp')$ von $\wp$ und $\wp'$ sind. Jetzt interpretiere man u wieder als Function auf unserer n-blättrigen Fläche F_n über der z-Ebene. Da geht dann z. B. die Function $\wp(u)$ über in eine analytische Function $\wp(u(z))$ von z, welche auf der unzerschnittenen F_n *eindeutig* ist; thatsächlich gehen ja beliebige Periodenwege der F_n, auf Grund der geschilderten Beziehung der F_n zur u-Ebene in letztere übertragen, dort in Linien zwischen homologen Punkten zweier Parallelogramme über. Zudem ist die Function $\wp(u(z))$ auf der F_n überall stetig bis auf einen Punkt ($u = 0$), wo sie algebraisch im zweiten Grade unendlich wird. *Wir erkennen demnach in $\wp(u(z))$ eine zweiwertige algebraische Function der F_n.* Sofort schliesst man jetzt allgemein vermöge der gleichen Überlegung: *Die doppeltperiodischen Functionen m^{ten} Grades von u, ω_1, ω_2 liefern, auf die F_n übertragen, die sämtlichen m-wertigen algebraischen Functionen derselben und umgekehrt**).

Wir haben auf diese Weise nicht nur den Existenzbeweis für die algebraischen Functionen unserer Fläche F_n erbracht, sondern wir entnehmen zugleich eine einfache Regel für die Darstellung aller dieser algebraischen Functionen durch einige unter ihnen aus den bezüglichen früheren Sätzen. Eine einwertige algebraische Function existiert auf unserer F_n nicht (cf. p. 149); in der That würde eine solche die F_n auf eine einfach bedeckte Kugelfläche conform übertragen (welche letztere wir etwa als Träger der complexen Werte jener einwertigen

---

Abschnitts darbieten. In der That setze man an Stelle der u-Ebene die ω-Halbebene, an Stelle des Periodenparallelogramms das Fundamentalpolygon F_μ einer Untergruppe der Modulgruppe, endlich an Stelle der Fläche F_n die geschlossene Fläche F_μ, welche jenem Polygon entspricht; und man wird für die Sätze des Textes fast Wort für Wort die früheren analogen Sätze erhalten. Man wolle an dieser Bemerkung festhalten, da die hiermit gefundene Analogie nicht nur für die bis jetzt besprochenen geometrischen Verhältnisse besteht, sondern durchaus auch in den sich beiderseits anschliessenden functionentheoretischen Gesichtspunkten in Kraft bleibt. In der That werden wir im nächsten Kapitel genau die nämlichen Schlussweisen und Gedankenentwicklungen, die sich im Texte betreffs der u-Ebene und der Fläche F_n sogleich anreihen, für den anderen Fall der Polygone F_μ und geschlossenen Flächen F_n durchzuführen haben.

*) Diese Umkehrung des ausgesprochenen Satzes haben wir bereits p. 148 für den damals betrachteten speciellen Fall in Anwendung gebracht.

Function denken), und eine solche Kugelfläche hat das Geschlecht $p = 0$, nicht aber $p = 1$, wie es doch sein müsste. Demgegenüber giebt es auf der F_n zweiwertige Functionen, und eine specielle unter ihnen sei $\wp$, welche der doppeltperiodischen Function $\wp(u \mid \omega_1, \omega_2)$ entsprechen soll. In derselben Weise gehe die dreiwertige algebraische Function $\wp'$ der F_n aus der doppeltperiodischen Function $\wp'(u \mid \omega_1, \omega_2)$ hervor. Wir haben dann ersichtlich den Satz: *Alle algebraischen Functionen der F_n sind als rationale Functionen $R(\wp, \wp')$ der beiden besonderen unter ihnen $\wp$, $\wp'$ darstellbar, welche letztere mit einander durch die Relation verknüpft sind:*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{1}$$

Umgekehrt sind alle Functionen $R(\wp, \wp')$ algebraische Functionen auf der Fläche.

Wenn wir vorhin bei $p = 0$ die gegebene F_n vermöge einer zugehörigen Hauptfunction abbildeten, so wollen wir hier eine entsprechende Massnahme durchführen, indem wir nämlich unsere F_n des Geschlechtes $p = 1$ vermöge ihrer zweiwertigen Function $\wp$ oder irgend einer anderen auf ihr existierenden zweiwertigen Function abbilden. Insofern der einzelne complexe Wert $\wp$ immer in zwei Punkten der F_n stattfindet, werden stets zwei Punkte beim Fortgang zur complexen Ebene $\wp$ über einander zu lagern sein, und wir gelangen solchergestalt überhaupt zu einer doppelten Überlagerung der ganzen $\wp$-Ebene. Freilich werden, wie wir wissen, für vereinzelte Werte $\wp$ (z. B. $\wp = \infty$) die beiden bezüglichen Punkte der F_n coincidieren. In der $\wp$-Ebene werden dann an solchen Stellen die beiden über einander liegenden Blätter mit einander zusammenhängen. Thatsächlich müssen ja auch die beiden fraglichen Blätter irgendwie mit einander verzweigt sein, um eine „zusammenhängende" Riemann'sche Fläche F_2 bilden zu können, da doch auch die gegebene Fläche F_n zusammenhängend ist. Die Anzahl der in dieser Weise für die F_2 eintretenden Verzweigungspunkte bestimmt sich auf Grund der Formel (2) p. 494 zu vier. Daher denn das Resultat: *Unsere gegebene Fläche F_n des Geschlechtes $p = 1$ wird durch die Function $\wp$ oder irgend eine andere ihrer zweiwertigen Functionen auf eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten abgebildet.* Hiermit ist denn zur vollen Evidenz gebracht, dass es sich jetzt bei unserer willkürlich gewählten F_n mit $p = 1$ im Princip um genau die nämlichen Verhältnisse handelt, die wir oben in I, 5 bereits erledigten.

§ 3. Die algebraischen Functionen auf einer Riemann'schen Fläche F_n eines beliebigen Geschlechtes.

Sei nun die vorgelegte Fläche F_n eine ganz beliebige mit irgend einem Geschlechte p, das wir nur der Kürze halber als > 1 annehmen. Auch unter dieser Voraussetzung gelingt es jetzt leicht, den Existenzbeweis zugehöriger algebraischer Functionen zu liefern, und zwar verwerten wir hierbei zweckmässig die zur F_n gehörenden Integrale zweiter Gattung in ihrer p. 531 eingeführten Normalform Z_z.

Wir wählen uns auf der F_n eine Reihe von m etwa bei $z = z_1$, $z_2, \cdots, z_m$ gelegenen Punkten, von denen keine zwei zusammenfallen, noch auch in der F_n über einander gelegen sein sollen. Wir wollen versuchen, eine m-wertige algebraische Function der F_n zu construieren, die an den bezeichneten m Stellen je einfach algebraisch unendlich wird. Setzen wir vorab voraus, es existiere eine derartige algebraische Function w, und dieselbe werde an jener bei $z = z_i$ gelegenen Stelle unendlich wie $\frac{c_i}{z - z_i}$. Man bilde sich alsdann das zu jener Stelle gehörende Normalintegral Z_{z_i} und untersuche den Ausdruck

$$(1) \qquad w - c_1 Z_{z_1} - c_2 Z_{z_2} - \cdots - c_m Z_{z_m}$$

in Bezug auf sein Verhalten auf der F_n. Derselbe ist auf der F_n offenbar überall stetig; dabei ist er auf der F_n' eindeutig und besitzt längs der Schnitte a und b constante Wertdifferenzen, er ist also ein Integral erster Gattung. Aber für die Schnitte a sind diese Wertdifferenzen durchgehends Null, da dies für jedes einzelne Integral Z_z gilt. Der Ausdruck (1) muss demnach (cf. p. 524) auf der F_n mit einer *Constanten* c_0 identisch sein, und also gewinnen wir für w die Darstellung:

$$(2) \qquad w = c_0 + c_1 Z_{z_1} + c_2 Z_{z_2} + \cdots + c_m Z_{z_m}.$$

Kehren wir jetzt zurück zur Frage nach der Existenz einer algebraischen Function, die in jenen m Punkten und sonst nirgends je einfach unendlich wird. Eine solche müsste, wie wir sehen, eine Darstellung (2) zulassen; knüpfen wir also an diese unsere fernere Discussion, wobei aber jetzt die Constanten c irgend welche noch nicht näher bestimmte Werte haben. Die rechte Seite von (2) stellt im allgemeinen ein Integral zweiter Gattung mit m Unstetigkeitspunkten dar. Schränken wir dasselbe auf F_n' ein, so zeigt es längs der Schnitte a keine von Null verschiedene Wertdifferenzen. Längs b_k möge Z_{z_i} die Differenz $\tau_k^{(i)}$ besitzen, so weist längs dieses Schnittes

die auf der rechten Seite von (2) stehende Summe die Differenz $\sum_{i=1}^{m} c_i \tau_k^{(i)}$ auf. Soll also die in Rede stehende Summe auf der F_n eindeutig sein, *so ist notwendig und hinreichend, dass für alle p Werte $k = 1, 2, 3, \cdots, p$ die Identität*

$$c_1 \tau_k^{(1)} + c_2 \tau_k^{(2)} + \cdots + c_m \tau_k^{(m)} = 0 \tag{3}$$

erfüllt ist.

Unser Problem ist hierdurch zurückgeführt auf die Auflösung eines Systems von p homogenen linearen Gleichungen nach den m Unbekannten $c_1, c_2, \cdots, c_m$. Ohne hier sogleich in erschöpfender Weise weiter zu schliessen, ist jedenfalls soviel deutlich, dass für $m \geqq p + 1$ unser Gleichungsystem (3) eine oder mehrere Lösungen in nicht durchgehends verschwindenden c zulässt. Nehmen wir eines dieser Lösungsysteme, um es auf der rechten Seite von (2) einzutragen, so stellt diese rechte Seite eine eindeutige und damit, wie man sofort erkennt, eine algebraische Function der F_n dar, die wir nun wieder w nennen. Sind alle Coefficienten $c_1, c_2, \cdots, c_m$ von Null verschieden, so ist w m-wertig. Es könnten aber auch einige unter diesen Coefficienten verschwinden, und wir wollen in diesem Sinne sagen, dass w *im allgemeinen* eine m-wertige algebraische Function der F_n sei. *Als solche ist sie mit z verbunden durch eine irreducibele algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$, in der w bis auf den n^{ten}, z aber bis auf den m^{ten} Grad ansteigt**). Jetzt sind mit w auch alle rationalen Functionen $R(w, z)$ algebraische Functionen der F_n, und umgekehrt sind alle algebraischen Functionen der F_n in dieser Gestalt $R(w, z)$, wie wir wissen, darstellbar. *Die Existenz der algebraischen Functionen ist damit für unsere beliebig gewählte F_n des Geschlechtes p in erschöpfender Weise dargelegt.*

Setzen wir noch hinzu, dass eine Darstellung (2) für jede algebraische Function w unserer F_n geleistet werden kann. Freilich versagt unser ursprünglicher Ansatz, wofern von den m Unstetig-

*) Auch hier müssen wir wieder des in der zweiten Note p. 498 besprochenen besonderen Falls gedenken. Zufolge der damaligen Erörterungen könnte es vielleicht eintreten, dass w in der irreducibelen Relation $f(w, z) = 0$ nur auf den Grad $\frac{n}{\tau}$ anstiege, welche letztere von sich aus zu einer Fläche $F_{\frac{n}{\tau}}$ führen würde, aus der erst durch τ-fache Überlagerung unsere F_n entspränge. Dann findet sich jedes zusammengehörige Wertsystem w, z in der F_n τ Male. Für die im Texte mit w bezeichnete Function kann dieser Fall indessen nicht eintreten, da dem Werte $w = \infty$ ausdrücklich m *verschiedene* Werte z zugeordnet sein sollten.

keitspunkten von w einige oder gar alle mit einander coincidieren. Findet dies statt, so wähle man (um Weitläufigkeiten, wie Einführung von Integralen mit mehrfachen Unendlichkeitsstellen, zu vermeiden) die Constante a in $w' = \frac{1}{w - a}$ derart, dass die m Unstetigkeitspunkte von w' durchgehends getrennt liegen (was keine Schwierigkeit hat). Statt w werden wir dann w' der Darstellung (2) unterziehen können.

Im Anschluss an die entsprechenden Überlegungen bei $p = 0$ und $p = 1$ handeln wir hier schliesslich noch von der Abbildung der F_n vermöge einer ihrer algebraischen Functionen w. Sei die m-wertige Function w mit z durch die irreducibele Relation $f(w, z) = 0$ verknüpft, und sei w derart gewählt, dass das einzelne Wertsystem w, z im allgemeinen nur in *einem* Punkte der F_n eintritt. Man wolle jetzt in $f(w, z) = 0$ die Variabele w als unabhängig auffassen und dementsprechend die Relation $f(w, z) = 0$ durch eine m-blättrige Fläche F_m über der complexen w-Ebene versinnlichen. Auch auf dieser F_m findet das einzelne Wertsystem w, z im allgemeinen nur in einem Punkte statt, und es sind offenbar auf diese Weise die beiden Flächen F_n und F_m wechselweise eindeutig auf einander bezogen. Da aber w eine algebraische Function von z ist, so können wir dieses Resultat offenbar dahin aussprechen: *Die gegebene Fläche F_n wird durch eine ihr angehörende m-wertige algebraische Function w conform auf eine m-blättrige Fläche F_m über der w-Ebene abgebildet* (cf. Note p. 535).

Die algebraischen Functionen der F_m sind die Grössen $R(w, z)$, coincidieren also geradezu mit denen der F_n. Wir werden dies Sachverhältnis in folgender Weise interpretieren: Die algebraischen Functionen der F_n betrachten wir als abhängig vom einzelnen Punkte der F_n. Indem wir diesen Punkt in die F_m über der w-Ebene hinüberwerfen, *denken wir den im fraglichen Punkte stattfindenden Wert der einzelnen algebraischen Function mit übertragen.* Insgesamt überträgt sich unsere Function alsdann in eine algebraische Function der F_m. In völlig gleicher Weise entspringen aus den Integralen der drei Gattungen auf der F_n bei der Übertragung die zur F_m gehörenden Integrale bez. der nämlichen Gattung. Wir können also zur Untersuchung unseres hier in Rede stehenden Systems der algebraischen Functionen $R(w, z)$ und ihrer Integrale unter unendlich vielen Riemann'schen Flächen, die alle auf einander wechselweise eindeutig bezogen sind, eine nach Willkür auswählen. Damit ist die besondere Stellung des z in den bisherigen Entwicklungen auf das richtige Mass zurückgeführt; in der That erscheint jetzt z coordiniert eingeordnet in das ganze System der hier algebraisch mit einander verwandten

Grössen $R(w, z)$, unter denen erst dadurch eine einzelne besonders ausgezeichnet wird, dass wir unter all' jenen Riemann'schen Flächen eine specielle zu Grunde legen. Oder auch: Unter all' den verschiedenen eindeutig auf einander abbildbaren Riemann'schen Flächen, welche den verschiedenen Functionen $R(w, z)$ entsprechen, ist die F_n, von der wir ausgingen, nur insofern ausgezeichnet, als wir gerade $R(w, z) = z$ als die unabhängig veränderliche Function betrachten wollen*).

§ 4. Die Functionen φ einer F_n von höherem Geschlechte.

Nachdem voraufgehend auf unserer willkürlich gewählten F_n in allen Fällen die Existenz zugehöriger algebraischer Functionen bewiesen ist, gilt es nun im Falle $p > 1$ noch tiefer in die Untersuchung derselben einzuführen. Wir definieren zu dem Ende von den Integralen erster Gattung aus eine besondere Art algebraischer Functionen der F_n, die berufen sind, weiterhin eine sehr wichtige Rolle zu spielen.

Sei $w_1, w_2, \cdots, w_p$ ein System von p linear-unabhängigen Integralen erster Gattung der F_n, w aber ein beliebiges $(p+1)^{\text{tes}}$ solches Integral. Letzteres stellt sich durch jene p Integrale in der Form:

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p \tag{1}$$

mit constanten Coefficienten α dar. Durch Differentiation von w nach z entspringt, wie wir schon gelegentlich bemerkten, eine algebraische Function der F_n; wir nennen dieselbe allgemein

$$\varphi = \frac{dw}{dz}$$

und bezeichnen in entsprechender Weise die aus $w_1, w_2, \cdots, w_p$ zu bildenden Functionen durch $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$. *Letztere sind alsdann linear unabhängig*; bestände nämlich eine Relation:

*) Um keine einzelne der Functionen $R(w, z)$ zu bevorzugen, benennen wir deren Inbegriff im folgenden gern mit einem aus den Weierstrass'schen Vorlesungen stammenden Ausdruck als *algebraisches Gebilde*.

Ihr klares geometrisches Substrat findet die hiermit bezeichnete Ansicht, wenn man mit Klein in dessen oben genanntem Schriftchen (p. 493, Note) den Aufbau der Riemann'schen Theorie damit beginnt, dass man nicht eine mehrblättrige Fläche über der $(x+iy)$-Ebene, sondern irgend eine geschlossene Fläche zu Grunde legt, die dann durch jede einzelne auf ihr existierende „algebraische" (i. e. eindeutige) Function auf eine mehrblättrige Fläche über der Ebene abgebildet wird. Leider können wir dieser allgemeineren Auffassung der Theorie im Texte nicht weiter nachgehen; es ist dies aber auch insofern nicht nötig, als wir bei den weiterhin in Betracht kommenden Riemann'schen Flächen eine ausgezeichnete algebraische Function immer von vornherein kennen.

$$\beta_0 + \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + \cdots + \beta_p\varphi_p = 0$$

identisch, so würde durch Integration nach z

$$\beta_0 z + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_p w_p = c \tag{2}$$

folgen, unter c die Integrationsconstante verstanden. Damit aber die linke Seite der letzten Gleichung auch für $z = \infty$ ihren Wert c behält, muss offenbar $\beta_0 = 0$ sein, womit (2) zu einer linearen Identität zwischen den w_i wird, die doch zufolge unserer Voraussetzung nicht existieren kann. Indem sich also die p Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ thatsächlich als linear-unabhängig erweisen, entspringt durch Differentiation von (1) der wichtige Satz: *Jede zur F_n gehörende Function φ ist eine lineare homogene Verbindung*

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_p\varphi_p \tag{3}$$

von p besonders ausgewählten, linear-unabhängigen Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$.

Um jetzt die Wertigkeit einer beliebigen Function φ auf der F_n zu bestimmen, greifen wir irgend einen etwa bei z_0 gelegenen Punkt der F_n auf, in welchem das zu φ gehörige Integral erster Gattung w den Wert w_0 haben möge. Es gilt dann in der Umgebung von z_0 für das jedenfalls endliche w die Darstellung:

$$w - w_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \tag{4}$$

wobei wir aber noch darauf Bezug nehmen müssen, welche Bedeutung wir dem Ausdruck $(z - z_0)$ für besondere Lage des Punktes z_0 zuerkennen wollten. Erstlich haben wir nämlich im Falle $z_0 = \infty$ an Stelle der Entwicklung (4) die folgende

$$w - w_0 = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots, \tag{5}$$

während für einen Verzweigungspunkt z_0, in dem ν Blätter zusammenhängen, die Entwicklung eintritt:

$$w - w_0 = a_1(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} + a_2(z - z_0)^{\frac{2}{\nu}} + \cdots. \tag{6}$$

Es werden sich auf der Fläche F_n besondere Punkte ausfindig machen lassen, für welche in der bezüglichen Entwicklung (4) der erste Coefficient a_1 verschwindet; an solchen Stellen wird alsdann die algebraische Function $\varphi = \frac{dw}{dz}$ verschwinden. Aber wir bemerken, dass wir in den besonderen Entwicklungen (5) und (6), insofern es sich hier um ein beliebiges Integral erster Gattung w handeln soll, die Coefficienten $a_1 \gtrless 0$ annehmen müssen. Den speciellen Fall, dass auch in diesen nur für eine endliche Anzahl von Punkten gültigen Entwicklungen ein oder einige der aufgeschriebenen Anfangscoefficienten

$a_1, a_2, \cdots$ verschwinden, werden wir hernach noch besonders zu erklären haben.

Durch Differentiation unserer Formeln (4) bis (6) kommt jetzt sofort: In jedem Verzweigungspunkte wird φ algebraisch unendlich im Grade $(\nu - 1)$, da in der That aus (6):

$$\varphi = \frac{dw}{dz} = \frac{a_1}{\nu}(z - z_0)^{-\frac{\nu-1}{\nu}} + \cdots$$

folgt und $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ im fraglichen Punkte auf der F_n einfach algebraisch verschwindet. Zugleich wird φ, wie ohne weiteres ersichtlich, an keiner anderen Stelle der F_n unendlich. Als Wertigkeit von φ ergiebt sich sonach unter Gebrauch von (2) p. 494:

$$\Sigma(\nu - 1) = 2p - 2 + 2n, \tag{7}$$

wo sich die Summe linker Hand auf die sämtlichen Verzweigungspunkte der F_n bezieht. Hieraus schliessen wir sofort, dass φ auf der F_n im ganzen $(2p - 2 + 2n)$ Nullpunkte besitzt. Von letzteren liegen $2n$ bei $z = \infty$, da φ in der That auf Grund von (5) in jedem der n Blätter bei $z = \infty$ algebraisch im Grade zwei verschwindet*). So bleiben noch $(2p - 2)$ Nullpunkte rückständig und von diesen hat, wie wir sogleich (in § 6) noch zu zeigen haben, kein einziger auf der F_n eine von vornherein bestimmte Lage. Sprechen wir also zusammenfassend den Satz aus: *Unsere Functionen φ haben auf der F_n $(2p - 2)$ bewegliche Nullpunkte, während die übrigen Nullpunkte, sowie alle Unstetigkeitspunkte für die sämtlichen verschiedenen φ die nämliche Lage besitzen.*

Hier ist nun auch evident, was das Verschwinden von a_1 in einer Entwicklung (5) oder (6) zu bedeuten hat. In dem Falle wird offenbar einer der $(2p - 2)$ beweglichen Nullpunkte in denjenigen besonderen Punkt hineingerückt sein, für dessen Umgebung die fragliche Reihenentwicklung gilt. Infolge der schon betonten Beweglichkeit jener $(2p - 2)$ Punkte müssen wir also in der That bei einem allgemeinen w in (5) und (6) $a_1 \gtrless 0$ annehmen. Sollte übrigens einer der $(2p - 2)$ beweglichen Nullpunkte bei einem speciell vorliegenden φ in einen der Unstetigkeitspunkte hineingerückt sein, so wollen wir ihn auch dort noch als Nullpunkt rechnen, der dann freilich mit einem $(\nu - 1)$-fachen Unstetigkeitspunkte coincidiert. Eine entsprechende Bemerkung soll auch für den Fall gelten, dass einer jener beweglichen Nullpunkte nach $z = \infty$ fällt.

*) Wir nehmen hier der Kürze halber an, dass bei $z = \infty$ kein Verzweigungspunkt der F_n gelegen ist, was keine wesentliche Einschränkung ist.

Diese letztere Auffassung erscheint besonders dann als zweckmässig, wenn wir, was im folgenden zumeist geschieht, Quotienten aus den zu unserer Fläche F_n gehörenden Functionen φ betrachten. Indem nämlich auf Grund unserer Verabredung die sämtlichen φ in den Verzweigungspunkten und bei $z = \infty$ übereinstimmendes Verhalten zeigen, kommen für den Quotienten zweier unter ihnen: φ, φ' nur noch je die $(2p-2)$ beweglichen Nullpunkte derselben zur Geltung. *Wir haben also in einem solchen Quotienten eine $(2p-2)$-wertige oder auch noch geringerwertige algebraische Function der F_n, letzteres dann, wenn die beweglichen Nullpunkte von φ zum Teil mit denen von φ' coincidieren.*

Die φ-Quotienten gewinnen eine ganz besondere Bedeutung, wenn wir auf die Anschauungen des vorigen Paragraphen zurückgehen, nach denen die F_n eine ist unter unendlich vielen, wechselweise eindeutig auf einander bezogenen Riemann'schen Flächen. Zu jeder derselben wird im Sinne der bisherigen Entwicklungen ein besonderes System von Functionen φ gehören; denn bei Zugrundelegung einer F_m an Stelle der F_n müssen wir ja, um die zur F_m gehörigen φ zu erhalten, die Differentiale der Integrale erster Gattung durch das Differential derjenigen algebraischen Function dividieren, die F_n auf F_m abbildet. Wenn wir aber φ-Quotienten bilden, so handelt es sich allein noch um die Quotienten von Differentialen der Integrale erster Gattung. Da kommt wirklich jede Beziehung auf irgend eine particuläre unter jenen unendlich vielen Flächen in Wegfall, und wir werden also den Satz aufstellen können: *Die φ-Quotienten der Fläche F_n gehen bei Transformation der F_n durch eine zugehörige m-wertige algebraische Function direct in die φ-Quotienten der bezüglichen F_m über; sie verhalten sich also gegenüber der in Rede stehenden Transformation invariant.*

§ 5. Der Riemann-Roch'sche Satz.

Im vorletzten Paragraphen haben wir für den Fall eines beliebigen Geschlechtes $p > 1$ nur erst im allgemeinen die Existenz algebraischer Functionen auf unserer F_n zum Nachweise gebracht; eine etwas tiefer dringende Betrachtung dieser Functionen haben wir hier nachzuholen, wobei uns die inzwischen aufgestellten Functionen φ wesentliche Dienste leisten sollen.

Wir knüpfen hier unmittelbar an den in § 3 verfolgten Gedankengang und insbesondere an Formel (3) p. 541 an. Übrigens denken wir die vorgeschriebenen m Unstetigkeitstellen bei $z_1, z_2, \cdots, z_m$ so gewählt, dass keine derselben in einem Verzweigungspunkte der F_n gelegen ist oder nach $z = \infty$ fällt. Es liegt freilich eine solche Ein-

schränkung keineswegs im Wesen unserer anzustellenden Untersuchung begründet; sie wird vielmehr hier nur deshalb eingeführt, um unsere Entwicklung nicht dadurch zu complicieren, dass jene m Unstetigkeitstellen mit festen Null- und Unstetigkeitspunkten der Functionen φ collidieren. In der That könnten wir ja auch, wofern dies eintreten sollte, an Stelle der F_n eine F_m der Betrachtung zu Grunde legen, die wir derartig auswählen, dass sie unserer Forderung genügt. Durch diese Forderung ist also keinerlei Einschränkung unseres weiterhin aufzustellenden Hauptsatzes begründet.

Es soll sich jetzt darum handeln, die Anzahl aller algebraischen Functionen aufzustellen, die nirgendwo sonst auf der F_n unendlich werden, als an den bezeichneten Stellen z_i, und auch an diesen nicht mehr als einfach. Wir führen zu dem Ende dasjenige System von p Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ ein, welches den p. 529 definierten p Normalintegralen $j_1, j_2, \cdots, j_p$ entspricht. Dann ist auf Grund von (5) p. 532 die zum Integral Z_{z_i} gehörende Periode $\tau_k^{(i)}$ jeweils vom Factor $-2i\pi$ abgesehen nichts anderes als der Wert $\varphi_k(z_i)$ der Function φ_k im bezüglichen bei z_i gelegenen Unstetigkeitspunkt, und also nimmt das System der m Gleichungen (3) p. 541 die Gestalt an:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &c_1\varphi_1(z_1) + c_2\varphi_1(z_2) + \cdots + c_m\varphi_1(z_m) = 0,\\ &c_1\varphi_2(z_1) + c_2\varphi_2(z_2) + \cdots + c_m\varphi_2(z_m) = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &c_1\varphi_p(z_1) + c_2\varphi_p(z_2) + \cdots + c_m\varphi_p(z_m) = 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungsystem haben wir nun weiter zu discutieren.

Seien unter den Gleichungen (1) im ganzen τ die Folgen der übrigen $(p-\tau)$ Gleichungen, so denken wir uns diese letzteren $(p-\tau)$ Gleichungen etwa an erster Stelle im Systeme (1) angeordnet. Es ist alsdann möglich, durch zweckmässige lineare Verbindungen der linken Seiten der $(p-\tau)$ ersten Gleichungen (1) jede der linken Seiten der τ letzten Gleichungen identisch, d. i. unabhängig von den c, herzustellen. Noch ausführlicher sprechen wir diesen Satz dahin aus, dass sich $(p-\tau)$ Constante $\alpha_k^{(l)}$ finden lassen, für welche die Gleichung

$$(2)\qquad \varphi_{p-\tau+l}(z_i) = \alpha_1^{(l)}\varphi_1(z_i) + \alpha_2^{(l)}\varphi_2(z_i) + \cdots + \alpha_{p-\tau}^{(l)}\varphi_{p-\tau}(z_i)$$

bei allen $\tau \cdot m$ Wertcombinationen $i = 1, 2, \cdots, m$; $l = 1, 2, \cdots, \tau$ erfüllt ist.

Nunmehr können wir aber die eben gewonnenen $\tau \cdot m$ Gleichungen (2) auch dahin interpretieren, dass jede der τ speciellen Functionen:

$$(3)\qquad \varphi'_{p-\tau+l} = \varphi_{p-\tau+l} - \alpha_1^{(l)}\varphi_1 - \alpha_2^{(l)}\varphi_2 - \cdots - \alpha_{p-\tau}^{(l)}\varphi_{p-\tau}$$

mit $l = 1, 2, 3, \cdots \tau$ ausnahmslos in allen m Stellen bei $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m$ verschwindet. An diese Auffassung der Sache werden wir jetzt weitere Folgerungen knüpfen. Man bemerke nämlich, dass wir die p Functionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{p-\tau}, \varphi'_{p-\tau+1}, \varphi'_{p-\tau+2}, \cdots, \varphi'_p \tag{4}$$

an Stelle der ursprünglichen als ein System linear-unabhängiger Functionen φ gebrauchen können, da sich in der That die ursprünglichen φ vermöge (3) linear in den Functionen (4) darstellen lassen. Indem hiernach insbesondere die letzten τ unter den Functionen (4) linear-unabhängig sind, *existieren unserer über die Gleichungen* (1) *gemachten Annahme entsprechend τ linear-unabhängige Functionen φ, deren jede in allen m Punkten $z_1, z_2, \cdots, z_m$ verschwindet.*

Jetzt behaupten wir weiter, dass nicht noch ein $(\tau+1)^{\text{tes}}$, von jenen τ Functionen φ linear-unabhängiges φ zugleich in allen m Punkten z_i verschwinden kann. Ein solches würde nämlich eine Darstellung

$$\varphi = \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + \cdots + \beta_{p-\tau}\varphi_{p-\tau} + \gamma_1\varphi'_{p-\tau+1} + \cdots + \gamma_\tau\varphi'_p$$

mit nicht durchgehends verschwindenden β besitzen, und es wäre, wenn φ in der That in allen m Punkten z_i verschwände, offenbar infolge von (2):

$$\beta_1\varphi_1(z_i) + \beta_2\varphi_2(z_i) + \cdots + \beta_{p-\tau}\varphi_{p-\tau}(z_i) = 0$$

für alle m Werte $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ erfüllt. Das aber würde heissen, dass auch die $(p-\tau)$ ersten Gleichungen (1) nicht von einander linear unabhängig sind, was wir doch annahmen. Wenn wir also anfangs sagten, dass von den p Gleichungen (1) im ganzen τ die Folge der übrigen sind, so werden wir die solchergestalt definierte Zahl τ auch noch dadurch erklären können, dass wir sagen: *Es lassen sich genau τ linear-unabhängige Functionen φ ausfindig machen**), *deren jede in allen m Punkten z_i verschwindet.*

Durch Auflösung des Gleichungsystems (1) drücken sich jetzt $(p-\tau)$ unter den Coefficienten $c_1, c_2, \cdots, c_m$ durch die übrigen $(m-p+\tau)$ linear und homogen aus; diese letzteren $(m-p+\tau)$ Coefficienten bleiben dann aber durchaus willkürlich wählbar. Hierbei muss man bemerken, dass in einem etwa vorliegenden Lösungsystem $c_1, c_2, \cdots, c_m$ selbstverständlich auch mit Null identische c eingehen können. Das hat dann jedesmal zur Folge, dass aus (2) p. 540 der betreffende Term ausfällt, und also die Wertigkeit der dargestellten Function um eine Einheit abnimmt. Insbesondere könnte sogar der Fall eintreten, dass bei *allen* möglichen Lösungsystemen der c z. B. der letzte Coefficient c_m verschwände. Dann würde die Wertigkeit der

*) Und zwar natürlich wieder auf die mannigfaltigste Weise.

in Rede stehenden Functionen durchweg $\leqq (m-1)$ sein. Wenn wir hier also die Gesamtheit der Lösungsysteme von (1) aufstellen wollen, so erhalten wir die Gesamtheit derjenigen algebraischen Functionen der F_n von einer Wertigkeit $\leqq m$, *die an der einzelnen der m vorgeschriebenen Stellen entweder einfach unendlich werden oder aber endlich sind, die aber doch sicher in allen übrigen Punkten der F_n endlich bleiben**). Da von den Coefficienten c im ganzen $(m-p+\tau)$ willkürlich bleiben, so haben wir in Anbetracht der so charakterisierten algebraischen Functionen der F_n den Satz, *dass sie sich alle aus $(m-p+\tau)$ linear-unabhängigen besonderen Functionen ihrer Art linear mit constanten Coefficienten aufbauen lassen.* Diese lineare Darstellung enthält aber im allgemeinen noch eine additive Constante c_0, wie man in (2) p. 540 sieht. Indem wir hierauf Rücksicht nehmen, werden wir das gewonnene Resultat so formulieren können: *Die allgemeinste algebraische Function unserer Art enthält im ganzen noch $(m-p+\tau+1)$ willkürliche Constante linear und homogen.*

Die hiermit geleistete Abzählung ist von Riemann in Nr. 5 seiner „Abel'schen Functionen" nur erst begonnen worden und wurde dann von Roch genau in der Weise, wie wir es schilderten, zu Ende geführt**). In diesem Sinne benennen wir den in Rede stehenden Satz künftighin als den *Riemann-Roch'schen Satz.* Derselbe gehört infolge seiner grossen Allgemeinheit zu den wichtigsten Grundlagen der Theorie der algebraischen Functionen.

§ 6. Ausdehnung des Riemann-Roch'schen Satzes auf $p=0$ und $p=1$. Eine besondere Anwendung desselben bei $p>1$.

In den drei letzten Paragraphen haben wir das Geschlecht p unserer willkürlich gewählten Fläche stets >1 vorausgesetzt. Inzwischen gelten die gewonnenen Resultate in einfachster Weise auch in den beiden Fällen $p=0$ und $p=1$, wie wir hier nachträglich belegen wollen.

Erstlich bei $p=0$ giebt es, wie wir sahen, keine Integrale erster Gattung, während an Stelle der Integrale zweiter Gattung die Hauptfunctionen eintraten. Ist eine unter ihnen particulär gewählte durch

---

*) Dass es Fälle giebt, in denen in der That einzelne der vorgegebenen Punkte $z_1, z_2, \cdots, z_m$ aus der Reihe der Unstetigkeitspunkte herausfallen, ist insbesondere von den Herren Brill und Nöther in deren sogleich zu nennender Abhandlung in Bd. 7 der Math. Ann. betont worden.

**) Man vergl. die Roch'sche Arbeit, *Über die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen*, Crelle's Journ. Bd. 64, p. 372 (1865).

w bezeichnet und ist w_i der Wert von w im Punkte z_i der F_n, so können wir geradezu an Stelle des Integrals Z_{z_i} in (2) p. 540 für den gegenwärtigen Fall den Ausdruck $\frac{1}{w-w_i}$ treten lassen. Suchen wir jetzt nach einer algebraischen Function w' der F_n, welche in m bei $z_1, z_2, \cdots, z_m$ gewählten Punkten der F_n je einfach unendlich wird, sonst aber endlich bleibt, so haben wir offenbar als allgemeinsten Ausdruck derselben:

$$(1) \qquad w' = c_0 + \frac{c_1}{w-w_1} + \frac{c_2}{w-w_2} + \cdots + \frac{c_m}{w-w_m},$$

wo $c_0, c_1, \cdots, c_m$ irgend welche Constante sind. An Stelle von (2) p. 540 tritt also bei $p = 0$ die *Partialbruchzerlegung* für den Ausdruck $R(w)$ der fraglichen Function w'. Im übrigen aber ergiebt die Abzählung der in (1) auftretenden Constanten: *Unter der Bestimmung, dass im Falle $p = 0$ für τ einfach Null gesetzt wird, gilt der Riemann-Roch'sche Satz auch für die Flächen F_n des Geschlechtes $p = 0$.* Man bemerkt übrigens leicht, *dass sich im gegenwärtigen Falle in mannigfachster Weise m linear-unabhängige Functionen* (1) *als m-wertige Functionen der F_n wählen lassen;* ein Ausfallen einzelner Unendlichkeitstellen, welches wir soeben im allgemeinen Falle als möglich bezeichnet hatten, findet also bei $p = 0$ jedenfalls nicht statt.

Bei $p = 1$ haben wir die Besonderheit, dass auf der F_n nur eine einzige Function φ existiert. Dieselbe wird bei $z = \infty$ in jedem Blatte der F_n im zweiten Grade verschwinden, sowie im einzelnen Verzweigungspunkte $(v-1)$-fach unendlich werden. In allen übrigen Punkten der F_n wird dagegen φ endlich und von Null verschieden sein. Wir bemerken nebenher: In diesen Verhältnissen ist der früher (p. 537) benutzte Satz begründet, dass bei Abbildung der F_n durch das Integral $u = \int \varphi dz$ die Umgebung jedes Punktes z_0 der F_n sich glatt auf die einfach bedeckte Umgebung eines bezüglichen Punktes u_0 abbildet. Dies findet nämlich statt, falls an der bezeichneten Stelle $(u - u_0)$ in erster Annäherung mit $(z - z_0)$ proportional ist, diesen letzteren Ausdruck $(z - z_0)$ für die Verzweigungspunkte etc. immer im früher erklärten Sinne gebraucht. Dass aber die in Rede stehende Proportionalität von $(u - u_0)$ und $(z - z_0)$ thatsächlich für *alle* Punkte der F_n stattfindet, ist, wie man leicht ins einzelne verfolgt, die unmittelbare Folge der vorausgeschickten Angaben über Null- und Unstetigkeitstellen von φ*).

*) Man versäume nicht, die entsprechende Überlegung auch bei $p > 1$ durchzuführen. In der Abbildung der F_n durch ein Integral $\int \varphi dz$ wird ein Ver-

Alle an die Integrale zweiter Gattung voraufgehend geknüpften Entwicklungen, *insbesondere also auch die Ableitung des Riemann-Roch'schen Satzes bleiben jetzt für* $p = 1$ *uneingeschränkt in Geltung.* Es tritt nur zufolge der gerade durchgeführten Überlegung dieselbe Vereinfachung, wie bei $p = 0$ ein, *dass nämlich* r *stets den Wert Null hat.* Auch darin gleicht der Fall $p = 1$ dem Falle $p = 0$, dass wir die eine bei ihm allein zu befriedigende Gleichung (1) p. 541, wie man sofort sieht, jedenfalls durch lauter nicht verschwindende c befriedigen können. *Für das gewählte System der* m *Unstetigkeitspunkte* $z_1, z_2, \cdots, z_m$ *existieren also auch bei* $p = 1$ *zugehörige algebraische Functionen, die wirklich* m*-wertig sind,* was man für später festhalten wolle.

Letzten Endes fügen wir hier noch mit Hülfe des Riemann-Roch'schen Satzes den Beweis unserer im letzten Paragraphen unbewiesen gelassenen Behauptung an, dass bei $p > 1$ jene $(2p - 2)$ Nullpunkte der Functionen φ auch wirklich alle auf der F_n beweglich sind. Nehme man nämlich im Gegenteil an, dass in einem etwa bei z_1 gelegenen Punkte sämtliche Functionen φ verschwinden. Wir wollen alsdann nachsehen, wieviele *ein*wertige Functionen auf der F_n existieren, die bei z_1 unendlich werden. Der Riemann-Roch'sche Satz giebt für diese Anzahl den Wert $m - p + r + 1 = 2$, da $m = 1$, $r = p$ zufolge unserer Annahme zutrifft. Diese Functionen können sich auch, wie ein Blick auf Formel (1) p. 547 zeigt, nicht etwa alle auf nullwertige Functionen, d. h. Constante, reducieren. Es müssten also auf der F_n wirklich einwertige algebraische Functionen existieren, was wohlbekannter Weise bei $p > 0$ undenkbar ist, weil sich sonst die Riemann'sche Fläche, deren $p > 0$, conform auf eine schlichte Ebene übertragen liesse. Wir können das gewonnene Resultat in folgender prägnanter Form aussprechen: *Unter den* φ*-Quotienten der* F_n *giebt es jedenfalls auch solche, deren Wertigkeit gleich* $(2p - 2)$ *ist.*

§ 7. Der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz. Die Specialfunctionen.

Es möge w eine m-wertige algebraische Function der F_n mit $p > 1$ sein, deren m Unstetigkeitspunkte bei $z_1, z_2, \cdots, z_m$ gelegen sind; wir nehmen an, dass keine zwei von diesen m Punkten der F_n

zweigungspunkt nur an denjenigen Stellen auftreten, welche einen der $(2p - 2)$ beweglichen Nullpunkte von φ abbilden. Wir führen ohne Beweis an, dass die fragliche Abbildung aus p über einander geschichteten Parallelogrammen besteht, wobei je zwei unmittelbar über einander liegende Parallelogramme durch zwei Verzweigungspunkte verbunden sind. Insgesamt treten also in der That $(2p - 2)$ solche Verzweigungspunkte auf (vergl. Riemann, Abel'sche Functionen, Nr. 12).

coincidieren. Die allgemeinste algebraische Function, welche an diesen m Stellen oder auch nur an einigen unter ihnen je einfach unendlich wird und sonst endlich ist, enthält zufolge des Riemann-Roch'schen Satzes im ganzen noch $(m - p + \tau + 1)$ willkürliche Constante linear. Wir wollen jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die hierbei auftretende ganze Zahl $\tau = 0$ oder > 0 ist. *In jenem Falle* $(\tau = 0)$ *nennen wir die vorgelegte Function w eine allgemeine, in diesem Falle* $(\tau > 0)$ *heisse sie eine Specialfunction.* Mit dieser letzteren Benennung belegen wir also, um es zu wiederholen, jede m-wertige algebraische Function der F_n, in deren m Unstetigkeitspunkten eine oder mehrere Functionen φ verschwinden. Sicher ist hiernach die Wertigkeit einer Specialfunction $m \leqq 2p - 2$. Was sich des näheren über diese Specialfunctionen der F_n aussagen lässt, wollen wir jetzt untersuchen.

Sei also die anfänglich vorgelegte Function w eine Specialfunction, und seien die τ linear-unabhängigen in ihren Unstetigkeitspunkten verschwindenden Functionen φ in irgend einer particulären Weise gewählt und durch $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\tau$ bezeichnet. Die beweglichen Nullpunkte einer beliebigen unter ihnen, etwa der ersten φ_1, seien bei $z_1, z_2, \cdots, z_m, z_{m+1}, \cdots, z_{2p-2}$ gelegen, von denen die ersten m die gegebenen Unstetigkeitspunkte unserer Specialfunction w sind. Man bilde sich alsdann die folgende, noch τ willkürliche Parameter α enthaltende Function:

$$(1) \qquad w' = \frac{\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \cdots + \alpha_\tau \varphi_\tau}{\varphi_1},$$

welche zufolge ihrer Darstellung gleichfalls eine Specialfunction ist. Wie man sieht, ist w' eine von denjenigen algebraischen Functionen der F_n, welche in den $m' = 2p - 2 - m$ Punkten $z_{m+1}, z_{m+2}, \cdots, z_{2p-2}$ oder auch nur in einigen unter ihnen je einfach unendlich werden, übrigens aber endlich bleiben. Die allgemeinste Function dieser Art enthält zufolge des Riemann-Roch'schen Satzes genau $(m' - p + \tau' + 1)$ willkürliche Parameter, unter τ' die Anzahl linear-unabhängiger φ verstanden, die in den fraglichen m' Punkten $z_{m+1}, \cdots$ verschwinden. Nun enthält aber die hierher gehörige Function w' bereits τ Parameter; es folgt daraus, dass notwendig

$$(2) \qquad \tau \leqq m' - p + \tau' + 1$$

sein muss.

Eine völlig analoge Überlegung knüpfen wir nunmehr an eine particuläre unter den Functionen (1). Die τ' linear-unabhängigen, in den m' Punkten $z_{m+1}, \cdots$ verschwindenden Functionen φ seien $\varphi_1, \varphi_2', \varphi_3', \cdots, \varphi_{\tau'}'$, wobei die erste unter ihnen, φ_1, die bislang

schon mit dieser Benennung belegte Function ist. Man bilde dann die folgende, τ' willkürliche Constante enthaltende Function

$$w'' = \frac{\beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2' + \cdots + \beta_{\tau'} \varphi_{\tau'}'}{\varphi_1}. \tag{3}$$

Ersichtlich gehört dieselbe zu denjenigen Functionen, die in den m Punkten $z_1, z_2, \cdots, z_m$ bez. in einigen unter ihnen unendlich werden, sonst aber überall endlich sind; und also findet man durch erneute Anwendung des Riemann-Roch'schen Satzes:

$$\tau' \leq m - p + \tau + 1. \tag{4}$$

Nun wolle man die Formeln (2) und (4) zusammenaddieren, was mit Rücksicht auf $m + m' = 2p - 2$ das Resultat $\tau + \tau' \leq \tau + \tau'$ ergiebt. Wir schliessen auf Grund desselben jetzt umgekehrt, *dass sowohl in* (2) *als* (4) *das Gleichheitszeichen allein Gültigkeit hat*, und dass also zwischen den hier in Rede stehenden ganzen Zahlen die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \tau &= m' - p + \tau' + 1, \\ \tau' &= m - p + \tau + 1, \end{aligned} \tag{5}$$

von denen übrigens vermöge $m + m' = 2p - 2$ jede eine Folge der anderen ist. Hieraus entspringen weiter mehrere wichtige Sätze. Wir formulieren zunächst den nachfolgenden Satz, der die zwischen den Specialfunctionen (1) und (3) bestehende gegenseitige Beziehung charakterisiert: *Gehören zu m unter den $(2p - 2)$ beweglichen Nullpunkten einer beliebigen Function φ im oft genannten Sinne im ganzen $\infty^{\tau'}$ Specialfunctionen der F_n*), so gehört zu den $m' = 2p - 2 - m$ übrigen Nullpunkten desselben φ ein System von ∞^{τ} Specialfunctionen, wobei dann τ und τ' an die Identitäten* (5) *geknüpft sind.*

Der hiermit gewonnene Satz ist zuerst vollständig von Brill und Nöther aufgestellt worden**), wurde von denselben aber an der eben citierten Stelle schlechtweg als der Riemann-Roch'sche Satz benannt***).

---

*) Damit soll gesagt sein, dass die allgemeinste unter ihnen τ' variabele Parameter linear enthält oder sich aus $(\tau' - 1)$ besonderen Functionen ihrer Art linear mit Hülfe einer additiven Constanten zusammensetzt, (cf. Formel (3) des Textes).

**) In der schon p. 549 erwähnten wichtigen Arbeit: *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Ann. Bd. 7, p. 269 (1873).

***) Man vergl. die Einleitung (p. 271), sowie § 5 (p. 280) der soeben genannten Abhandlung; vergl. ferner die Erläuterungen, welche Hr. Brill neuerdings zu der hier berührten Prioritätsfrage in Bd. 36 der Mathematischen Annalen giebt (*Über algebraische Correspondenzen* II, cf. insbesondere p. 321 u. f. daselbst).

Inzwischen geht der in Rede stehende Satz doch in Ansehung der durch ihn begründeten Reciprocität zwischen verschiedenen Systemen von Specialfunctionen in charakteristischer Weise über den (oben dargestellten) eigentlichen Riemann-Roch'schen Satz hinaus. Wir weichen dieserhalb von der durch die beiden genannten Autoren ursprünglich eingeführten Benennung ab, indem wir den fraglichen Satz hier vielmehr als den *Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatz* benennen.

Eine weitere wichtige Folgerung entnehmen wir jetzt aus dem Umstande, dass nach Formel (5) unter (3) die allgemeinste zu den m Punkten $z_1, z_2, \cdots, z_m$ im oft genannten Sinne gehörige algebraische Function der F_n angegeben ist. In der That setzt sich die Function (3) aus $(\tau' - 1)$ speciellen Functionen ihrer Art $\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'}, \frac{\varphi_3'}{\varphi_1'}, \cdots, \frac{\varphi_{\tau'}'}{\varphi_1'}$ linear zusammen. Aber unter den zu $z_1, \ldots, z_m$ gehörigen Functionen findet sich auch die anfangs vorgelegte Function w. Da dieselbe eine beliebige Specialfunction der F_n sein sollte, so folgt mit Rücksicht auf die rechte Seite von (3): *Jede Specialfunction der F_n lässt sich als Quotient zweier Functionen φ darstellen*, ein Satz, dessen Umkehrung ohne weiteres evident ist. Damit ist denn zugleich in einfachster Weise ausgesprochen, dass alle hier vorliegenden, die Specialfunctionen der F_n betreffenden Entwicklungen eine Bedeutung besitzen, *die von der besonderen, der Betrachtung zu Grunde gelegten Riemann'schen Fläche F_n unabhängig ist**).

Sei uns jetzt irgend eine algebraische Function w der F_n vorgelegt, deren Wertigkeit $m < p + 1$ sein möge. Da nun infolge des Riemann-Roch'schen Satzes für jede existierende algebraische Function $m - p + \tau > 0$ sein wird, so schliessen wir, dass bei $m < p + 1$ notwendig $\tau > 0$ sein muss. Wir folgern hiernach: *Jede algebraische Function der F_n mit einer Wertigkeit $m < p + 1$ ist eine Specialfunction und gestattet als solche eine Darstellung als Quotient zweier Functionen φ.*

Die Aufstellung und Untersuchung der zu einer Fläche F_n gehörenden Specialfunctionen gehört zu den interessantesten, aber auch schwierigsten Teilen der Riemann'schen Theorie und ist bislang keines-

---

*) Der Satz, dass jede Specialfunction w ein φ-Quotient ist, lässt sich übrigens leicht direct beweisen. Verschwinde etwa φ in den Unstetigkeitspunkten von w, so wird $\varphi \cdot w$ eine algebraische Function, die sich in den Verzweigungspunkten der F_n, sowie bei $z = \infty$ gerade wie φ verhält, im übrigen aber jedenfalls nicht unstetig wird. Es genügt das bereits, um in $\int \varphi w \, dz$ ein Integral erster Gattung und somit in $\varphi w = \varphi'$ eine Function φ der F_n zu erkennen. Damit ist aber der fragliche Satz dargethan. Von hieraus gewinnt man dann rückwärts aufs neue den Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatz.

wegs einer abgeschlossenen Lösung zugänglich gewesen. Hier ist es in der That, wo man den Artunterschieden der Flächen ein und desselben Geschlechtes in ausgiebiger Weise gerecht werden muss; denn es kann bei dem nämlichen p für zwei unterschiedene Flächen (d. h. für zwei Flächen, die nicht vermöge zugehöriger algebraischer Functionen in einander überführbar sind) die Theorie der bezüglichen Specialfunctionen sich sehr verschiedenartig gestalten*). Wir sind hier übrigens um so weniger verpflichtet, auf die hiermit berührten Fragen ausführlich einzugehen, als wir doch später keine Gelegenheit haben würden, von einer bezüglichen Darlegung Gebrauch zu machen. Mögen also die nachfolgenden Bemerkungen genügen.

Indem wir zur rationalen Darstellung der algebraischen Functionen der F_n neben z die Function w zu Grunde legen, gehen wir auf die p linearen Gleichungen (1) p. 547 zurück und setzen die dort gebrauchten Functionen φ in ihre rationalen Ausdrücke $\varphi_k = R_k(w, z)$ in w und z um. Die fraglichen Gleichungen schreiben sich dann:

$$(6) \qquad c_1 R_k(w_1, z_1) + c_2 R_k(w_2, z_2) + \cdots + c_m R_k(w_m, z_m) = 0$$

mit $k = 1, 2, \cdots, p$. Dabei sind die m Wertsysteme w, z jedesmal durch die zwischen w und z bestehende Gleichung $f(w, z) = 0$ verknüpft, so dass wir neben (6) noch die weiteren m Gleichungen haben:

$$(7) \qquad f(w_1, z_1) = 0, \quad f(w_2, z_2) = 0, \quad \cdots, \quad f(w_m, z_m) = 0.$$

Soll es sich jetzt um die Gesamtheit der m-wertigen Functionen der F_n handeln, so wird man nicht nur die c, sondern auch die $2m$ Grössen $w_1, z_1; w_2, z_2; \cdots$ als variabel ansehen müssen. Jedes Lösungsystem der Gleichungen (6), (7) liefert uns dann (vermöge der bezüglichen Gleichung (2) p. 540) eine zugehörige algebraische Function unserer Fläche.

Hier tritt nun insbesondere die Frage auf, welches bei vorgegebener F_n der kleinste Wert von m ist, für den noch zugehörige Functionen auf der F_n existieren. Sei w eine m-wertige Function, so gilt dasselbe von $w' = \frac{1}{w - a}$ und dabei kann man offenbar a stets so wählen, dass einer von den Unstetigkeitspunkten der Function w' eine beliebig vorgeschriebene Lage auf F_n hat. Giebt es also für ein bestimmtes m überhaupt ein Lösungsystem von (6) und (7), so giebt

*) Vergl. Brill und Nöther l. c., sowie die eben (p. 553) genannte Arbeit von Brill in Bd. 36 der Math. Annalen.

es auch noch ein solches, wenn etwa das Wertsystem z_m, w_m, natürlich unter Berücksichtigung der Relation $f(w_m, z_m) = 0$, beliebig gewählt ist. Es bleiben uns dann aber in unseren Relationen nur noch die $(2m - 2)$ Unbekannten w_1, z_1; $\cdots$; w_{m-1}, z_{m-1}, zu denen als weitere Unbekannte noch die $(m - 1)$ Quotienten der c hinzutreten. Insgesamt haben wir also $(3m - 3)$ Unbekannte, mit denen wir $(m + p - 1)$ Gleichungen befriedigen müssen. Nehmen wir an, dass diese Gleichungen von einander unabhängig sind, so erhalten wir stets und nur dann Lösungsysteme, wenn $m + p - 1 \leqq 3m - 3$ ist. Indem wir diese Ungleichung nach m auflösen, entspringt der Satz: *Auf der F_n giebt es zugehörige algebraische Functionen nur für diejenigen Werte m, die der Ungleichung genügen*:

$$m \geqq \frac{p+2}{2}. \tag{8}$$

Inzwischen dürfen wir diesen Satz nur sehr bedingungsweise aussprechen; und wirklich ist es äusserst leicht, Ausnahmen von demselben nachzuweisen. Man construiere z. B. irgend eine zweiblättrige Fläche über der z-Ebene mit $(2p + 2)$ Verzweigungspunkten, so gehört dieselbe zum Geschlechte p und besitzt in z doch eine zweiwertige algebraische Function. Ebenso weist man durch Construction geeigneter dreiblättriger Flächen etc. die Existenz von Flächen des Geschlechtes p mit drei-, vier- etc. wertigen algebraischen Functionen nach. Da haben wir also specielle Flächen des Geschlechtes p, für welche der Minimalwert von m unter die durch (8) gegebene Grenze herabsinkt. Wir behaupten jedoch: *Nicht jede Fläche des Geschlechtes p besitzt zweiwertige algebraische Functionen u. s. w.* Freilich können wir uns hier beim allgemeinen Beweise dieses Satzes nicht aufhalten; jedenfalls werden wir in dem später zumeist interessierenden Falle $p = 3$ noch ausführlich auf die gerade geschehene Behauptung zurückkommen.

§ 8. Einführung der Sprechweise der analytischen Geometrie.

Für eine zweckmässige Verwertung und Weiterbildung der gewonnenen Resultate ist es in manchem Betracht günstig, sich eines Sprachgebrauchs zu bedienen, der in der analytischen Geometrie entwickelt ist, sowie alsdann in die Anschauungsweisen der letzteren unsere functionentheoretischen Fragen auf eine sogleich zu bezeichnende Art einzukleiden. Die Grundlagen hierfür sind durch die Theorie *der algebraischen Curven* gegeben, wie diese seitens der Geometer entwickelt vorlag, als Riemann auftrat. Die nähere Verbindung der Riemann'schen Theorie mit der Theorie der Curven ist dann durch Clebsch inaugu-

riert und insbesondere von Brill und Nöther entwickelt worden*). Übrigens führt diese Methode in einer gewissen, weiterhin noch näher zu bezeichnenden Hinsicht über Riemann hinaus; sie hat also nicht bloss formale Bedeutung.

Möge ein System von ν linear-unabhängigen, m-wertigen algebraischen Functionen der F_n in $w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}$ vorgegeben sein, die alle übereinstimmend in den nämlichen m Punkten der F_n unendlich werden. Es handelt sich dann um den einfachen Gedanken: *diese ν variabelen Grössen w als Punktcoordinaten im Raume von ν Dimensionen R_ν anzusehen.* Dieser Schritt bedarf, wenn er nicht zu Unklarheiten führen soll, in zweierlei Hinsicht der näheren Erläuterung; und wir wollen hier eine solche um so lieber geben, als gewöhnlich etwas rasch über die dabei in Betracht kommenden Gesichtspunkte hinweggegangen wird, woraus man erklären mag, dass auf Seiten der Functionentheoretiker vielfach noch immer eine gewisse Abneigung gegen die in Rede stehende Denkweise bemerkbar ist.

Wir betonen zuvörderst, dass wir mit der Interpretation der w als gewöhnlicher Coordinaten noch keineswegs die Möglichkeit *complexer Werte* für dieselben aufgeben wollen. In der That stellen wir uns hiermit ja durchaus nicht in Widerspruch gegen die Auffassungsweisen, die in der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes gäng und gäbe sind; auch dort betrachtet man die Coordinaten erforderlichen Falles als beliebiger complexer Werte fähig und behält also die der unmittelbaren Anschauung der reellen Gebilde entstammenden Ausdrucksweisen für ein Gebiet algebraischer Untersuchungen bei, das der directen Anschauung zunächst nicht unterliegt und derselben nur in künstlicher Weise zugänglich gemacht werden kann**). Hierbei lassen sich nun, was den Wortlaut der Sätze angeht, gewisse Inconsequenzen nicht vermeiden. Nehmen wir z. B. den niedersten Fall $\nu = 1$, so haben wir nur eine Coordinate w_0 und dementsprechend einen Raum R_1 von einer Dimension heranzuziehen, den wir in üblicher Weise durch die Punkte *einer festen geraden Linie* interpretieren wollen. Was wir aber mit dem R_1 meinen, ist doch im Grunde ein zweidimensionales Gebiet, nämlich die Gesamtheit der *complexen Werte* der Grösse w_0, dieselbe Gesamtheit, die wir bisher in einer „Ebene" zu deuten gewöhnt waren. So wird also fortan als

*) Vergl. die schon auf Seite 553 genannte Arbeit im 7ten Bande der Math. Annalen (1873), sowie die von Lindemann bearbeiteten *Vorlesungen über Geometrie* von Clebsch (sechste Abteilung, 1876).

**) Nämlich durch die v. Staudt'sche Interpretation, auf die wir im Texte nicht weiter eingehen (v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856—61).

„mehrfach überdeckte Gerade" zu bezeichnen sein, was bisher eine „mehrblättrige Fläche über der Ebene der complexen Variabelen" genannt wurde. Dieser Wechsel der Bezeichnung mag unbequem sein, es liegt in ihm aber keinerlei wirkliche Schwierigkeit. Es wird nämlich weiterhin der Zusammenhang unserer Darstellung über den Sinn der jedesmal gebrauchten Ausdrucksweise niemals einen Zweifel aufkommen lassen.

Fernerhin machen wir auf den Umstand aufmerksam, dass wir sogleich *beliebig viele*, nämlich ν Coordinaten w neben einander stellen und damit also geometrische Betrachtungen und Constructionen in einem Raume R_ν von ν Dimensionen in Aussicht nehmen. Möge man auch hierin nichts weiter als die Tendenz erkennen, dass wir in einem der directen Anschauung nicht zugänglichen Gebiete die geschmeidige Ausdrucksweise der gewöhnlichen Geometrie festhalten wollen.

Übrigens ist es interessant zu sehen, wie die hier befürwortete Massnahme trotz der lange vorausgegangenen Auseinandersetzungen von Grassmann (1844) u. A. in der Theorie der algebraischen Curven nur langsam Boden gewonnen hat. In der wiederholt genannten Arbeit von Brill und Nöther z. B. ist ausdrücklich immer nur von Curven des R_2 oder R_3 die Rede, trotzdem daselbst alle Mittel beisammen sind, um gleicherweise auch den R_4, R_5, $\cdots$ zu berücksichtigen. Die erste der hierher gehörigen Arbeiten, in welcher die mehrfach ausgedehnten Räume als durchaus gleichberechtigt angesehen werden, dürfte diejenige von Clifford sein (*on the Classification of Loci*, Philosophical Transactions, Bd. 169, Jan. 1879). Dass endlich in der Reihenfolge der Räume R_ν der R_1 als vollgültiges Glied mitgezählt sein will (wodurch dann die ganze Theorie der über der $(x + iy)$-Ebene gelegenen mehrblättrigen Flächen sich, wie schon angedeutet, in eine Theorie der mehrfach überdeckten geraden Linie verwandelt) ist wohl zuerst von Klein an verschiedenen Stellen betont worden (vergl. z. B. den Aufsatz: *Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* in den Sitzungsberichten der Münchener Akademie von 1880, bez. in Bd. 17 der Math. Annalen). Die Riemann'sche Functionentheorie gebraucht ersichtlich nur den R_1: die Inbetrachtnahme der R_2, R_3, $\cdots$ kommt jetzt neu dazu. Dass dies vorteilhaft sein kann, werden wir leicht ermessen, wenn wir bedenken, dass in der Geometrie der Ebene, bez. des eigentlichen Raumes zahlreiche Verhältnisse sich viel übersichtlicher gestalten, als in der Geometrie der geraden Linie.

§ 9. Die Curve des Raumes R_ν von ν Dimensionen.

Wir haben den aufgestellten Ansatz jetzt näher auszuführen. Die Grössen $w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}$, die wir bisher auf der gegebenen Riemann'schen

Fläche betrachtet hatten, sollen fortan, sagten wir, als Punktcoordinaten im R_ν gedeutet werden. Indem wir die sämtlichen Wertsysteme der w in Betracht ziehen, welche den verschiedenen Punkten unserer Riemann'schen Fläche entsprechen, erhalten wir offenbar die Punkte einer bestimmten im R_ν gelegenen *Curve*, und diese Curve wird uns also fortan statt der Riemann'schen Fläche das Gegenbild des algebraischen Gebildes sein.

Hier werden wir nun von vornherein zwei Möglichkeiten aus einander zu halten haben: Es kann sein, dass das einzelne, für uns in Betracht kommende Wertsystem der $w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}$ allgemein zu reden nur je in einem Punkte unserer Riemann'schen Fläche statt hat, es kann aber auch sein, dass dasselbe in je μ Punkten der Riemann'schen Fläche auftritt. Im ersteren Falle entspricht unsere Curve der gegebenen Riemann'schen Fläche Punkt für Punkt eindeutig (womit nicht ausgeschlossen sein soll, dass einzelne Ausnahmen vorkommen können, wenn nämlich unsere Curve mehrfache Punkte hat, in denen verschiedene Zweige derselben zusammenstossen). Im anderen Falle müssen wir, um die Eindeutigkeit der Beziehung herzustellen, zu einem Mittel greifen, welches wir soeben bereits bei der geraden Linie (die den R_1 vorstellte) wie von selbst zur Anwendung brachten. Wir werden uns nämlich *die Curve des R_ν μ-fach überdeckt denken.* Die *Ordnung* der Curve wird aber im ersteren Falle gleich m, im zweiten gleich $\frac{m}{\mu}$ sein; denn die linke Seite der linearen Gleichung

$$(1) \qquad \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{\nu-1} w_{\nu-1} + \alpha_\nu = 0$$

mit beliebig gewählten Coefficienten α hat unserer Voraussetzung zufolge auf der Riemann'schen Fläche m *Null*punkte; ebenso viele *Schnitt*punkte wird also der durch diese Gleichung dargestellte lineare Raum $R_{\nu-1}$ mit unserer Curve haben, sofern wir letztere nur, um Eindeutigkeit der Beziehung zur Riemann'schen Fläche herzustellen, erforderlichen Falles mehrfach überdeckt denken. Von den m so entstehenden Schnittpunkten fallen dabei aber ersichtlich je μ in einen Punkt zusammen, so dass wir nur $\frac{m}{\mu}$ unterschiedene Schnittpunkte haben, w. z. b. w.

Bemerken wir noch besonders, weshalb wir die $w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}$ im vorigen Paragraphen ausdrücklich der Bedingung unterworfen hatten, linear unabhängig zu sein. Wären sie es nicht, bestünde also für *sämtliche* Werte, welche sie auf der Riemann'schen Fläche annehmen, eine Gleichung (1), so würde die entsprechende Gleichung für unsere Curve des R_ν identisch erfüllt sein; unsere Curve läge also nicht *eigentlich* im R_ν, sondern bereits in dem durch (1) dargestellten $R_{\nu-1}$.

Es wird nun darauf ankommen, die sämtlichen Überlegungen, die wir über die auf gegebener Riemann'scher Fläche existierenden Functionen anstellten, in geometrischer Form unter Bezugnahme auf unsere Curve zu wiederholen. Wir wollen etwa zunächst im Falle einer einfach überdeckten Curve die Bedeutung der zur Riemann'schen Fläche gehörenden algebraischen Functionen im Raume R_ν in Betracht ziehen. Da die $w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}$ das einzelne ihnen auf der Riemann'schen Fläche zugängliche Wertsystem nach Voraussetzung, allgemein zu reden, nur in *einem* Punkte derselben annehmen sollen, so werden sich, wie leicht zu sehen, die in Rede stehenden algebraischen Functionen *rational* durch die $w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}$ ausdrücken (wie wir das oben p. 499 im speciellen Falle einer Curve des R_2 ganz ausführlich darlegten). Umgekehrt wird aber auch jede rationale Function der w ihrerseits eine algebraische Function der Fläche liefern. Wir wollen jetzt die einzelne solche rationale Function der $w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}$ in den Quotienten zweier ganzen Functionen spalten:

$$R(w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1}) = \frac{\Psi(w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1})}{\mathrm{X}(w_0, w_1, \cdots, w_{\nu-1})}. \tag{2}$$

Die Punkte unserer Riemann'schen Fläche, in denen R einen beliebig gewählten Wert C annimmt, erscheinen dann als diejenigen Punkte unserer Curve, in denen die Gleichung

$$\Psi - C\mathrm{X} = 0 \tag{3}$$

erfüllt ist, ohne dass Ψ und X zugleich verschwinden. Wollen wir jetzt der Kürze halber die durch $\Psi = 0$ oder $\mathrm{X} = 0$ dargestellte Mannigfaltigkeit als eine *Fläche* des Raumes R_ν benennen (wie wir denn auch entsprechend die linearen Mannigfaltigkeiten (1), so oft es kein Missverständnis veranlasst, als *Ebenen* bezeichnen werden). Gleichung (3) giebt dann, was man in der Geometrie ein *Flächenbüschel* nennt. Dabei benennt man diejenigen Punkte, in denen gleichzeitig Ψ und X verschwinden (sofern solche überhaupt auftreten), als *Basispunkte* des Büschels (3). Nach alledem correspondieren also den Punkten unserer Riemann'schen Fläche, in denen $R = C$ wird, *diejenigen Schnittpunkte unserer Curve mit der durch* (3) *dargestellten Fläche, welche von den Basispunkten des bezüglichen Büschels verschieden sind.*

Oder (um ein anderes Beispiel derartiger Übersetzungen zu geben) wir wollen der Reihe nach diejenigen Curven des $R_1, R_2, R_3, \cdots$ betrachten, die unserer Riemann'schen Fläche correspondieren, wenn wir erstlich allein w_0 gegeben ansehen, dann w_0 und w_1 neben einander, dann w_0, w_1, w_2 etc. Wir haben also der Reihe nach eine gerade Linie, eine ebene Curve, eine eigentliche Raumcurve (des R_3) etc. Und welches wird deren gegenseitige geometrische Beziehung sein?

Wenn wir von den Coordinaten x, y eines Punktes der Ebene nur das x allein auffassen, so entspricht dem geometrisch, dass wir diesen Punkt auf die x-Axe „projicieren". *So werden unsere auf einander folgenden Curven jede eine Projection der folgenden sein.* Hier ist nun völlig deutlich, was wir am Ende des vorigen Paragraphen nur erst andeuteten, dass es nämlich einfacher sein kann, grössere Werte von ν in Betracht zu ziehen, statt kleinere. In der That können eine ebene Curve, eine Raumcurve etc. elegante Eigenschaften besitzen, die in der Projection verloren gehen oder doch nur umständlich zu erkennen sind*).

§ 10. Die äquivalenten Punktsysteme. Homogene Coordinaten. Die projective Auffassung.

Die kurzen Angaben des vorigen Paragraphen genügen bereits, um deutlich erkennen zu lassen, in welcher Hinsicht die Betrachtung der im R_ν gelegenen Curve geeignet ist, zu einer Erweiterung der bisher auseinandergesetzten functionentheoretischen Begriffsbildungen hinzuleiten. Wir haben bislang, so oft es sich auf einer Riemann'schen Fläche um eine algebraische Function handelte, unsere Aufmerksamkeit immer ganz besonders dem System der zugehörigen Unendlichkeitspunkte zugewendet. Nun stellten wir aber eine solche Function in (2) des vorigen Paragraphen in der Gestalt $R = \frac{\Psi}{X}$ dar, und $X = 0$ ist, geometrisch zu reden, unter den Flächen des Büschels $\Psi - CX = 0$ keineswegs notwendig ausgezeichnet. Wir werden also den sämtlichen, durch die wechselnden Werte von C festgelegten Punktsystemen unserer Curve dieselbe Aufmerksamkeit zuwenden wollen, wie seither dem $C = \infty$ entsprechenden Systeme allein. In der That können wir ja auch unsere Function R leicht durch eine solche ersetzen, bei welcher irgend eines dieser Punktsysteme, etwa das durch

$$\Psi - C'X = 0,$$

gegebene, die Unendlichkeitspunkte abgiebt, während gleichzeitig irgend ein anderes Punktsystem, z. B. das durch

$$\Psi - C''X = 0,$$

dargestellte, die Nullpunkte liefert. Wir brauchen da statt $R = \frac{\Psi}{X}$ nur den Quotienten

*) Wir berühren damit eine allgemeine Methode der geometrischen Deduction. Man. vergl. z. B. G. Veronese: *Behandlung der projectiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicierens und des Schneidens*, Math. Ann. Bd. 19 (1881), sowie interessante Untersuchungen von Segre und Anderen.

$$\frac{\Psi - C''X}{\Psi - C'X} \tag{1}$$

zu betrachten. *Daher wollen wir fortan die hier in Rede stehenden Punktsysteme so benennen, dass keines vor dem anderen ausgezeichnet erscheint.* Allgemein nämlich sollen zwei solche Punktsysteme unserer Curve (oder Riemann'schen Fläche), welche die Null- und Unendlichkeitsstellen einer Function R abgeben können, *äquivalente* Punktsysteme genannt werden. Die unendlich vielen durch

$$R = C, \quad \text{bez. } \Psi - CX = 0 \tag{2}$$

dargestellten Punktsysteme sind dann alle unter einander äquivalent und bilden mit Rücksicht darauf, dass C in der Gleichung (2) linear auftritt, *eine einfach unendliche lineare Schaar äquivalenter Punktsysteme**).

Ganz entsprechende Betrachtungen können wir jetzt offenbar anstellen, indem wir statt der einzelnen Function R eine lineare Verbindung von mehreren etwa μ beliebigen rationalen Functionen der $w_0, w_1, \cdots$:

$$R + \alpha_1 R_1 + \cdots + \alpha_{\mu-1} R_{\mu-1} \tag{3}$$

(wo die α beliebig veränderliche Parameter vorstellen) als Ausgangspunkt wählen. Wir werden nämlich jede solche lineare Verbindung auf die Gestalt bringen können:

$$\frac{\Psi + \alpha_1 \Psi_1 + \cdots + \alpha_{\mu-1} \Psi_{\mu-1}}{X},$$

wo die Ψ, X ganze rationale Functionen unserer Coordinaten w sind, und werden dann finden, dass je zwei Punktsysteme:

$$\begin{cases} \Psi + \alpha_1' \Psi_1 + \cdots + \alpha_{\mu-1}' \Psi_{\mu-1} - C'X = 0, \\ \Psi + \alpha_1'' \Psi_1 + \cdots + \alpha_{\mu-1}'' \Psi_{\mu-1} - C''X = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(wo die α', α'', C', C'' irgendwelche Constante bedeuten) einander äquivalent sind**). *Da haben wir nun der Formel* (4) *entsprechend eine μ-fach unendliche lineare Schaar äquivalenter Punktsysteme.* Alle diese Punktsysteme interessieren uns jetzt gleichförmig; wir bevorzugen kein einzelnes von ihnen, so wenig wir unter all' den verschiedenen rationalen Functionen, die wir uns den Formeln (4) entsprechend bilden können:

$$\frac{\Psi + \alpha_1'' \Psi_1 + \cdots + \alpha_{\mu-1}'' \Psi_{\mu-1} - C''X}{\Psi + \alpha_1' \Psi_1 + \cdots + \alpha_{\mu-1}' \Psi_{\mu-1} - C'X},$$

eine besondere vor den anderen herausgreifen.

---

*) Brill und Nöther gebrauchen l. c. statt des Wortes „äquivalent" den Ausdruck „coresidual"; das Wort „äquivalent" in dem im Texte gemeinten Sinne wurde von Dedekind und Weber eingeführt (Crelle's Journal, Bd. 92, 1880).

**) Jedoch rechnen wir immer die „Basispunkte", in denen Ψ, Ψ_1, $\cdots$, $\Psi_{\mu-1}$, X gemeinsam verschwinden, dem einzelnen Punktsystem nicht zu.

Man erkennt, dass sich so die Lehre von den durch ihre Unendlichkeitspunkte bestimmten algebraischen Functionen umsetzt in eine Theorie der linearen Schaaren zu einander äquivalenter Punktsysteme. Insbesondere verwandelt sich dabei der Riemann-Roch'sche Satz in den anderen, *dass ein System von m Punkten unserer Curve, in welchen im ganzen τ linear-unabhängige Functionen φ verschwinden, jedesmal einer* $(m - p + \tau)$*-fach unendlichen linearen Schaar äquivalenter Punktsysteme angehört.*

Wir haben diese Entwicklung in möglichst kurzer Weise vorgetragen, ohne besonders von denjenigen Punkten unserer Curve zu reden, die im R_ν unendlich weit liegen, d. h. denen unendlich grosse Werte unserer Coordinaten w zugehören. Wollen wir aber genauer untersuchen, so werden wir zu demjenigen analytischen Hülfsmittel greifen müssen, ohne welches allgemeinere Untersuchungen über algebraische Curven überhaupt undenkbar sind, *zum Hülfsmittel der homogenen Coordinaten.* Statt der ν Grössen $w_0, \cdots, w_{\nu-1}$ führen wir alsdann die *Verhältnisse* von $(\nu + 1)$ Grössen $x_0, \cdots, x_\nu$ ein, indem wir etwa schreiben:

$$w_0 : w_1 : \cdots : w_{\nu-1} : 1 = x_0 : x_1 : \cdots : x_{\nu-1} : x_\nu, \tag{5}$$

und verwandeln so die rationalen ganzen Functionen Ψ, X der w, die wir gerade betrachteten, in rationale ganze *homogene* Functionen der x (sogenannte *Formen* der x). Wir wollen dies hier für die allgemeinen Functionen (3) nicht weiter ausführen, beschränken uns vielmehr jetzt auf die linearen Functionen:

$$w_0 + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{\nu-1} w_{\nu-1}. \tag{6}$$

Indem wir dieselben in die Gestalt setzen:

$$\frac{x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{\nu-1} x_{\nu-1}}{x_\nu}, \tag{7}$$

erkennen wir, dass die ∞-fernen Punkte unserer Curve (die durch $x_\nu = 0$ ausgeschnitten werden) mit jedem Punktsysteme äquivalent sind, das von einer beliebigen „Ebene":

$$x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{\nu-1} x_{\nu-1} - C x_\nu = 0 \tag{8}$$

ausgeschnitten wird, und dass wir den ∞^ν Ebenen entsprechend, die es in unserem R_ν giebt, auf unserer Curve *eine ν-fach unendliche lineare Schaar äquivalenter Punktsysteme* besitzen.

Und nun erinnere man sich der Auffassungsweise der *projectiven Geometrie.* Vermöge derselben erscheint das Coordinatensystem der x nur als eines unter unendlich vielen gleichberechtigten, welche letztere gegeben sind durch:

(9) $$x_i' = \Sigma a_{ik} x_k, \ (i, k = 0, 1, \cdots \nu; \ | a_{ik} | \gtrless 0)$$

und also aus jenem System durch lineare Substitution entspringen. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir zur Darstellung der Curve an Stelle der $(\nu + 1)$ Ebenen $x_k = 0$ irgend $(\nu + 1)$ linear-unabhängige Ebenen $x_i' = 0$ setzen dürfen. Im Hinblick auf die Punktsysteme, welche auf unserer Curve von den Ebenen des Coordinatensystems ausgeschnitten werden, findet hierin offenbar unser oben aufgestellter Grundsatz, *äquivalente Punktsysteme als gleichberechtigt zu betrachten, also auch die Darstellung einer linearen Schaar äquivalenter Punktsysteme nicht gerade auf bestimmte einzelne dieser Systeme zu gründen*, seinen präcisen Ausdruck. Folgeweise werden wir fortan die Curve des R_ν durchweg im *projectiven Sinne* betrachten*). Zwei Curven, welche durch eine Substitution (9) in einander übergeführt werden können, erscheinen uns dann als identisch. Wir haben also der ν-fach unendlichen linearen Schaar äquivalenter Punktsysteme (8) entsprechend in diesem Sinne eine einzige, völlig bestimmte Curve des R_ν. *In demselben Sinne wird jeder einfach, zweifach, ... unendlichen linearen Schaar äquivalenter Punktsysteme, die wir auf der Riemann'schen Fläche construieren mögen, jedesmal eine wohlbestimmte Curve des R_1, R_2, $\cdots$ entsprechen.* Dies ist nun die endgültige Auffassungsweise, zu der wir hier durchdringen wollten, und mit der wir in den folgenden Paragraphen zu arbeiten haben werden.

§ 11. Von den Normalcurven C_m.

Die linearen Schaaren äquivalenter Punktsysteme, die wir vorhin auf einer Riemann'schen Fläche unterschieden, können nach verschiedenen Rücksichten in Arten geteilt werden. Jedes System vorgegebener m Punkte gehört nach dem Riemann-Roch'schen Satze, wie wir bereits bemerkten, einer $(m - p + \tau)$-fach unendlichen linearen Schaar an. Hier liegt es nun am nächsten zu unterscheiden, ob $\tau = 0$ oder > 0. Im ersteren Falle sprechen wir weiterhin von einer *allgemeinen* Schaar, im zweiten in Anlehnung an die Ausdrucksweise des § 7 von einer „*Specialschaar*“**). Aber es ist ein anderer Unter-

*) Unter algebraischen Gesichtspunkten führt die Entwicklung des Textes dahin, auf der Curve des R_ν allgemein die aus den $x_0, x_1, \cdots, x_\nu$ zu bildenden *Formen* im Sinne der *Invariantentheorie* zu betrachten. Wir werden später bei Gelegenheit auf diesen Gedanken zurückgreifen und verweisen hier einstweilen auf die Darstellung bei Klein: *Zur Theorie der Abel'schen Functionen* (Math. Ann. Bd. 36, 1889).

**) Cf. Brill und Nöther, l. c.

schied, auf den wir hier vor allem unsere Aufmerksamkeit richten wollen.

Wir müssen zu dem Zwecke vorab einen etwas schwierigen Punkt erläutern*). Sind m Punkte nach Belieben gegeben, so kann es sein, dass einer oder auch mehrere dieser Punkte *allen* den $\infty^{m-p+\tau}$ Punktsystemen, die mit dem System der gegebenen Punkte äquivalent sind, *gemeinsam* ist. Es tritt dies dann ein, wenn in den $(m-1)$, oder $(m-2)$, $\cdots$ übrigen Punkten $(\tau+1)$, bez. $(\tau+2)$, $\cdots$ Functionen φ verschwinden. In der That wird dann die Gesamtheit der mit den $(m-1)$, $(m-2)$, $\cdots$ bleibenden Punkten äquivalenten Punktsysteme ebenfalls $\infty^{m-p+\tau}$ sein: *Sofern wir also von dem festliegenden* 1ten, 2ten, $\cdots$ *Punkte absehen, kommen wir auf dieselben Punktsysteme, mögen wir von den m gegebenen Punkten oder von den $(m-1)$, den $(m-2)$, $\cdots$ ausgehen.* Die fraglichen Punktsysteme enthalten eben nicht mehr je m, sondern nur noch $(m-1)$ bez. $(m-2)$, $\cdots$ *bewegliche* Punkte. — Dieser Möglichkeit gegenüber werden wir nun eine naheliegende vereinfachende Verabredung treffen. Wir werden festsetzen, dass wir bei jeder vorgelegten linearen Schaar äquivalenter Punktsysteme immer nur die *beweglichen* Punkte der einzelnen Systeme ins Auge fassen und die so entstehende Zahl mit m bezeichnen wollen. Nur vermöge dieser Verabredung sind die folgenden Sätze genau.

Die Unterscheidung, welche wir in die Theorie der linearen Schaaren einführen wollen, ist nun diese. Es sei eine Schaar gegeben, bei welcher das einzelne System m (bewegliche) Punkte enthält. Dann ist die betreffende Schaar entweder mit der Gesamtschaar identisch, welche sich zu ihrem einzelnen Systeme von m Punkten nach dem Riemann-Roch'schen Satze hinzuconstruieren lässt und $(m-p+\tau)$-fach ausgedehnt ist, oder sie ist in dieser Gesamtschaar nur enthalten. Im ersteren Falle wollen wir von einer *Vollschaar*, im anderen von einer *Teilschaar* reden. Die Zahl ν der in einer Teilschaar vorkommenden Parameter ist natürlich $< (m-p+\tau)$.

Wir betrachten jetzt wieder die Curve des R_ν. Da unser Punktsystem nach Voraussetzung je m bewegliche Punkte enthalten sollte, wird die bezügliche Curve, wenn anders wir sie als einfach überdeckt annehmen dürfen, die m^{te} Ordnung besitzen, sie ist eine C_m. Jetzt unterscheiden wir, ob wir von einer Vollschaar oder einer Teilschaar ausgingen. Im ersteren Falle ist

$$\nu = m - p + \tau; \tag{1}$$

wir sprechen dann von einer Normalcurve C_m. Ersichtlich haben neben

*) Cf. Brill und Nöther, l. c.

den Normalcurven die anderen C_m (die den Teilschaaren entsprechen) nur eine untergeordnete Bedeutung. *Alle diese in niederen Räumen gelegenen C_m können nämlich aus der zugehörigen Normalcurve des $R_{m-p+\tau}$ durch wiederholte Projection abgeleitet werden.* In der That wird sich ihre analytische Darstellung aus der folgenden Formel:

$$(2) \qquad w_0 : w_1 : \cdots : w_{m-p+\tau-1} : 1 = x_0 : x_1 : \cdots : x_{m-p+\tau},$$

welche zur Normalcurve führt, dadurch ergeben, dass man einige der w, d. h. der x, weglässt. Umgekehrt ist die Normalcurve C_m selbst sicher nicht Projection einer in einem höheren Raume enthaltenen Curve m^{ter} Ordnung. Dies schliesst nicht aus, dass sie Projection einer Curve von der Ordnung $(m+1)$, $(m+2)$, $\cdots$ sein mag; wir werden die betreffende Projection dann nur so auszuführen haben, dass sie von einem Punkte aus geschieht, welcher der zu projicierenden Curve selbst angehört (alsdann nämlich sinkt bei der Projection die Ordnung der Curve, wie wir hier nicht weiter ausführen wollen).

Der Vollständigkeit wegen wollen wir jetzt doch auch noch den Fall *mehrfach überdeckter* Normalcurven in Betracht ziehen. Handele es sich um eine μ-fache Überdeckung, wobei also unsere Normalcurve eine μ-fach zählende Curve der Ordnung $\frac{m}{\mu}$ ist. Da ist nun auf Grund elementarer analytisch-geometrischer Überlegungen klar, dass in einem Raume von $(m-p+\tau)$ Dimensionen keine Curve eigentlich enthalten sein kann, deren Ordnung $< m-p+\tau$ wäre (jede Curve niederer Ordnung, die dem $R_{m-p+\tau}$ angehört, ist bereits in einem Raume niederer Dimension enthalten). Daher ergiebt sich die Ungleichung, die uns später nützlich sein wird:

$$\frac{m}{\mu} \geqq m-p+\tau$$

oder

$$(3) \qquad \mu \leqq \frac{m}{m-p+\tau}.$$

§ 12. Die rationalen und die elliptischen Normalcurven insbesondere.

Wir specificieren jetzt die Ausführungen des vorigen Paragraphen für die beiden niedersten Fälle $p=0$ und $p=1$, in denen beiden gegenüber der allgemeinen Theorie die besondere Vereinfachung eintritt, dass die Zahl τ des Riemann-Roch'schen Satzes stets gleich Null ist. Hierdurch kommen die Complicationen, die zu Anfang des vorigen Paragraphen besprochen wurden, bei ihnen von selbst zum Wegfall.

Was zunächst den Fall $p=0$ angeht, so haben wir bei ihm als einfachste auf der Riemann'schen Fläche existierende Functionen die

Hauptfunctionen (vgl. § 1, p. 533 u. f.), von denen wir hier gleich eine, die wir z nennen wollen, der Betrachtung zu Grunde legen. Ferner sei

$$a_1, a_2, \cdots, a_m$$

eine erste Reihe von m Stellen der Fläche,

$$b_1, b_2, \cdots, b_m$$

eine zweite solche Reihe. In

$$(1) \qquad \frac{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)}{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_m)}$$

haben wir dann eine zur Fläche gehörige algebraische Function, welche in den Punkten a (und nirgendwo sonst) verschwindet und in den Punkten b (und nirgendwo sonst) unendlich wird. Wir sehen: *Je zwei Systeme von m Punkten sind auf der Fläche einander äquivalent.* Es stimmt dies mit der Abzählung des Riemann-Roch'schen Satzes (cf. p. 563) überein, welche für jedes System von m Punkten im vorliegenden Falle eine m-fach unendliche lineare Schaar von äquivalenten Punktsystemen ergiebt. Es folgt, *dass es (für unsere projective Anschauung) bei $p = 0$ im Raume R_m nur eine einzige Normalcurve C_m giebt.* Dieselbe ist als *rationale Normalcurve* C_m in der neueren geometrischen Litteratur wohlbekannt*). Um sie darzustellen, schreiben wir:

$$(2) \qquad x_0 : x_1 : \cdots : x_m = g_0(z) : g_1(z) : \cdots : g_m(z),$$

unter den g linear-unabhängige ganze rationale Functionen m^{ten} Grades von z verstanden. Als speciellen Fall haben wir für $m = 1$ die einfach überdeckte gerade Linie, für $m = 2$ den Kegelschnitt der Ebene, etc. Übrigens giebt es für den projectiven Standpunkt überhaupt nur *eine* eigentlich im R_m gelegene C_m; in der That hat jede solche C_m das Geschlecht $p = 0$, wie man leicht aus dem Umstande folgert, dass sie sich durch wiederholte Projection jeweils von einem ihrer Punkte aus in eine C_1 des R_1 d. h. eine einfache gerade Linie projicieren lässt.

Ziehen wir nun den Fall $p = 1$ in Betracht. Als einfachste zu einer Riemann'schen Fläche des Geschlechtes 1 gehörige Gleichungsform haben wir früher die folgende hergestellt:

$$(3) \qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

und hier ist die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ eine Constante, welche in keiner Weise modificiert werden kann, deren Wert also für das betrachtete Gebilde $p = 1$ charakteristisch ist. Man drückt dies gewöhnlich dahin aus, dass man sagt: *die Gebilde $p = 1$ haben einen Modul.* Es ist dies ein erster wesentlicher Unterschied von dem Falle $p = 0$.

*) Vgl. beispielsweise die zusammenhängende Darstellung von Franz Meyer in dessen Buche: *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883).

Wir betrachten nunmehr auf dem einzelnen durch (3) gegebenen Gebilde lineare Schaaren äquivalenter Punktsysteme. Der Riemann-Roch'sche Satz ergiebt in dieser Hinsicht: *Jedes System von m Punkten gehört einer* $(m-1)$*-fach unendlichen linearen Schaar an.*

Wir schliessen daraus, dass es auf unserer zu (3) gehörenden Riemann'schen Fläche im Ganzen einfach unendlich viele solcher linearer Schaaren von Systemen zu je m Punkten giebt, und dass man also von (3) aus *auf einfach unendlich viele Weisen zu Normalcurven* C_m *des* R_{m-1} *übergehen kann.* Da haben wir bei $m = 2$ die doppelt überdeckte Gerade (von der wir seit lange wissen, dass sie, um zum Geschlechte $p = 1$ zu gehören, 4 Verzweigungspunkte tragen muss), bei $m = 3$ die ebene Curve dritter Ordnung, etc. etc.

Die nähere Betrachtung der solchergestalt entstehenden Normalcurven stützt man am besten auf die Theorie der elliptischen Functionen. Sei

$$u = \int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}} \tag{4}$$

das eine zu (3) gehörige überall endliche Integral. Die Coordinaten der Punkte der Normalcurve C_m erweisen sich dann als zu solchen doppeltperiodischen Functionen von u proportional, die innerhalb des Periodenparallelogramms der u-Ebene m Male verschwinden. Und hier ergiebt sich nun eine sehr merkwürdige Thatsache. Der Formel

$$u' = u + C \tag{5}$$

entsprechend, geht unsere Gleichung (3) auf einfach unendlich viele Weisen in sich selbst über. Hierbei permutieren sich dann gerade die verschiedenen einfach unendlich vielen $(m-1)$-fach ausgedehnten linearen Schaaren von Systemen zu je m Punkten, die wir vorhin fanden. Die Folge ist, *dass die Normalcurven* C_m*, welche man diesen verschiedenen Schaaren entsprechend von* (3) *aus ableiten kann, (wie wir kurz sagen wollen) alle unter einander identisch ausfallen.* Wir kommen hierauf weiter unten, wo von der Theorie dieser Normalcurven ausführlich gehandelt werden soll, noch einmal zurück und begnügen uns einstweilen damit, auf die Schrift von Klein zu verweisen: *Über die elliptischen Normalcurven der* n^{ten} *Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der* n^{ten} *Stufe* (Abhandl. der K. sächs. Ges. der Wiss., Math.-phys. Classe, Bd. 13, 1885)*).

*) Vgl. auch Segre: *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes*, Math. Ann. Bd. 27 (1886).

§ 13. Die Fälle $p > 1$: die Normalcurve der φ.

Unter den verschiedenen Normalcurven, welche einer Riemann'schen Fläche $p > 1$ zugehören, wollen wir hier etwas näher nur eine betrachten, welche in der Folge besonders wichtig ist. Bezeichnen wir p linear-unabhängige zur Fläche gehörige überall endliche Integrale durch $j_1, j_2, \cdots, j_p$, so lieferten die p Differentialquotienten

$$\frac{dj_1}{dz}, \frac{dj_2}{dz}, \cdots, \frac{dj_p}{dz} \tag{1}$$

p linear-unabhängige Functionen φ. *Diesen Functionen φ wollen wir jetzt p homogene Veränderliche $x_1, x_2, \cdots, x_p$ proportional setzen*, was offenbar darauf hinauskommt, die fortlaufende Proportion zu schreiben:

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_p = dj_1 : dj_2 : \cdots : dj_p. \tag{2}$$

Indem wir mit den Differentialen dj unsere Riemann'sche Fläche beschreiben, durchläuft der so bestimmte Punkt mit den Coordinaten x eine Curve, welche dem Raume R_{p-1} eigentlich angehört, insofern die φ bez. die dj linear-unabhängig sind. *Diese Curve ist es, welche wir fortan als Normalcurve der φ bezeichnen.*

Wir haben früher gesehen, dass die Functionen φ je in $(2p-2)$ „beweglichen" Punkten der Fläche verschwinden, und dass keiner dieser $(2p-2)$ Nullpunkte allen Functionen φ gemeinsam ist. Hiernach ist die Ordnung unserer Curve, sofern wir die Curve μ-fach überdeckt denken wollen, $\frac{2p-2}{\mu}$. Aber nun ziehen wir Ungleichung (3) p. 566 heran. Wir haben in derselben hier $m = 2p-2$, τ aber $= 1$ zu setzen (insofern es sich ja um Punktsysteme handelt, in deren jedem *eine* Function φ verschwindet). Dies giebt:

$$\mu \leqq \frac{2p-2}{p-1}, \text{ d. h. } \mu \leqq 2.$$

Wir haben also zwei Fälle aus einander zu halten:

Entweder ist unsere Curve nur einfach überdeckt, sie ist dann von der $(2p-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, und alle zu unserer Riemann'schen Fläche gehörenden algebraischen Functionen lassen sich rational durch die Verhältnisse der φ ausdrücken; —

oder unsere Curve ist doppelt überdeckt, die Curve als solche ist von der $(p-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und demnach (weil „eigentlich" im R_{p-1} gelegen) vom Geschlechte Null.

Wir werden den ersten Fall den *allgemeinen*, den zweiten den *hyperelliptischen* nennen. In der That tritt nur im Falle $p = 2$ (wo wir als Normalcurve der φ notwendig die doppeltüberdeckte Gerade haben) der hyperelliptische Fall immer ein; für alle grösseren Werte

von p ist er als Ausnahmefall aufzufassen. Indem wir uns vorbehalten, sogleich noch genauer auf den hyperelliptischen Fall einzugehen, fügen wir hier noch eine besondere Bemerkung über den allgemeinen Fall bei.

Wir haben früher gelernt, dass alle auf einer Riemann'schen Fläche existierenden Specialfunctionen sich als Quotienten linearer Verbindungen der φ darstellen. Es kommt dies jetzt darauf hinaus, dass alle auf der Fläche existierenden *Specialschaaren* aus unserer Normalcurve der φ durch lineare Aggregate (Büschel, Bündel etc.) von *Ebenen* ausgeschnitten werden. Seien

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \cdots, \quad \psi_\nu = 0$$

ν linear-unabhängige Ebenen, welche ein solches lineares Aggregat festlegen,

$$\psi_{\nu+1} = 0, \cdots, \quad \psi_p = 0$$

seien weitere $(p - \nu)$ unter einander und von den $\psi_1, \cdots, \psi_\nu$ linearunabhängige Ebenen. Schreiben wir dann, indem wir Punktcoordinaten y einführen:

$$(3) \qquad y_1 : y_2 : \cdots : y_\nu = \psi_1 : \psi_2 : \cdots : \psi_\nu,$$

so haben wir die unserer Specialschaar entsprechende *Specialcurve*; schreiben wir entsprechend

$$(4) \qquad y_1 : \cdots : y_\nu : \cdots : y_p = \psi_1 : \cdots : \psi_\nu : \cdots : \psi_p,$$

so haben wir, auf das Coordinatensystem der y bezogen, unsere anfängliche Normalcurve der φ. Nun geht Formel (3) aus Formel (4) hervor, indem wir beiderseits die letzten $(p - \nu)$ Glieder weglassen: *Die Specialcurve entsteht also aus der Normalcurve der φ durch $(p - \nu)$-malige Projection.*

Übrigens ist die Frage nach der Art der in jedem Falle existierenden Specialcurven eine solche, die nicht für alle Curven eines Geschlechtes p gleichzeitig zu beantworten ist, bei der vielmehr Artunterschiede gemacht werden müssen (cf. p. 555). Wir werden hierüber also auch keine allgemeinen Untersuchungen anstellen, verweisen vielmehr schon hier auf die verschiedenen, auch in allgemeinerer Hinsicht interessanten einzelnen Fälle, mit denen wir später zu thun haben werden*).

*) Wegen näherer Angaben über die Normalcurve der φ und der aus ihr abzuleitenden Specialcurven vergleiche insbesondere Weber: *Über gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle*, Math. Ann. Bd. 13 (1878), Nöther: *Über die invariante Darstellung algebraischer Functionen*, Math. Ann. Bd. 17 (1880), sowie kleinere Notizen von Kraus und von Nöther in Bd. 16, bez. Bd. 26 der Math. Ann. (1879, 1886).

§ 14. Die Fälle $p > 1$: Der hyperelliptische Fall.

Als Normalcurve der φ hatten wir im hyperelliptischen Falle die doppelt überdeckte C_{p-1} des R_{p-1}. Eine solche C_{p-1} kann immer, als vom Geschlechte Null, auf eine gerade Linie eindeutig bezogen werden. Das hyperelliptische Gebilde kann also stets durch eine doppeltüberdeckte gerade Linie (oder, in anderer Sprache, durch eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche über der z-Ebene) versinnlicht werden. Die beiden Blätter werden dabei, damit das Geschlecht $= p$ werde, in $2p+2$ Punkten zusammenhängen müssen. Sei $f_{2p+2}(z) = 0$ die Gleichung, durch welche wir diese $2p+2$ Punkte (Verzweigungspunkte) festlegen können. *Es müssen sich dann die sämtlichen zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen algebraischen Functionen rational durch z und $\sqrt{f_{2p+2}(z)}$ darstellen lassen.* Insbesondere aber merken wir uns den leicht indirect beweisbaren Satz: *Jede unserem Gebilde angehörende zweiwertige Function ist linear in z.*

Umgekehrt erweist sich das durch z, $\sqrt{f_{2p+2}(z)}$ definierte algebraische Gebilde (wofern nur $f_{2p+2}(z) = 0$ lauter getrennte Wurzeln hat) *in allen Fällen als hyperelliptisches Gebilde vom Geschlechte p**). Es ergeben sich nämlich

$$(1) \qquad j_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}, \quad j_2 = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{f(z)}}, \quad \cdots, \quad j_p = \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{f(z)}}$$

als die zugehörigen Integrale erster Gattung, und wir haben also:

$$(2) \qquad \varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p = 1 : z : \cdots : z^{p-1}.$$

Die Verhältnisse der φ sind demnach in der That nicht im Stande, den einzelnen Punkt des Gebildes festzulegen, nehmen vielmehr jedesmal in solchen zwei Punkten, die sich nur durch das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{f(z)}$ unterscheiden, dieselben Werte an.

Mit diesen Sätzen sind die hyperelliptischen Gebilde so einfach charakterisiert, dass es überflüssig scheint, noch länger bei ihnen zu verweilen**).

---

*) Demnach ist für $p > 1$ jede zweiblättrige Fläche und also überhaupt jede F_n mit zweiwertigen Functionen hyperelliptisch.

**) Vermöge der Darstellung des Textes erscheinen die hyperelliptischen Gebilde als ein *Grenzfall* der allgemeinen Gebilde, der dann eintritt, wenn die Normalcurve der φ, die im allgemeinen eine einfach zählende C_{2p-2} ist, insbesondere in eine doppeltzählende C_{p-1} ausartet. Diese Auffassungsweise wurde für $p = 3$ von Klein gegeben, siehe dessen Aufsatz: *Über den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven 4ten Grades*, II. (Math. Ann. Bd. 11, 1876), für allgemeines p wurde sie wohl zuerst von Kraus in der soeben bereits citierten Note ausgesprochen (*Über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen*

§ 15. Schlussbemerkung.

Unsere allgemeinen, die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen betreffenden Entwicklungen sind nunmehr, soweit dieselben hier gegeben werden sollten, zum Abschluss gekommen. Wir haben nicht nur für eine beliebig vorgelegte Riemann'sche Fläche F_n die Existenz zugehöriger algebraischer Functionen bewiesen, sondern wir haben auch für alle möglichen Fälle in bestimmter Weise solche algebraische Functionen der F_n ausgewählt, in denen sich die übrigen rational darstellen. Zu solchem Ende legten wir (um hier kurz zu recapitulieren) bei $p = 0$ eine einzelne Hauptfunction zu Grunde, bei $p = 1$ eine zweiwertige im Verein mit einer dreiwertigen Function, etwa geradezu diejenigen, die den doppeltperiodischen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ entsprachen. Bei einer Fläche F_n mit $p > 1$ hatten wir zu unterscheiden, ob ein hyperelliptisches Gebilde vorlag oder nicht. In jenem Falle war uns eine zweiwertige Function z zusammen mit der bezüglichen Wurzel $\sqrt{f(z)}$, wie wir kurz sagen, ein volles Functionssystem, in diesem Falle konnten wir als derartiges System die Verhältnisse von p linear-unabhängigen Functionen φ heranziehen.

Mit alledem soll aber keineswegs behauptet sein, dass bei besonderen Flächen F_n eines höheren p nicht auch noch andere Systeme von Functionen existieren mögen, welche z. B. das zugehörige System der φ an Brauchbarkeit bezüglich der gerade durchzuführenden Untersuchungen übertreffen mögen. Thatsächlich werden wir solche zweckmässigere Functionssysteme auf späterhin zu betrachtenden Flächen in ausgiebigster Weise vorfinden. Es sind dies übrigens in der Mehrzahl der Fälle Systeme von Specialfunctionen, d. h. also von solchen Functionen, deren einzelne sich als Quotient zweier linearer Verbindungen der φ darstellt.

Curven, Math. Ann. Bd. 16, 1879). Man hatte bis dahin den hyperelliptischen Fall dem allgemeinen Falle gegenüber mehr oder minder als wirklichen Ausnahmefall angesehen.

Drittes Kapitel.

Allgemeine Auflösung des functionentheoretischen Grundproblems.

Wenn wir jetzt nach Massgabe des p. 141 formulierten functionentheoretischen Grundproblems für die einzelne Untergruppe der Modulgruppe Γ zugehörige Modulfunctionen aufsuchen wollen, so ist es bei dem von uns gewählten Gange der Darstellung von grundlegender Bedeutung, dass wir für eine hier in Betracht kommende Gruppe von vornherein eine Function kennen, die gerade im Sinne unseres Problems bei *allen* Substitutionen dieser Gruppe und *nur* bei diesen unverändert bleibt. Wirklich gehört ja in dieser Art die eindeutige Function $J(\omega)$ zur Gesamtgruppe Γ selbst, wie wir schon oben (p. 113 u. f.) in ausführlicher Weise erörterten; des näheren fanden wir gerade die einfach bedeckte J-Ebene als conformes Abbild eines einzelnen Doppeldreiecks der Modulteilung.

Die erneute Heranziehung der Function $J(\omega)$ hat nun aber nicht nur die Bedeutung für uns, dass wir vermöge derselben das functionentheoretische Problem in einem Specialfalle lösen können, vielmehr werden wir $J(\omega)$ hier zu einem sehr viel weitergehenden Gebrauche heranziehen. Wir wollen nämlich die Existenz und Eigenart von Modulfunctionen auch für die übrigen Untergruppen Γ_μ der Modulgruppe jetzt dadurch erschliessen, dass wir diese Modulfunctionen nicht sogleich in ihrer Abhängigkeit von ω, vielmehr als Functionen von J auffassen. Gerade in diesem Umstande ist die charakteristische Wendung des Gedankens begründet, welche der nun darzustellenden Theorie das Gepräge giebt; und man wird bald sehen, wie uns eben bei dieser Fassung unserer Aufgabe der Excurs des vorigen Kapitels die Hülfsmittel zu ihrer Durchführung an die Hand giebt. In der That ist es das *Riemann'sche Existenztheorem* der vorigen Kapitel, welches uns nun zugleich *den Existenzbeweis der gesuchten Modulfunctionen* für alle Untergruppen Γ_μ liefern wird, nur dass wir uns dabei auf die Behandlung endlicher μ beschränkt sehen.

Indem wir aber die somit umgrenzte Entwicklung wirklich durchführen, wird unsere Darstellung den Höhepunkt erreichen, dem die

Mehrzahl aller voraufgehenden Untersuchungen zustrebte. Thatsächlich darf man es als das Hauptergebnis der ersten bezüglichen Arbeiten von Klein*) ansehen, dass in der nun zu beschreibenden Weise die Anwendung von Riemann's Theorie auf die zunächst rein gruppentheoretisch-algebraische Fragestellung nach den Resolventen der Modulgleichung ermöglicht wurde, wobei dann die fertig vorliegende Riemann'sche Theorie sogleich eine Menge fruchtbringender Ansätze ergab. Die bezüglichen Überlegungen in allgemeiner Form vorzuführen, ist der Zweck des gegenwärtigen Kapitels; sie durch Einzelbeispiele zu exemplificieren, bieten uns die folgenden Kapitel Gelegenheit.

Das Fundament für unsere anzustellende Untersuchung gewinnen wir in der in den ersten Paragraphen des Kapitels durchgeführten Abbildungsaufgabe.

§ 1. Umwandlung der Polygone bez. der geschlossenen Flächen F_μ in Riemann'sche Flächen.

Sei uns in Γ_μ irgend eine in Γ enthaltene Untergruppe des endlichen Index μ vorgelegt, so greifen wir ein Fundamentalpolygon F_μ derselben beliebig auf und legen selbiges zur geschlossenen Fläche F_μ zusammen. Dabei möge jedoch der dem einzelnen Punkte des ursprünglichen Polygons eigentümliche Wert $J(\omega)$ mit diesem Punkte fest verbunden vorgestellt werden, so dass also auch der entsprechende Punkt der Fläche F_μ jeweils mit dem bezüglichen Werte J behaftet erscheint. Die Werte J, welche solchergestalt auf der Fläche F_μ aufgetragen erscheinen, werden sich dann bei stetigem Fortgange über die Fläche selbst stetig ändern, abgesehen nur von den Eckpunkten c der auf der Fläche liegenden Dreiecksteilung, in welch' letzteren J jedesmal unendlich wird.

Ein einzelner complexer Wert J wird nun im ganzen immer in μ Punkten der Fläche stattfinden, die homolog in den μ Doppeldreiecken der Teilung von F_μ gelegen sind; wir können in diesem Sinne J durch Übertragung einer wohlbekannten Ausdrucksweise als eine μ-wertige Function auf der F_μ benennen. Solche μ Punkte der Fläche mit gleichem J sind nun jeweils durchgängig von einander getrennt gelegen, wenn der betreffende Wert J von 0, 1, ∞ ver-

*) Es sind hiermit in erster Linie die p. 142 genannten Abhandlungen im 14ten Bande der Math. Ann. gemeint, sodann auch die p. 418 ausführlich genannte Note: *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, in welcher letzteren die aus den concreten Beispielen der ersten Arbeiten abzuziehende allgemeine Theorie in kurzen Zügen skizziert ist.

schieden ist. Dagegen tritt teilweise Coincidenz der μ Punkte für die besonderen Werte $J = 1, 0, \infty$ ein, welche bez. in den Punkten a, b, c der Einteilung von F_μ stattfinden. Aus der gegenseitigen Gruppierung der Dreiecke auf der F_μ (cf. p. 345) entspringt in dieser Hinsicht ohne weiteres: *Die μ Punkte der F_μ mit $J = 1$ liegen entweder alle von einander getrennt, oder sie coincidieren teilweise oder ganz zu Paaren; desgleichen liegen die μ Punkte mit $J = 0$ entweder durchweg getrennt, oder sie coincidieren teilweise oder ganz zu je dreien; endlich können die μ Punkte der F_μ mit $J = \infty$ in irgendwelchen Multiplicitäten an den Stellen c zusammenfallen.*

Die geschlossene Fläche F_μ (und damit zugleich das ursprüngliche Polygon) soll nunmehr vermöge der solchergestalt auf derselben getroffenen Werteverteilung des J auf die Ebene der complexen Variabelen J abgebildet werden. Die Durchführung dieser Aufgabe ist uns ihrer Art nach durchaus nicht fremd; vielmehr wolle man bemerken, dass dieselbe in allen wesentlichen Punkten übereinstimmt mit der im vorigen Kapitel öfter herangezogenen Operation, eine n-blättrige Riemann'sche Fläche durch eine ihrer m-wertigen algebraischen Functionen auf eine m-blättrige zu übertragen. Wirklich haben wir ja auch schon soeben J als eine μ-wertige Function der Fläche F_μ bezeichnet und erblicken nun sofort: *Als Abbild der geschlossenen Fläche F_μ entspringt über der J-Ebene eine geschlossene μ-blättrige Riemann'sche Fläche*, die wir nun dem früheren Brauche gemäss sogleich selbst wieder F_μ nennen wollen. Die μ schraffierten Elementardreiecke der geschlossenen Fläche F_μ, deren jedes ja bei seiner ursprünglichen Lage in der ω-Halbebene allererst ein Abbild der positiven J-Halbebene war, liefern jetzt umgekehrt wieder die μ positiven Halbblätter der Riemann'schen Fläche F_μ; desgleichen entspringen aus den μ freien Dreiecken die μ negativen Halbblätter unserer Riemann'schen Fläche.

Vor allem aber ist es wichtig, dass wir über die Verzweigung der gewonnenen mehrblättrigen Fläche sofort bestimmte Angaben machen können. Wir haben zunächst: *Bei einer von $J = 1, 0, \infty$ verschiedenen Stelle werden jedenfalls alle μ Blätter isoliert verlaufen;* denn auf der im Raume gelegenen Fläche F_μ fand ein von $1, 0, \infty$ verschiedener Wert J immer in μ durchgehends getrennten Punkten statt. Verzweigungspunkte werden demnach notwendig nur an diesen drei speciellen Stellen $J = 1, 0, \infty$ eintreten können, und zwar finden wir für diese offenbar: *Bei $J = 1$ verläuft das einzelne Blatt unserer Riemann'schen Fläche F_μ entweder isoliert, oder es hängt noch mit einem zweiten zusammen; bei $J = 0$ ist das einzelne Blatt entweder isoliert, oder es ist eines von drei cyclisch verbundenen; die bei $J = \infty$ eintreten-*

den Verzweigungen sind von vornherein nicht näher angebbar, vielmehr dürfen hier die Blätter zu beliebigen Anzahlen in Verzweigungspunkten cyclisch zusammengeordnet sein.

Bemerken wir weiter, dass das Geschlecht p, welches der Riemann'schen Fläche F_μ nach Formel (2) p. 494 zukommt, selbstverständlicher Weise identisch ist mit dem Geschlechte p, das wir im vorigen Abschnitte (p. 331) dem zu Grunde liegenden Polygon F_μ bez. der Gruppe Γ_μ zuerteilten. Diese letztere Zahl p war ja das Geschlecht der im Raume geschlossenen Fläche F_μ, und diese muss, als wechselweise eindeutig auf die μ-blättrige Riemann'sche Fläche F_μ bezogen, zu demselben Geschlechte gehören, wie die letztere. Wirklich handelt es sich auch beide Male, (2) p. 340 und (2) p. 494, bei der Berechnung von p um die nämliche Formel.

Unsere gerade geschehenen Entwicklungen stehen in engster Beziehung zu den Erörterungen in I, 3, § 1 (p. 65 u. f.), wobei freilich der damals durchlaufene Gedankengang dem hier vorliegenden gerade entgegengesetzt ist. Damals haben wir μ-blättrige Riemann'sche Flächen (des Geschlechtes $p = 0$) in einfach bedeckte geschlossene Flächen (nämlich Kugeloberflächen) mit einer Einteilung in μ Bereiche verwandelt. Hier haben wir umgekehrt unsere in μ Doppeldreiecke geteilte geschlossene Fläche F_μ in eine μ-blättrige Riemann'sche Fläche über einer Ebene umgesetzt. Dabei ist sehr zu betonen, dass unsere jetzigen Voraussetzungen insofern allgemeinere sind, als wir ja hier von einem ganz beliebigen Geschlechte p handeln, während die soeben citierten Entwicklungen (p. 65 u. f.) durchaus $p = 0$ voraussetzen*). Wie übrigens damals die Kugeloberfläche mit ihrer Einteilung in manchem Betracht sehr viel zweckmässiger war als die bezügliche mehrblättrige Riemann'sche Fläche, so werden wir auch in der Folge häufig für die μ-blättrige Fläche über der J-Ebene die im Raume

*) Auf die Verallgemeinerung für beliebiges Geschlecht haben wir bereits p. 69 hingedeutet. Gerade wie wir hier an Stelle unserer μ-blättrigen Flächen F_μ über der J-Ebene die im Raume geschlossenen Flächen F_μ setzen können, lassen sich überhaupt beliebige mehrblättrige Riemann'sche Flächen eines beliebigen Geschlechtes in einfach bedeckte geschlossene im Raume gelegene Flächen umsetzen. Man vergleiche in diesem Betracht die schon oft genannte Schrift von Klein über Riemann, sowie die bezügliche Note auf Seite 543. In dieser Schrift handelt es sich übrigens, wie wir betonen müssen, durchweg um *conforme* Beziehungen der gewöhnlichen Riemann'schen Flächen auf im Raume geschlossene Flächen. Im Texte, wo die letzteren Flächen nur zur Veranschaulichung der allgemeinen Zusammenhangsverhältnisse herangezogen werden, genügt es, wenn wir eine stetige eindeutige Beziehung zwischen der mehrblättrigen Riemann'schen Fläche und der räumlichen F_μ festlegen.

gelegene Fläche F_μ mit ihren μ Doppeldreiecken an die Stelle setzen, welche letztere wir in diesem Sinne geradezu als *„die im Raume gelegene Riemann'sche Fläche F_μ"* bezeichnen*). Dieser Ersatz der mehrblättrigen F_μ ist bei manchen anschaulichen Überlegungen nahezu unentbehrlich, so z. B., wenn es gilt, den besonderen Charakter ausgezeichneter Γ_μ vermöge anschaulicher Eigenschaften der F_μ zu bezeichnen (cf. p. 333 u. f., sowie die weiter unten in § 8, p. 599 u. f. folgenden Entwicklungen).

Lässt sich übrigens (wie soeben unter dem Texte bemerkt) eine mehrblättrige Fläche ohne Zerreissen stets in eine einfach bedeckte, im Raume geschlossene Fläche verwandeln, so werden insbesondere alle μ-blättrigen Flächen über der J-Ebene, welche nur bei $J = 1, 0, \infty$, und zwar dort in der charakteristischen Weise verzweigt sind, im Raume geschlossene Flächen liefern, deren Einteilung in μ Doppeldreiecke den Bedingungen des Verzweigungssatzes (p. 345) genügt. Wir haben also das Resultat**): *Jede μ-blättrige Riemann'sche Fläche bezeichneter Art des Geschlechtes p über der J-Ebene definiert gerade in der nämlichen Weise, wie die im Raume gelegene F_μ, ein System gleichberechtigter Untergruppen Γ_μ des Index μ und des Geschlechtes p*****). Das ist denn die den gegenwärtigen Verhältnissen angepasste Formulierung des Verzweigungssatzes; im Hinblick aber auf diese Form unseres Satzes, die also von bestimmt verzweigten Flächen über der J-Ebene ausgeht, wurde bereits oben die Benennung „Verzweigungssatz" eingeführt.

§ 2. Betrachtung der Functionen $\omega(J)$ und $s(J)$ auf der Riemann'schen Fläche F_μ.

Mit der soeben durchgeführten Umwandlung des Polygons F_μ der vorgegebenen Untergruppe Γ_μ in eine μ-blättrige Riemann'sche Fläche über der J-Ebene haben wir nun den vollen Anschluss an die in den letzten Kapiteln entwickelte Theorie Riemann's gewonnen, was im Laufe dieses Kapitels des weiteren ausgebeutet werden soll. Wir werden dabei die Bezeichnung F_μ häufig zu brauchen haben, und um dann immer sogleich kurz angeben zu können, ob damit das Polygon in

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 14, p. 152.

**) Will man die Umsetzung der μ-blättrigen Fläche in eine im Raume geschlossene Gestalt an dieser Stelle vermeiden, so lassen sich übrigens auch alle oben (p. 346 u. f.) zum Beweise des Verzweigungssatzes beigebrachten Überlegungen in leicht ersichtlicher Weise direct an die μ-blättrige Fläche über der J-Ebene anknüpfen.

***) Vgl. Math. Ann. Bd. 14, p. 128.

der ω-Halbebene oder die Fläche über der J-Ebene gemeint ist, möge das erstere noch genauer $F_\mu^{(\omega)}$, die letztere aber $F_\mu^{(J)}$ genannt werden. F_μ schlechtweg behalten wir etwa für die im Raume gelegene Riemann'sche Fläche vor, während die vorübergehend auch zu brauchende Bezeichnung $F_\mu^{(s)}$ das in die zur bezüglichen s-Function gehörende Dreieckteilung $(2, 3, n)$ eingelagerte Polygon sein soll. Übrigens werden wir uns dieser specielleren Bezeichnungen nur so lange bedienen, als es der Deutlichkeit wegen wünschenswert erscheint.

Bevor wir auf diejenigen Functionen von J zu sprechen kommen, welche nach dem Riemann'schen Existenztheorem auf der Fläche F_μ existieren, ziehen wir hier zur umfassenderen Begründung der im vorigen Paragraphen hergestellten Beziehung zwischen $F_\mu^{(J)}$ und der ω-Halbebene die Function $\omega(J)$ in ihrem Verhalten auf der Riemann'schen Fläche $F_\mu^{(J)}$ in Betracht. Diese Auffassung von $\omega(J)$ als einer auf $F_\mu^{(J)}$ existierenden Function begründen wir etwa dadurch, dass wir die im Ausgangsdreieck der ω-Halbebene stattfindenden Werte ω als Functionswerte $\omega(J)$ in das bezügliche Blatt von $F_\mu^{(J)}$ übertragen denken, um von hier aus analytische Fortsetzungen über die Fläche hin zu veranstalten. Die Haupteigenschaften dieser Function $\omega(J)$ der $F_\mu^{(J)}$ werden wir zweckmässig unter Zugrundelegung der im Raume gelegenen Riemann'schen Fläche F_μ wie folgt beschreiben:

Die Function $\omega(J)$ ist jedenfalls in der Umgebung jedes Punktes der F_μ, ausgenommen die Ecken a, b, c der Teilung, endlich, eindeutig und stetig. Haben wir aber in einer Ecke a einmal ω_0 als einen dort stattfindenden Wert von ω erreicht, so ist dort bekanntlich in erster Annäherung $(\omega - \omega_0) = c_1\sqrt{J-1}$, während wir entsprechend in einem Punkte b annähernd $(\omega - \omega_0) = c_0\sqrt[3]{J}$ erhalten*). Wir finden so: *Auch in der Umgebung eines Punktes a oder b ist $\omega(J)$ eindeutig und stetig, wofern derselbe von vier bez. sechs Elementardreiecken umgeben ist; andrenfalls aber ist $\omega(J)$ dort in sofort ersichtlicher Weise verzweigt.* Haben wir endlich in einem Punkte c für $\omega(J)$ den Wert $\frac{\alpha}{\gamma}$ erreicht, so gilt dortselbst in erster Annäherung:

$$\left(\omega - \frac{\alpha}{\gamma}\right) = \frac{2\pi i}{\gamma^2 \log J}, \tag{1}$$

wobei J im Punkte c algebraisch ν-fach unendlich wird, unter 2ν die Zahl der Elementardreiecke verstanden, die den fraglichen Punkt c umgeben. Indem also hier entweder ω selbst oder eine geeignete lineare

*) Man vergleiche die speciellen Formeln (1) p. 100.

Function von ω logarithmisch unstetig wird, *ist jeder einzelne Punkt c ein Verzweigungspunkt für unsere Function* $\omega(J)$, *in welchem unendlich viele Zweige derselben zusammenhängen.*

Anschliessend hieran stellen wir diejenigen Eigenschaften von $\omega(J)$ zusammen, welche den Periodicitätseigenschaften der Integrale entsprechen. Wir haben da durch directe Übertragung wohlbekannter Eigenschaften von ω den folgenden Hauptsatz: *Die analytische Function* $\omega(J)$ *der* F_μ *substituiert sich bei Durchlaufung irgend welcher geschlossener Wege auf der Riemann'schen Fläche, allgemein zu reden, gebrochen linear, mögen wir nun mit einem eigentlichen Periodenwege zu thun haben oder nicht;* die unveränderte Reproduction des ω rechnen wir dabei als identische Substitution mit ein. Ohne auf die dabei eintretenden Einzelheiten noch näher einzugehen, wollen wir hier sogleich eine derartige Zerschneidung von F_μ einführen, dass in der entspringenden zerschnittenen Fläche $\omega(J)$ eine eindeutige Function des Ortes ist; wir isolieren solchergestalt einen einzelnen Zweig der analytischen Function $\omega(J)$. Zu diesem Ende ist vor allem ein normales Querschnittsystem herzustellen, bestehend aus $3p$ zweckmässig gezogenen Linien a_i, b_i, c_i. Hierüber hinaus müssen wir beachten, dass $\omega(J)$ in allen Punkten c und möglicherweise auch in einigen Punkten a, b verzweigt ist. Von jedem einzelnen dieser Verzweigungspunkte aus müssen wir einen einzelnen Schnitt bis an das schon gezogene Querschnittsystem heranführen; doch sollen diese hinzukommenden Schnitte weder sich selbst überkreuzen, noch unter einander collidieren. Man bemerkt sehr leicht, dass auch nun noch die beiderseitigen Ufer aller gezogenen Schnitte eine in sich zurücklaufende Randcurve für die zerschnittene Fläche abgeben.

Aus der gegenseitigen Beziehung der Fläche F_μ und der ω-Halbebene*) (auf die wir übrigens sogleich noch etwas ausführlicher zurückkommen müssen) folgt jetzt sehr leicht, dass $\omega(J)$, auf die nun zerschnittene F_μ eingeschränkt, eindeutig vom einzelnen Punkte abhängt. Hierbei werden die am einen Ufer eines der Schnitte stattfindenden Werte von $\omega(J)$ aus den jeweils am gegenüberliegenden Ufer eintretenden Werten durch eine lineare Substitution entspringen, und diese Substitution bleibt die nämliche jedesmal für eine derartige Strecke des einzelnen Schnittes, welche zwischen den Einmündungsstellen anderer Schnitte in jenen gerade betrachteten Schnitt verläuft**).

*) Cf. p. 346 u. f.

**) Dabei werden wir, wie man leicht bemerkt, längs der Schnitte a_i, b_i, c_i mit hyperbolischen Substitutionen zu thun haben, dagegen kommen parabolische

Wollen wir jetzt die zerschnittene F_μ durch einen einzelnen solcherweise isolierten Zweig von $\omega(J)$ auf die Ebene von ω abbilden! Was wir so erhalten, ist uns äusserst bekannt: *Ersichtlich werden wir zurückgeführt zum Fundamentalpolygon $F_\mu^{(\omega)}$ der anfänglich vorgelegten Gruppe Γ_μ, und zwar entweder zur ursprünglichen Gestalt von $F_\mu^{(\omega)}$ oder doch zu einer solchen, die aus jener durch erlaubte Abänderung hervorgeht**).* Indem wir aber in $\omega(J)$ eine vieldeutige Function der $F_\mu^{(J)}$ besitzen, werden die unendlich vielen durch analytische Fortsetzung erreichbaren Zweige von $\omega(J)$ als Abbilder der zerschnittenen Fläche unendlich viele Polygone liefern, die in ihrer Gesamtheit wohlbekannter Weise die ω-Halbebene lückenlos und einfach bedecken. Die gegenseitige Beziehung der Riemann'schen Fläche F_μ und der ω-Halbebene hat somit ihre volle analytische Grundlage gewonnen. — Man wolle überdies noch bemerken, dass es sich jetzt um eine ganz bestimmte conforme Beziehung zwischen der Fläche $F_\mu^{(J)}$ und der ω-Halbebene handelt, während diese Beziehung, wie wir sie im vorigen Abschnitte nur erst vorläufig dachten (p. 346 u. f.), noch gewisse hier fortfallende Willkürlichkeiten betreffs der Zuordnung der im Innern der einzelnen Dreiecke gelegenen Punkte einschloss. Auch gegenüber dem vorigen Paragraphen haben wir den Unterschied, dass es sich hier um eine conforme und nicht nur um eine stetige eindeutige Beziehung von $F_\mu^{(J)}$ auf $F_\mu^{(\omega)}$ handelt.

Die Auffassung von $\omega(J)$ als einer zur Riemann'schen Fläche $F_\mu^{(J)}$ gehörenden complexen Function begründet den Ausblick auf eine sehr interessante Erweiterung der Riemann'schen Theorie über die in den beiden vorigen Kapiteln eingehaltenen Grenzen hinaus. Wir können nämlich offenbar die Integrale einer Riemann'schen Fläche als diejenigen Functionen derselben bezeichnen, welche (neben ihrer Art unstetig zu werden) durch die Eigenschaft definiert sind, *dass sie bei Durchlaufung geschlossener Wege irgend welche ganze parabolische Substitutionen erfahren.* Da ist es denn nur eine durchaus consequente Weiterbildung der Theorie, wenn wir nun auf einer Riemann'schen Fläche auch solche Functionen heranziehen, *die sich bei Durchlaufung geschlossener Wege beliebig linear, aber keineswegs ausschliesslich parabolisch oder ganz substituieren.* Das Beispiel einer solchen Function auf

---

und elliptische Substitutionen für jene zusätzlichen Schnitte, welche von den Punkten c bez. a und b ausgehen.

*) Wollen wir direct zur ursprünglichen Gestalt von $F_\mu^{(\omega)}$ zurück, so werden wir zu Schnitten der Fläche F_μ offenbar nur Linien der auf der F_μ verzeichneten Dreiecksteilung zu gebrauchen haben.

unserer $F_\mu^{(J)}$ ist $\omega(J)$; ein weiteres Beispiel, das allerdings nicht direct zur Sache gehört, besprechen wir hier noch kurz nebenher.

In der That soll unsere hier folgende Zwischenbetrachtung der Function $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J\right)$ gelten, welche wir im speciellen auf der zu einer *ausgezeichneten* Γ_μ der n^{ten} Classe gehörenden $F_\mu^{(J)}$ deuten wollen. Erinnern wir vorab an die Bedeutung dieser Function für die niedersten Werte von n. Bei $n = 2, 3, 4, 5$ haben die bezüglichen Flächen $F_6^{(J)}$, $F_{12}^{(J)}$, ... bekanntlich das Geschlecht $p = 0$, und wir bemerken sofort: *Hier ist das zugehörige s jeweils eine Hauptfunction der* $F_{\mu(n)}^{(J)}$. Möge weiter $n > 5$ sein, so hat doch $F_\mu^{(J)}$, welche in Betracht kommende Γ_μ wir auch heranziehen, das Verzweigungsschema $\{2, 3, n\}$. Da betrachte man das Verhalten der zugehörigen Function s bei den speciellen Werten $J = 1, 0, \infty$ (cf. p. 96, 97) und wird ohne weiteres den fundamentalen Satz erkennen: *s ist auf der ganzen Fläche* F_μ (*d. i. auch in den Punkten a, b, c der Teilung*) *eine unverzweigte Function, die bei Durchlaufung geschlossener Wege sich linear* (*und zwar im allgemeinen gebrochen*) *reproduciert.*

Die so gewonnene Function muss nun bereits eindeutig sein, wenn wir sie auf die nur erst durch die Linien c_i, a_i, b_i zerschnittene Fläche einschränken. Was sich dabei als Abbild der so zerschnittenen F_μ in der s-Ebene ergeben wird, ist aus früheren Untersuchungen sofort ersichtlich: Wir gelangen offenbar zu dem in der s-Ebene eingelagerten Polygon $F_\mu^{(s)}$, das entweder der ursprünglichen Gestalt des Polygons $F_\mu^{(\omega)}$ direct entspricht oder doch durch erlaubte Abänderung aus dieser hervorgeht. Umgekehrt entnehmen wir daraus, *dass durch die Function s die Umgebung jedes Punktes der* $F_\mu^{(J)}$ *conform auf die einfach bedeckte Umgebung eines entsprechenden Punktes der s-Ebene abgebildet wird*, wobei sich alsdann die unendlich vielen Bilder der zerschnittenen Fläche, die durch die Gesamtheit der Zweige von s geliefert werden, in der bekannten einfachen Weise neben einander lagern.

Wir setzen noch hinzu, dass bei $n = 6$ die Substitutionen des zugehörigen s ganz und zwar parabolisch werden, wofern wir an der durch Fig. 32, p. 107 gegebenen particulären Auswahl dieser s-Function festhalten: *Hier also ist s offenbar ein Integral erster Gattung der* F_μ, und thatsächlich gehörte ja jede ausgezeichnete Γ_μ der sechsten Classe dem Geschlechte $p = 1$ an, womit sich das isolierte Auftreten *eines* Integrals erster Gattung motiviert. In höheren Fällen erscheint also die Function s als Verallgemeinerung der Hauptfunction bei $p = 0$ $(n = 2, 3, 4, 5)$ bez. des Integrals erster Gattung bei $p = 1$ $(n = 6)$*).

*) Wir haben uns bei diesen Verhältnissen um so lieber einen Augenblick

§ 3. Die Functionen der $F_\mu^{(J)}$ in Abhängigkeit von ω betrachtet.

Zufolge der Entwicklungen der beiden voraufgehenden Kapitel existieren auf unserer vorgelegten, durchaus specificierten Riemann'schen Fläche $F_\mu^{(J)}$ algebraische Functionen und deren Integrale. Unter den letzteren ziehen wir vorab nur diejenigen der ersten Gattung heran und nennen ein einzelnes solches Integral j, während eine beliebige algebraische Function der Fläche durch s bezeichnet sei. Die Aufgabe, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, ist die, dass wir s und j in ihrer Abhängigkeit von der gleichfalls zur $F_\mu^{(J)}$ gehörenden Function $\omega(J)$ in Discussion ziehen, wobei wir dann s und j des genaueren als $s(\omega)$ und $j(\omega)$ schreiben wollen. Um diese Aufgabe durchzuführen, stellen wir uns vorab die aus den voraufgehenden Entwicklungen ohne weiteres entspringenden Sätze zusammen: *Die unendlich vielen Abbilder der zweckmässig zerschnittenen $F_\mu^{(J)}$, die den unendlich vielen Zweigen der zur Fläche gehörenden Function $\omega(J)$ entsprechen, gehen aus einem unter ihnen durch Ausübung derjenigen Substitutionen $\omega' = v_k(\omega)$ hervor, welche unsere anfänglich vorgelegte Γ_μ bilden.* Aber weiter: Ein geschlossener Weg innerhalb der ω-Halbebene lässt sich stets ohne Zerreissen auf einen Punkt zusammenziehen. Bei der 1-∞-deutigen Zuordnung der Fläche F_μ zur ω-Halbebene entspricht einem geschlossenen Wege der Halbebene notwendig ein derartiger geschlossener Weg der F_μ, der sich ebenfalls auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Daher erhalten wir das Resultat: *Ein eigentlicher Periodenweg der $F_\mu^{(J)}$ giebt, wie wir ihn auch auf die ω-Halbebene übertragen mögen, dortselbst stets einen Weg, der zwei bezüglich der Γ_μ äquivalente aber nicht identische Punkte verbindet* (cf. p. 346 u. f.).

Nunmehr ziehe man dasjenige Blatt der Riemann'schen Fläche $F_\mu^{(J)}$ in Betracht, welches dem Ausgangsdreieck der ω-Halbebene correspondiert. Den in jenem Blatte stattfindenden Wertcomplex s, j übertrage man als Functionswerte $s(\omega)$, $j(\omega)$ in das Ausgangsdreieck und wolle von hieraus durch Fortsetzung die analytischen Functionen

---

aufgehalten, als den gerade ausgesprochenen Sätzen durchgehends eine allgemeine Bedeutung für beliebige Riemann'sche Flächen zukommt. Man vergleiche in diesem Betracht die Entwicklungen über die η-Function in der oft genannten Arbeit von Klein: *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, Math. Ann. Bd. 21 (1882). Im Verfolg dieser Verhältnisse findet man die gesamte Theorie der Modulfunctionen eingeordnet als Specialfall in die allgemeinere Theorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich. Wir müssen betreffs der letzteren auf das soeben gegebene Citat, sowie auf die weiter unten (am Schlusse des vorliegenden Bandes) zu machenden ausführlicheren Mitteilungen verweisen. Dortselbst werden wir dann auch Gelegenheit finden, auf die wichtigen, hier in Betracht kommenden Forschungen Poincaré's Bezug zu nehmen.

$s(\omega)$, $j(\omega)$ herstellen; wir führen das unter nochmaligem Gebrauch der $F_\mu^{(J)}$ etwa dadurch aus, dass wir von jenem Blatte der $F_\mu^{(J)}$ aus über die Fläche hin irgend welche Wege beschreiben und dann immer die correspondierenden Wege des ω einerseits, sowie die Werte von s und j andrerseits verfolgen. Wie wir die letztere Massnahme auch durchführen mögen, immer werden wir nur auf die positive ω-Halbebene eingeschränkt bleiben, hier aber auch jeden Punkt durch zweckmässige Wege auf der Fläche $F_\mu^{(J)}$ erreichen können. Daher als erstes Resultat: *Unsere Functionen $s(\omega)$, $j(\omega)$ existieren nur innerhalb der positiven Halbebene und besitzen in der reellen ω-Axe eine natürliche Grenze**).

Möge man jetzt für irgend einen speciellen Punkt ω_0 der Halbebene im Verfolg der soeben in Aussicht genommenen analytischen Fortsetzungen als zugehörige Werte s_0 und j_0 gefunden haben, so beschreibe man von ω_0 aus innerhalb der Halbebene einen ganz beliebigen geschlossenen Weg nach ω_0 zurück. Dieser Weg giebt auf die Fläche F_μ übertragen dort einen solchen geschlossenen Weg, der sich ohne Zerreissen auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Haben wir daher am Schlusse unseres Weges in der Halbebene den Punkt ω_0 wieder erreicht, so sind s und j wieder in ihre anfänglichen Werte s_0, j_0 übergegangen. Dem einzelnen Punkte der Halbebene kommt sonach nur ein bestimmter Wert von $s(\omega)$, sowie $j(\omega)$ zu, oder in anderen Worten: *Die Functionen $s(\omega)$ und $j(\omega)$ sind innerhalb des Bereiches, in welchem sie überhaupt existieren, eindeutige Functionen des Argumentes ω.*

Endlich benutzen wir den Umstand, dass sich ganz allgemein geschlossene Wege der Fläche in Wege zwischen relativ äquivalenten Punkten ω der Halbebene auseinanderlegen, dass aber auch umgekehrt jeder Weg zwischen relativ äquivalenten Punkten ω auf der Fläche F_μ einen geschlossenen Weg ergiebt. Offenbar folgt das Resultat: *Die Function $s(\omega)$ behält unverändert ihren Wert bei, wenn man ihr Argument ω vermöge einer zur Γ_μ gehörenden Substitution v_k transformiert; $j(\omega)$ nimmt demgegenüber eine der Substitution v_k eindeutig zugeordnete, aber von ω unabhängige additive Constante c_k an***):

$$(1) \qquad s(v_k(\omega)) = s(\omega), \quad j(v_k(\omega)) = j(\omega) + c_k.$$

---

*) Vergleiche die bez. Erörterungen p. 110 u. f., die wir hier nicht noch einmal wiederholen.

**) Betreffs der Einführung der Functionen $s(\omega)$ vergleiche man das zu Beginn des Kapitels gegebene Citat. Die $j(\omega)$ sind explicit wohl zuerst in einem speciellen Falle von Hrn. Poincaré in Betracht gezogen worden (cf. dessen Abhandlung *Sur l'intégration algébrique des équations linéaires*, Comptes Rendus, Bd. 97, p. 1189, 1883). Die nähere Untersuchung der Functionen $j(\omega)$ verdankt man jedoch Hrn. Hurwitz; man sehe dessen Note: *Zur Theorie der Modulargleichungen* Göttinger Nachrichten,

Wir wollen im folgenden Paragraphen die Eigenart der nun gewonnenen Functionen $s(\omega)$ und $j(\omega)$ noch näher charakterisieren, um sodann in § 5 zu untersuchen, inwiefern wir vermittelst derselben eine *Auflösung des functionentheoretischen Grundproblems* zu leisten vermögen. Vorab hängen wir hier im Anschluss an die Betrachtung am Ende des vorigen Paragraphen noch die folgende Überlegung an. Ist s wieder kurz die zur Classe n von Γ_μ gehörende Function

$$s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J\right),$$

so bemerke man, dass zwischen der bezüglichen Dreiecksteilung $(2, 3, n)$ und der Fläche F_μ eine 1-∞-deutige Beziehung besteht, die derjenigen zwischen der Modulteilung und der Fläche F_μ in allen wesentlichen Punkten gleicht. Insbesondere findet man durch eine ganz ähnliche Überlegung wie vorhin, *dass die Functionen s und j der Fläche $F_\mu^{(J)}$, in Abhängigkeit von s gedeutet, eindeutige Functionen dieses Argumentes sind, die aber nur in dem von der Teilung $(2, 3, n)$ bedeckten Bereiche existieren**).

Letzten Endes gedenke man auch noch der zwischen der Teilung $(2, 3, n)$ und der Modulteilung p. 356 u. f. begründeten 1-∞-deutigen Beziehung, wobei dem einzelnen Punkte s immer solche unendlich viele Punkte ω entsprachen, welche mit einem unter ihnen bezüglich der zugehörigen $\Gamma_{\{n\}}$ äquivalent waren. Wir bemerken jetzt nachträglich leicht: Indem wir s als Function von ω betrachten, wird durch $s(\omega)$ ein einzelnes Polygon der $\Gamma_{\{n\}}$ gerade einfach auf den von der Teilung $(2, 3, n)$ bedeckten Bereich abgebildet; diese Function $s(\omega)$ erweist sich dabei als eine eindeutige**), nur in der positiven

---

1883, sowie eine Reihe sich anschliessender glänzender Publicationen, in denen Hr. Hurwitz die fraglichen Functionen von ω auf später noch zu besprechende Probleme der Zahlentheorie in Anwendung bringt.

*) Ein entsprechender Satz für beliebige Riemann'sche Flächen wurde von Klein Math. Ann. Bd. 21 p. 214 ausgesprochen.

**) Wir haben hier einen Specialfall des allgemeinen vermöge der Schlussweisen des Textes beweisbaren Satzes: Die s-Function $s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; J\right)$ ist eine eindeutige Function der anderen $s\left(\frac{1}{\alpha_1\nu_1}, \frac{1}{\alpha_2\nu_2}, \frac{1}{\alpha_3\nu_3}; J\right)$, wobei die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ irgend welche ganze Zahlen sein dürfen. Indem wir insbesondere $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \infty$ wählen und noch statt J die Bezeichnung λ setzen, folgt: Jede beliebige s-Function unserer Art $s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; \lambda\right)$ ist eindeutig in $s(0, 0, 0; \lambda)$. Erteilen wir nunmehr dem λ wieder die Bedeutung von p. 305 u. f., so ist $s(0, 0, 0; \lambda) = \omega(\lambda)$, und also kommt das Resultat: *Jede Function*:

ω-Halbebene existierende Function von ω, die in allen bezüglich der Gruppe $\Gamma_{\{n\}}$ äquivalenten Punkten denselben Wert annimmt. Umgekehrt wird der oft genannte Bereich der s-Ebene durch die unendlich vielen Zweige der vieldeutigen Function $\omega(s)$ auf die unendlich vielen Polygone der $\Gamma_{\{n\}}$ abgebildet, welche in wohlbekannter Weise die positive ω-Halbebene lückenlos und einfach bedecken. — Wir brauchen übrigens auf diese die s-Functionen betreffende Sätze weiterhin nicht mehr zurückzukommen.

§ 4. Charakter der $z(\omega)$, $j(\omega)$, als der für die Γ_μ gesuchten Modulfunctionen.

Indem wir zu den soeben gewonnenen Functionen $z(\omega)$ und $j(\omega)$ zurückkehren, soll es sich namentlich darum handeln, den Charakter derselben insoweit anzugeben, dass diese Functionen dadurch völlig bestimmt sind. Möge etwa, um vorerst von $z(\omega)$ allein zu handeln, das ursprüngliche z auf der μ-blättrigen Riemann'schen Fläche $F_\mu^{(J)}$ eine m-wertige algebraische Function sein. Wenn wir alsdann $F_\mu^{(J)}$ in irgend einer Weise auf ein zur anfänglich ausgewählten Γ_μ gehörendes Polygon $F_\mu^{(\omega)}$ der ω-Halbebene ausbreiten, so werden wir von der einzelnen Function $z(\omega)$ neben dem bereits im vorigen Paragraphen für dieselbe erkannten Charakter vor allem den Satz auszusprechen haben, *dass sie innerhalb des Polygons $F_\mu^{(\omega)}$ nirgends einen wesentlich singulären Punkt besitzt, vielmehr jeden complexen Wert gerade m Male annimmt**).

Hierbei ist vorerst noch der näheren Erläuterung bedürftig, was es heisst, $z(\omega)$ zeige „innerhalb des Polygons" das gerade ausgesprochene Verhalten; wir müssen zu dem Ende auf die Riemann'sche Fläche $F_\mu^{(J)}$ selbst zurückgreifen, sowie auf das Verhalten ihrer algebraischen Functionen d. i., ausführlich gesprochen, der zu ihr gehörenden eindeutigen Functionen ohne wesentlich singuläre Punkte. Ist in einem bei J_0 gelegenen Punkte der Fläche z_0 der Wert des gerade betrachteten z, so besitzen wir nach unseren früheren ausführlichen Darlegungen

---

$$z\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}; \lambda\right)$$

ist eine eindeutige Function von ω. Man vergleiche hierzu Klein Math. Ann. Bd. 14 p. 159, unten, und „Ikos." p. 131, sowie die Arbeit von Papperitz: *Über die Darstellung der hypergeometrischen Transcendenten durch eindeutige Functionen,* Math. Ann. Bd. 34 (1888). In noch wesentlich allgemeinerer Form tritt das hiermit zur Sprache gekommene Princip der Eindeutigkeit bei Poincaré auf.

*) Man kann dies auch dahin aussprechen, dass die Function $z(\omega)$ „innerhalb des Polygons $F_\mu^{(\omega)}$" den Charakter einer rationalen Function besitzen soll.

(p. 497 u. f.) für die Umgebung des fraglichen Punktes J_0 eine Darstellung unserer Function:

$$(1) \qquad s - s_0 = a_1(J - J_0) + a_2(J - J_0)^2 + \cdots,$$

wobei wir noch kurz an die besondere Bedeutung von $(s - s_0)$ bez. $(J - J_0)$ bei besonderen Lagen von s_0 und J_0 erinnern wollen (cf. p. 497): Es sollte $(s - s_0)$ für $s_0 = \infty$ nichts anderes als $\frac{1}{s}$ bedeuten, was entsprechend auch für J gilt, während überdies $(J - J_0)$ die Bedeutung $\sqrt[\nu]{J - J_0}$ haben soll, falls der betrachtete Punkt bei J_0 ein Verzweigungspunkt mit ν dortselbst cyclisch zusammenhängenden Blättern ist. Zeigt nunmehr das erste in (1) thatsächlich auftretende Glied den Exponenten n, so haben wir bekanntlich zu sagen, es nehme s an der betreffenden Stelle n-fach den Wert s_0 an. Bei der ausführlich geschilderten Beziehung der Fläche $F_\mu^{(J)}$ auf die ω-Halbebene entspringen jetzt aus diesen nochmals in Erinnerung gebrachten Sätzen des vorletzten Kapitels ohne weiteres die nachfolgenden Resultate:

Ist ω_0 *ein beliebiger Punkt im Innern* der positiven Halbebene, so besitze s dortselbst den ganz bestimmten Wert s_0. Es existiert alsdann für die Umgebung von ω_0 eine Darstellung

$$(2) \qquad s - s_0 = \alpha_1(\omega - \omega_0) + \alpha_2(\omega - \omega_0)^2 + \cdots$$

für $(s - s_0)$ nach ansteigenden Potenzen von $(\omega - \omega_0)$. Ist ω_0 von einer Ecke der Modulteilung verschieden, und trägt das niederste in (2) wirklich eintretende Glied den Exponenten n, so sagen wir wieder, *es werde s an jener Stelle n-fach gleich s_0*, und zwar gilt dieser Satz, mögen wir nun das Verhalten von s allgemein in der Halbebene ω oder auch sogleich innerhalb des Polygones $F_\mu^{(\omega)}$ abschätzen.

Die Betrachtung ist aber auf das Polygon $F_\mu^{(\omega)}$ einzuschränken, sobald der betrachtete Punkt ω_0 *eine Ecke der Modulteilung* ist; denn diese entsprechen den Verzweigungspunkten der $F_\mu^{(J)}$.

Sei erstlich ω_0 *ein mit* $\omega = i$ *äquivalenter Punkt*, so haben wir die Fallunterscheidung zu machen, ob der betreffende Punkt der geschlossenen Fläche F_μ von vier oder zwei Elementardreiecken umlagert ist. Im ersteren Falle bleibt die soeben im Anschluss an (2) für ausserhalb der Ecken gelegene beliebige Punkte ω_0 ausgesprochene Regel bestehen; im letzteren Falle (wo $(J - J_0)$ in erster Linie mit $(\omega - \omega_0)^2$ proportional ist) haben wir jedoch an Stelle von (2) die Entwicklung

$$(3) \qquad s - s_0 = \alpha_1(\omega - \omega_0)^2 + \alpha_2(\omega - \omega_0)^4 + \cdots;$$

und hier müssen wir nun offenbar sagen, *es nehme s an der fraglichen*

Stelle ω_0 den Wert z_0 „innerhalb des Polygons" n-fach an, wenn der erste in (3) *wirklich auftretende Exponent $2n$ ist.* Eine völlig analoge Bemerkung gilt ersichtlich für die mit $\omega = \varrho$ äquivalenten Ecken der Modulteilung; wir unterlassen, dieselbe noch besonders auszusprechen.

Eine besondere Betrachtung erfordern nun noch *die Spitzen, mit denen unser Polygon $F_\mu^{(\omega)}$ die reelle Axe erreicht.* Um in einer einzelnen unter ihnen den Wert von $z(\omega)$ festzustellen, werden wir uns derselben durchaus innerhalb des Polygons annähern. Im übrigen aber brauchen wir nur daran zu erinnern, dass $J - J_0$ an fraglicher Stelle die Bedeutung $J^{-\frac{1}{\nu}}$ hat (wenn 2ν die Anzahl der die betreffende Stelle der geschlossenen Fläche F_μ umgebenden Dreiecke ist), und dass J^{-1} dortselbst in erster Annäherung mit

$$r' = e^{2\pi i \frac{+\delta\omega - \beta}{-\gamma\omega + \alpha}}$$

proportional ausfällt (cf. Formel (1) p. 578), unter $\omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$ den Wert von ω für die in Rede stehende Spitze verstanden. In dieser Entwicklungsgrösse r' haben wir nun sofort für z die Darstellung:

$$z(\omega) - z_0 = \alpha_1 r'^{\frac{1}{\nu}} + \alpha_2 r'^{\frac{2}{\nu}} + \alpha_3 r'^{\frac{3}{\nu}} + \cdots \tag{4}$$

und werden jetzt den Satz aufzustellen haben: $z(\omega)$ *wird innerhalb des Polygons $F_\mu^{(\omega)}$ in der fraglichen Spitze bei $\omega_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$ den Wert z_0 n-fach annehmen, wenn der erste in* (4) *wirklich auftretende Exponent $\frac{n}{\nu}$ ist.* Setzen wir in (4) noch $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ statt ω ein, so geht r' direct in unsere Entwicklungsgrösse r über (cf. (4) p. 146). Die Darstellung (4) ergiebt dabei:

$$z\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) - z_0 = \alpha_1 r^{\frac{1}{\nu}} + \alpha_2 r^{\frac{2}{\nu}} + \alpha_3 r^{\frac{3}{\nu}} + \cdots, \tag{5}$$

und wir haben nun einfach bei $\omega = i\infty$ zu untersuchen, um das Verhalten von $z\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ in Erfahrung zu bringen. Bei späteren Anwendungen wird die so ermöglichte Einschränkung der Untersuchung auf die Spitze $\omega = i\infty$ gelegentlich eine Erleichterung der Rechnung herbeiführen.

Jetzt heisst unsere am Eingang des Paragraphen formulierte Behauptung, $z(\omega)$ habe „innerhalb des Polygons" keinen singulären Punkt, offenbar nichts anderes, *als dass $z(\omega)$ allenthalben Entwicklungen vom Typus* (2), *bez.* (3) *und* (4) *zulasse.* Im übrigen aber fassen wir die

Haupteigenschaften von $z(\omega)$ noch einmal in folgender Weise zusammen: *$z(\omega)$ ist eine nur in der positiven Halbebene existierende eindeutige analytische Function von ω, die unverändert bleibt, wenn man das Argument ω durch irgend eine zur Γ_μ gehörende Substitution v_k transformiert, die also in relativ äquivalenten Stellen der verschiedenen Polygone $F_\mu^{(\omega)}$ stets denselben Wert hat; die Function $z(\omega)$ nimmt überdies einen beliebigen Einzelwert, z. B. den Wert ∞, in dem soeben erläuterten Sinne innerhalb eines einzelnen Polygons der Γ_μ insgesamt jeweils m Male an, wobei m eine zunächst nicht näher bestimmte ganze Zahl ist.* Setzen wir vor allem hinzu, *dass die Function $z(\omega)$ durch ihre somit aufgezählten Eigenschaften als definiert anzusehen ist*, was ohne weiteres aus den bezüglichen Sätzen über die algebraischen Functionen der $F_\mu^{(J)}$ entspringt.

Man wird lange erkannt haben, dass wir in den $z(\omega)$ gerade derartige Functionen gewonnen haben, wie sie uns unser functionentheoretisches Grundproblem (cf. p. 141 u. f.) für die Γ_μ zu finden aufgab. Wollen wir in der That neben den damals postulierten Eigenschaften der elliptischen Modulfunctionen jetzt noch die Forderung hinzusetzen, dass sie in Bezug auf Entwickelbarkeit in Potenzreihen (2), (3), (4) den Charakter unserer $z(\omega)$ teilen sollen, so entspringt nun ohne weiteres der *Fundamentalsatz: Für jede Untergruppe Γ_μ von endlichem Index existieren zugehörige elliptische Modulfunctionen, nämlich die von uns gewonnenen $z(\omega)$; andere als diese aber giebt es nicht.* Indem wir sonach in allgemeinem Ansatze das functionentheoretische Grundproblem vermöge der Riemann'schen Theorie haben lösen können, werden wir nun sogleich weiter zu betrachten haben, wie sich die gewonnene Lösung ins einzelne ausgestaltet. Vorab gedenken wir aber erst noch der Functionen $j(\omega)$, da wir auch diese späterhin mannigfaltig zu gebrauchen haben.

Indem wir auch $j(\omega)$ als eine zur Γ_μ gehörende elliptische Modulfunction bezeichnen, bleiben wir freilich nicht direct im ursprünglichen Rahmen unseres functionentheoretischen Grundproblems, und es erscheint demnach zweckmässig, in Anlehnung an die Verhältnisse auf der Fläche $F_\mu^{(J)}$ $j(\omega)$ als eine *„transcendente"* Modulfunction der Γ_μ zu bezeichnen, während wir demgegenüber $z(\omega)$ eine *„algebraische"* Modulfunction der Γ_μ nennen werden. Die für die Beurteilung von $z(\omega)$ im einzelnen Punkte des Polygons gegebenen Regeln finden ohne weiteres auch auf $j(\omega)$ ihre Anwendung, wo wir dann bemerken werden, dass $j(\omega)$ innerhalb des Polygons allenthalben endlich und stetig ist. Mögen etwa $j_1(\omega), j_2(\omega), \cdots, j_p(\omega)$ einem System linear-unabhängiger Integrale erster Gattung der $F_\mu^{(J)}$ entsprechen, so merken wir uns für spätere

Anwendung vor allem noch den sofort ersichtlichen Satz*): *Ist* $j(\omega)$ *eine eindeutige Function von* ω, *welche gegenüber der einzelnen Substitution der* Γ_μ, *allgemein zu reden, eine additive Constante annimmt, welche überdies im Polygon der* Γ_μ *keinen wesentlich singulären Punkt besitzt und dortselbst überall endlich ist, so ist* $j(\omega)$ *in der Form darstellbar:*

$$j(\omega) = c_0 + c_1 j_1(\omega) + c_2 j_2(\omega) + \cdots + c_p j_p(\omega). \tag{6}$$

§ 5. Die vollen Modulsysteme der Untergruppen Γ_μ und die zugehörigen algebraischen Resolventen der Modulgleichung.

Für eine beliebig vorgelegte Untergruppe Γ_μ von endlichem Index haben wir soeben die Existenz und Eigenart zugehöriger (algebraischer) Modulfunctionen erkannt und werden nun weiter zu überlegen haben, wie sich vermöge derselben die Auflösung des functionentheoretischen Grundproblems in seinem Gesamtumfange (cf. p. 142) gestaltet.

Zu einer erschöpfenden Behandlung der zur vorgegebenen Γ_μ gehörigen Functionen $s(\omega)$ wird vornehmlich auch gehören, dass wir analytische Darstellungen derselben explicite kennen lernen. Hierzu sind in den Formeln (2) bis (5) des vorigen Paragraphen die erforderlichen Ansätze enthalten. Die weitere Durchbildung derselben müssen wir aber selbstverständlich bis an eine Stelle verschieben, wo wir specielle Einzelbeispiele von Modulfunctionen wirklich besitzen. Wir kommen demgemäss erst in einem späteren Abschnitte auf die hiermit beregte Frage wieder zurück, wo wir dann insbesondere die in (5) p. 587 angesetzte Entwicklung für unsere bis dahin gewonnenen Modulfunctionen zu realisieren haben werden.

Hier wenden wir uns vielmehr sogleich der anderen Seite unseres Problems zu, dass wir nämlich den algebraischen Zusammenhang der zur Γ_μ gehörenden Modulfunctionen teils unter sich, vor allem aber mit $J(\omega)$ erforschen sollen: Gerade auf diesem Wege werden wir ja zu unserem Ziele, Resolventen der Modulgleichung aufzustellen, vordringen. Bemerke man nun vor allen Dingen den aus den voraufgehenden Entwicklungen ohne weiteres entspringenden Hauptsatz: *Zwischen den zur* Γ_μ *gehörenden (algebraischen) Modulfunctionen bestehen diejenigen algebraischen Relationen, welche zwischen den bezüglichen algebraischen Functionen der zugehörigen* $F_\mu^{(J)}$ *in Geltung sind.* Wir haben also mit Rücksicht auf die hier zur Verwendung kommenden Sätze des vorigen Kapitels den nachfolgenden auf alle Untergruppen Γ_μ von endlichem

*) Den Beweis desselben führt man wieder ohne weiteres durch Rückgang auf die Riemann'sche Fläche $F_\mu^{(J)}$.

Index passenden Ansatz: *Unter den zur Γ_μ gehörenden Modulfunctionen lässt sich eine etwa m-wertige $z(\omega)$ derart auswählen, dass ein einzelnes System zusammengehöriger Werte $z(\omega)$, $J(\omega)$, allgemein zu reden, immer nur in einem Punkte des Polygons $F_\mu^{(\omega)}$ der Γ_μ eintritt. Diese Function $z(\omega)$ ist alsdann mit J durch eine irreducibele algebraische Relation*

$$f(z, J) = 0 \tag{1}$$

verbunden, in welcher z auf den μ^{ten}, J aber auf den m^{ten} Grad ansteigt. Jeder zur Γ_μ gehörende Modul) $z'(\omega)$ ist alsdann rational in z und J darstellbar:*

$$z' = R(z, J), \tag{2}$$

und wir benennen in diesem Sinne z und J als ein volles Modulsystem der Γ_μ. Hierbei haben wir nun in (1) *direct die zur Γ_μ gehörende algebraische Resolvente der Modulgleichung vor uns.*

Anschliessend hieran werden wir jetzt umgekehrt auf Grund des Verzweigungssatzes (cf. p. 577) die Gesamtmannigfaltigkeit der algebraischen Resolventen der Modulgleichung ohne weiteres charakterisieren können. Möge nämlich in $f(z, J) = 0$ irgend eine algebraische Relation zwischen den Variabelen z und J vorliegen, die von sich aus zu einer μ-blättrigen Riemann'schen Fläche $F_\mu^{(J)}$ über der J-Ebene hinleite, welche den Anforderungen des Verzweigungssatzes genüge: *Alsdann kann man z auf μ verschiedene Arten als Function von ω deuten, je nach dem Blatte der μ-blättrigen Fläche, welches man gerade dem Ausgangsdreieck der Modulteilung zuweist; alle diese μ Functionen sind eindeutig von ω abhängig und gehören als algebraische Modulfunctionen zu den durch jene Fläche $F_\mu^{(J)}$ definierten gleichberechtigten Untergruppen Γ_μ.* Auf Grund früherer Sätze folgt noch leicht: *Ist $z(\omega)$ eine unserer in Rede stehenden Functionen, und gehört die besondere Untergruppe Γ_μ zu derselben, so sind die zusammengehörigen μ Functionen durch*

$$z(\omega), \quad z(V_1(\omega)), \quad z(V_2(\omega)), \quad \cdots, \quad z(V_{\mu-1}(\omega)) \tag{3}$$

dargestellt, unter $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu-1}$ ein Repräsentantensystem der Γ_μ verstanden (vergl. auch unten § 8, p. 599 u. f.).

Die nun gegebenen Entwicklungen gelten ohne Ausnahme für jede Untergruppe von endlichem Index. Inzwischen besitzen wir vom vorigen Kapitel her alle Mittel, den besonderen Artunterschieden der Untergruppen Γ_μ noch in ausgedehnterer Weise gerecht zu werden.

---

*) Wir gebrauchen diesen kürzeren Ausdruck „Modul" hinfort häufig für Modulfunction; auch schon p. 26 kam derselbe zur Verwendung.

Möge nämlich erstlich eine Γ_μ des Geschlechtes $p = 0$ vorliegen, so werden wir insbesondere die Hauptfunctionen der $F_\mu^{(J)}$ heranziehen. Einer particulär gewählten entspreche die Modulfunction $\tau(\omega)$, die wir nun fortan als *einen zur Γ_μ gehörenden Hauptmodul* bezeichnen wollen. Mit τ sind dann auch sämtliche Grössen

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc \gtrless 0 \tag{4}$$

Hauptmoduln der Γ_μ, und wir gewinnen solchergestalt deren Gesamtheit; einen beliebigen unter ihnen werden wir dadurch fixieren, dass wir für denselben in drei getrennten Punkten des Polygons $F_\mu^{(\omega)}$ drei verschiedene Werte nach Willkür vorschreiben (vergl. hier überall p. 535). In $\tau(\omega)$ besitzen wir nun direct eine Modulfunction, *die das Polygon $F_\mu^{(\omega)}$ der Γ_μ conform auf die einfach bedeckte τ-Ebene abbildet**); und wir sprechen hier noch besonders den Satz aus: *Zwei Punkte der Halbebene ω, die den nämlichen Wert unseres Hauptmoduls $\tau(\omega)$ tragen, sind bezüglich der Γ_μ äquivalent.*

Möge ferner Γ_μ dem elliptischen oder hyperelliptischen Falle angehören, so werden wir zweckmässig eine zweiwertige Function $z_1(\omega)$ mit einer dreiwertigen $z_2(\omega)$, bez. eine zweiwertige $z_1(\omega)$ mit einer $(2p+2)$-wertigen Function $z_2(\omega)$ zusammenstellen, indem wir uns dabei direct an die früheren Entwicklungen über diese Fälle anlehnen. Solche zwei Moduln sind dann stets zur rationalen Darstellung der übrigen zur Γ_μ gehörenden ausreichend: *sie bilden ein volles Modulsystem.*

Im allgemeinen Falle des Geschlechtes p werden wir dagegen etwa p linear-unabhängige Grössen

$$\varphi_1(\omega) = \frac{dj_1}{dJ}, \quad \varphi_2(\omega) = \frac{dj_2}{dJ}, \quad \cdots, \quad \varphi_p(\omega) = \frac{dj_p}{dJ} \tag{5}$$

zu einem vollen Modulsystem zusammenstellen, die j dabei im Sinne des vorigen Paragraphen gebraucht. Um hier unseren Ansatz noch ein wenig weiter auszuspinnen, legen wir für eine Γ_μ mit $p > 0$ ganz allgemein die ν zugehörigen Moduln

$$z_0(\omega), \quad z_1(\omega), \quad \cdots, \quad z_{\nu-1}(\omega) \tag{6}$$

als volles Modulsystem zu Grunde. Diese Moduln setzen wir dann in bekannter Weise als Coordinaten eines Raumes R_ν an *und finden solchergestalt das Polygon der Γ_μ vermöge* (6) *wechselweise eindeutig auf eine diesem Raume angehörende algebraische Curve C_m bezogen.* Diese letztere C_m könnten wir dann algebraisch darstellen durch die zwischen den

*) Beispiele hierzu folgen weiter unten in grosser Zahl.

Moduln (6) bestehenden algebraischen Relationen, wie denn überhaupt alle bezüglichen Sätze aus der letzten Hälfte des vorigen Kapitels ohne weiteres Anwendung gestatten.

Den hiermit dargelegten besonderen Moduln entsprechen auf der anderen Seite wieder besondere Gestalten für die algebraischen Resolventen der Modulgleichung, die wir nunmehr noch allgemein in die Discussion ziehen wollen.

Sei zuerst die gegebene Untergruppe Γ_μ vom Geschlechte $p = 0$ und $\tau(\omega)$ ein zugehöriger Hauptmodul; alsdann ist J als eine zur Γ_μ gehörende μ-wertige Modulfunction selbst eine rationale Function μ^{ten} Grades von τ: $J = \frac{\Phi(\tau)}{\mathsf{X}(\tau)}$, wobei also Φ und X ganze Functionen μ^{ten} Grades von τ sein sollen. Weiter bezeichnen wir noch $(\Phi - \mathsf{X})$ kurz durch Ψ und haben dann als typische Form für die gesuchte Resolvente:

$$J : J - 1 : 1 = \Phi(\tau) : \Psi(\tau) : \mathsf{X}(\tau), \tag{7}$$

an welcher Gestalt wir weiterhin immer festhalten wollen*).

Entsprechend können wir auch bei einer Γ_μ mit $p > 0$ verfahren. Hier werden wir uns zuvörderst die Darstellung von J in der Gestalt

$$J : J - 1 : 1 = \Phi(z_0, z_1, \cdot\cdot) : \Psi(z_0, z_1, \cdot\cdot) : \mathsf{X}(z_0, z_1, \cdot\cdot) \tag{8}$$

verschaffen, müssen dann aber, um den Gesamtausdruck der bezüglichen Resolvente μ^{ten} Grades zu gewinnen, zu dieser Gleichung (8) noch die zwischen den Moduln z bestehenden algebraischen Relationen hinzusetzen. Hier besteht dann gegenüber den Resolventen (1) und (7) nur insofern ein durchaus unwesentlicher Unterschied, dass als Wurzel der Resolvente nicht eine einzelne Grösse (wie z in (2) und τ in (7)) auftritt, sondern vielmehr das einzelne System zusammengehöriger Werte der ν Grössen $z_0, z_1, \cdots, z_{\nu-1}$.

Ehe wir übrigens daran gehen, alle diese allgemeinen Erörterungen durch besondere Beispiele zu illustrieren, müssen wir noch den hier in Betracht kommenden Gesichtspunkten der Galois'schen Gleichungstheorie ausgedehnter gerecht werden. Es soll sich hierbei in erster Linie darum handeln, die uns von gruppentheoretischer Seite her wohlbekannten Fälle symmetrischer, gleichberechtigter und ausgezeichneter Untergruppen Γ_μ in ihrer functionentheoretischen Eigenart noch weiter zu verfolgen.

*) Die fragliche Gestalt der Resolventen kam schon in Abschnitt I ausgiebig zur Verwendung; man vergl. z. B. p. 104 u. f.

§ 6. Allgemeine Erörterung über die symmetrischen Untergruppen.

Die soeben in Aussicht genommene besondere Discussion eröffnen wir mit der Betrachtung desjenigen Falles, dass eine gerade vorliegende Untergruppe Γ_μ mit einer in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ enthaltenen Spiegelung $\overline{V}$ vertauschbar ist. Wie wir früher sahen (cf. p. 336 u. f.), gestattet alsdann die geschlossene Riemann'sche Fläche F_μ eine der Spiegelung $\overline{V}$ entsprechende symmetrische Umformung in sich, bei welcher eine oder mehrere auf der Fläche verlaufende Symmetrielinien Punkt für Punkt sich selbst zugeordnet waren. In Anlehnung an eine auch sonst übliche Bezeichnungsweise (vergl. das Citat p. 337) benannten wir in diesem Falle die geschlossene Fläche F_μ als eine symmetrische. Sehen wir zu, welche besonderen Folgerungen wir für die Moduln unserer Γ_μ unter diesen Umständen zu ziehen vermögen. Dabei wollen wir den einzelnen Punkt der Fläche F_μ kurz durch den Wert ω charakterisieren, der im bezüglichen Punkte des ursprünglichen Polygons $F_\mu^{(\omega)}$ stattfindet. Es hat dies den Vorteil, dass wir dann je zwei bei der symmetrischen Umformung der F_μ in einander übergehende Punkte kurz durch ω und $\overline{V}(\omega)$ bezeichnen können.

Jetzt besitzen wir in $J(\omega)$ eine zur Riemann'schen Fläche F_μ gehörende μ-wertige algebraische Function, welche auf jeder zu $\overline{V}$ gehörenden Symmetrielinie überall *reelle* Werte aufweist; denn in der That entspringt jede solche Symmetrielinie von F_μ aus Kreisen der Modulteilung, auf welchen letzteren $J(\omega)$ durchgehends reelle Werte hat. Hier ist nun ein erster wichtiger Satz, *dass wir überhaupt von jeder algebraischen Function s der F_μ aus ohne Mühe eine gleichfalls zur F_μ gehörende algebraische Function s' bilden können, die ihrerseits wie J in jedem Punkte der in Rede stehenden Symmetrielinien einen reellen Wert besitzt.* Die vorgelegte Function habe nämlich in irgend zwei einander symmetrischen Punkten der F_μ die Werte $s(\omega)$ und $s(\overline{V}(\omega))$. Denken wir uns alsdann den Functionswert $s(\overline{V}(\omega))$ vom Punkte $\overline{V}(\omega)$, wo er stattfindet, nach ω selbst hinübergetragen, d. h. fassen wir $s(\overline{V}(\omega))$ als von ω abhängig auf, so werden diese Werte $s(V(\omega))$ (zufolge der Differentialrelationen (1) p. 505) freilich nicht direct eine zur F_μ gehörende algebraische Function constituieren. Aber wir brauchen ersichtlich nur an Stelle von $s(V(\omega))$ seinen conjugiert complexen Wert $\bar{s}(\overline{V}(\omega))$ zu setzen, um in den nun in den Punkten ω der Fläche aufgepflanzten Werten $\bar{s}(\overline{V}(\omega))$ wieder den Wertcomplex einer zur Fläche gehörenden algebraischen Function zu besitzen. Bilde man nunmehr durch Addition

$$z'(\omega) = z(\omega) + \bar{z}(\overline{V}(\omega)), \tag{1}$$

so genügt die hiermit gewonnene algebraische Function z' der F_μ der Gleichung

$$z'(\overline{V}(\omega)) = \bar{z}'(\omega). \tag{2}$$

Die Function z' nimmt sonach in je zwei symmetrischen Punkten der Fläche F_μ conjugiert complexe Werte an und ist demgemäss in jedem auf einer Symmetrielinie selbst gelegenen Punkte reell.

Unsere gerade durchgeführte Betrachtung kann dadurch illusorisch werden, dass z' nicht eigentlich eine Function der F_μ ist, sondern vielmehr mit einer Constanten identisch wird. Sollte dies eintreten, so wird jedenfalls der Wert dieser Constanten, die wir $2c$ nennen wollen, ein reeller sein, da Formel (2) sowie der daran geknüpfte Satz in Gültigkeit bleibt. In diesem Falle wird sich Gleichung (1) in die nachfolgende umsetzen lassen:

$$iz(\omega) - ic = -i\bar{z}(\overline{V}(\omega)) + ic.$$

Es entspringt also jetzt in

$$z'(\omega) = iz(\omega) - ic$$

eine sicher nicht mit einer Constanten identische algebraische Function der F_μ, die (2) befriedigt und auf den Symmetrielinien von $\overline{V}$ durchweg reelle Zahlwerte annimmt. Hiermit ist die Herstellung einer gewünschten algebraischen Function von z aus in allen Fällen geleistet.

Mit Unterdrückung des oberen Index sei jetzt z irgend eine algebraische Function der F_μ von der Art, dass sie in den symmetrischen Punkten conjugiert complexe Werte annimmt und deshalb auf den Symmetrielinien durchweg reell ist. Die Unstetigkeitspunkte von z werden offenbar auf der Fläche F_μ in symmetrischer Weise gelagert sein, sie genügen aber überdies in Ansehung ihrer Anzahl und Lage nur noch den überhaupt durch die Eigenart der Riemann'schen Fläche F_μ für sie vorgeschriebenen Bedingungen. Da folgert man denn ohne Mühe, dass sich die gedachte Function z stets noch so auswählen lässt, dass dieselbe im Verein mit J zur rationalen Darstellung aller übrigen algebraischen Functionen der F_μ ausreicht, dass also die entsprechenden Moduln $z(\omega)$, $J(\omega)$ ein volles Modulsystem der Γ_μ abgeben. Hier wird nun offenbar die zwischen z und J bestehende irreducibele Relation

$$f(z, J) = 0 \tag{3}$$

den unendlich vielen Punkten der oft genannten Symmetrielinien entsprechend durch unendlich viele Systeme reeller Werte z, J befriedigt werden. Es entspringt daraus als zweites Resultat: *Die zwischen z und J bestehende algebraische Gleichung* (3) *wird im gegenwärtigen Falle lauter*

reelle Coefficienten besitzen; zugleich werden sich alle übrigen Moduln der Γ_μ, die der Bedingung (2) *genügen, in s und J rational mit durchgehends reellen Coefficienten darstellen lassen.*

Die hiermit durchgeführte Massnahme beansprucht übrigens eine ganz allgemein gültige Bedeutung für die symmetrischen Riemann'schen Flächen überhaupt, wie wir nebenher noch anführen wollen*). Wir konnten uns soeben im Hinblick auf die künftige Verwendung mit der ausführlichen Betrachtung derjenigen symmetrischen Umformungen von F_μ begnügen, welche den in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ enthaltenen Spiegelungen parallel gehen. Liege aber irgend eine ganz beliebige symmetrische Umformung der F_μ in sich vor**), so lässt sich auch unter ihrer Zugrundelegung jegliche algebraische Function vermöge der oben durchgeführten Überlegung in eine solche Function umwandeln, die bei Ausübung der fraglichen Umformung in ihren conjugiert complexen Wert übergeht. Demgemäss wird man denn auch ganz allgemein für jede symmetrische Fläche zugehörige reelle Gleichungen erzielen können.

§ 7. Hauptmoduln und Modulsysteme symmetrischer Untergruppen.

Wir verfolgen unsere gerade begonnene Betrachtung über die Symmetrie für diejenigen besonderen Moduln, die wir in der zweiten Hälfte des § 5 (p. 591) kennen lernten. Sei also erstlich die Untergruppe Γ_μ des Geschlechtes $p = 0$ mit der Spiegelung $\overline{V}$ vertauschbar. Zur Auswahl eines zugehörigen Hauptmoduls $\tau(\omega)$ ziehe man auf der bezüglichen geschlossenen Fläche F_μ eine der zu $\overline{V}$ gehörenden Symmetrielinien heran, fixiere auf derselben irgend drei getrennt liegende Punkte und setze fest, dass in letzteren $\tau(\omega)$ bez. die Werte 0, 1, ∞ annehmen soll; hierdurch ist, wie wir wissen, der Hauptmodul τ gerade eindeutig bestimmt. Nunmehr bilde man ähnlich wie im vorigen Paragraphen von $\tau(\omega)$ aus die Function

$$\tau'(\omega) = \overline{\tau}(\overline{V}(\omega)). \tag{1}$$

Ohne weiteres erkennt man in derselben wieder einen Hauptmodul der Γ_μ. Aber selbiger nimmt in jenen drei auf der Symmetrielinie

*) Vergl. die bezüglichen p. 337 gegebenen Citate.

**) Hierbei ist es ganz gleichgültig, wie gross die Anzahl der zugehörigen Übergangscurven ist. Diese Anzahl kann übrigens, wie wir hier gleichfalls nebenher bemerken, bei einer Fläche des Geschlechtes p niemals grösser als $(p + 1)$ sein, während sie auf der anderen Seite sehr wohl auf Null herabsinken kann. Eine solche symmetrische Umformung ohne Übergangscurven trat z. B. für die zu den Hauptcongruenzgruppen der Primzahlstufen $q = 4h + 1$ gehörenden geschlossenen Flächen ein (cf. p. 447).

gewählten Punkten offenbar gleichfalls die Werte 0, 1, ∞ an und ist sonach direct mit $\tau(\omega)$ identisch. Wir finden also das Resultat: *Der durch obige Vorschrift fixierte Hauptmodul $\tau(\omega)$ genügt der Gleichung*

$$\tau(\overline{V}(\omega)) = \overline{\tau}(\omega) \tag{2}$$

und ist sonach auf den zu $\overline{V}$ gehörenden Symmetrielinien durchgehends reell.

Nun aber erinnere man sich, dass sich gegenwärtigen Falles als geschlossene Fläche F_μ direct die complexe Ebene τ verwenden lässt. Da ist denn auf Grund von (2) ersichtlich, dass die der Spiegelung $\overline{V}$ entsprechende symmetrische Umformung von F_μ in sich einfach durch eine Umklappung der τ-Ebene um ihre reelle Axe bewerkstelligt werden kann, womit zugleich evident geworden ist, *dass beim Geschlechte $p = 0$ der einzelnen Spiegelung $\overline{V}$ entsprechend immer nur eine einzige Symmetrielinie auftritt.* Folgern wir daraus allgemein unter Benutzung wohlbekannter Sätze über die Kreisverwandtschaft: *Bei beliebiger Auswahl des Hauptmoduls τ erscheint die der Spiegelung $\overline{V}$ entsprechende Symmetrielinie in der τ-Ebene als Kreis, und es stellt sich dabei $\overline{V}$ direct als Spiegelung der τ-Ebene an diesem Kreise dar**).

Giebt es mehrere bezüglich der Γ_μ nicht äquivalente Spiegelungen, welche mit der Γ_μ vertauschbar sind, so werden in der Abbildung des Fundamentalpolygons der Γ_μ durch einen zugehörigen Hauptmodul $\tau(\omega)$ ebensoviele Symmetriekreise auftreten. Wir verweisen hier namentlich auf die im folgenden Kapitel ausführlich zu betrachtenden Hauptmoduln der *ausgezeichneten* Untergruppen mit $p = 0$. Diese Gruppen sind mit allen Spiegelungen $\overline{V}$ vertauschbar: *Es werden demnach die Dreiecksteilungen der bezüglichen τ-Ebenen ausschliesslich durch Kreise bewerkstelligt,* was ja in der That auf wohlbekannte Sätze zurückführt.

Sei uns ferner eine symmetrische Untergruppe Γ_μ des Geschlechtes $p = 1$ vorgelegt, so wollten wir doch allgemein für eine Untergruppe dieses Geschlechtes eine zweiwertige Function mit einer dreiwertigen zusammenstellen. Um hier direct an den bezüglichen Grössen $\wp$, $\wp'$ festzuhalten, so werden die beiden Unstetigkeitspunkte unserer einen Function samt den drei Unstetigkeitspunkten der anderen auf der Fläche F_μ in *einen* Punkt coincidieren (cf. p. 147 u. f.). Aber dieser Punkt ist auf F_μ von vornherein willkürlich wählbar, und wir legen

---

*) Dass es bei $p = 0$ auch symmetrische Umformungen ohne Übergangscurven giebt, ist uns bereits von p. 198 her bekannt; wir benannten dieselben dort (unter Zugrundelegung der τ-Ebene) als Spiegelungen mit imaginärem Symmetriekreis. Eine derartige Umformung fand sich als ausgezeichnete $\overline{V}_2$ in der erweiterten Ikosaedergruppe (cf. p. 447); im übrigen kommen diese Umformungen im Texte weiter nicht in Betracht.

ihn deshalb auf eine zur hier in Betracht kommenden Spiegelung $\overline{V}$ gehörende Symmetrielinie. Wenn wir nunmehr von unseren beiden Functionen φ, φ' aus nach der Vorschrift des vorigen Paragraphen neue Functionen z, z' bilden, die auf den Symmetrielinien von $\overline{V}$ reell sind, so ist es leicht ersichtlich der Erfolg unserer gerade getroffenen Massnahme, dass die solchergestalt entspringenden Functionen gleichfalls wieder zwei- bez. dreiwertig sind. *Im gegenwärtigen Falle lässt sich sonach zum vollen Modulsystem stets eine zweiwertige Function $z(\omega)$ mit einer dreiwertigen $z'(\omega)$ zusammenstellen, die in symmetrischen Punkten conjugiert imaginär und also auf den Symmetrielinien von $\overline{V}$ reell ausfallen. Die zwischen z, z' bestehende Relation wird dieserhalb durchweg reelle Coefficienten haben.*

Gehen wir weiter zur Besprechung des Falles, dass die mit $\overline{V}$ vertauschbare Γ_μ zum hyperelliptischen Falle führe. Da sei $z(\omega)$ ein zugehöriger Modul, der aus einer zweiwertigen Function der bezüglichen F_μ entspringe. Es wird alsdann auch $\bar{z}(\overline{V}(\omega))$ eine zweiwertige Function der F_μ sein, und dieselbe ist als solche nach p. 571 linear in $z(\omega)$ darstellbar. Wir folgern somit ohne weiteres die Richtigkeit der Gleichung:

$$z(\overline{V}(\omega)) = \frac{a\bar{z}(\omega) + b}{c\bar{z}(\omega) + d}$$

und entnehmen daraus, dass der Operation $\overline{V}$ notwendig eine Spiegelung der Ebene von z an einem *reellen* Symmetriekreise entspricht. Denken wir uns jetzt z geradezu so gewählt, dass dieser letztere Kreis die reelle z-Axe wird, und ordnen F_μ als zweiblättrige Fläche über der so fixierten z-Ebene an. Da diese letztere Fläche bei der fraglichen Spiegelung in sich übergeht, so werden ihre $(2p + 2)$ Verzweigungspunkte durchgehends zur reellen Axe symmetrisch liegen. Es muss demnach bei der zu z noch hinzuzusetzenden Function $\sqrt{f(z)}$ unter dem Wurzelzeichen eine ganze Function von z mit durchgehends reellen Coefficienten stehen. *Somit wird auch hier zwischen den beiden auszuwählenden Moduln eine Gleichung mit durchaus reellen Coefficienten bestehen.*

Beim allgemeinen Falle des Geschlechtes p berücksichtigen wir endlich die den Functionen φ entsprechenden Moduln (5) p. 591. Indem wir ein volles Modulsystem z, J der Γ_μ nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen skizzierten Weise auswählen, können wir unsere p Moduln φ in der Form:

$$\varphi_k = \frac{dj_k}{dJ} = R_k(z, J), \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, p)$$

darstellen. Hier zerlegen wir nun die p Functionen R_k unter Trennung der reellen und imaginären Bestandteile der constanten Coefficienten in

$$R_k(z, J) = R'_k(z, J) + iR''_k(z, J),$$

wobei die $2p$ rationalen Functionen R', R'' durchgängig reelle Coefficienten haben und also mit z und J auf den zu $\overline{V}$ gehörenden Symmetrielinien selbst reell ausfallen. Mit

$$\int R_k(z, J)dJ = \int R'_k(z, J)dJ + i\int R''_k(z, J)dJ$$

stellen jetzt offenbar auch einzeln

$$\int R'_k(z, J)dJ, \quad \int R''_k(z, J)dJ$$

zur F_μ gehörende Integrale erster Gattung dar, d. h. es sind alle $2p$ Grössen R'_k, R''_k Functionen φ der Fläche, welche nun ersichtlich ausnahmslos der Gleichung $\varphi(\overline{V}(\omega)) = \overline{\varphi}(\omega)$ genügen. Auf der anderen Seite aber lässt sich, wie man sieht, jede Function φ der F_μ aus den in Rede stehenden $2p$ Functionen linear homogen aufbauen, und eben deshalb können wir unter jenen $2p$ Functionen φ ein System von p linear unabhängigen auswählen. Wir fassen also zusammen: *Für die vorgelegte, mit der Spiegelung $\overline{V}$ vertauschbare Untergruppe Γ_μ können wir stets ein System von p linear-unabhängigen Moduln $\varphi_k(\omega)$ derart auswählen, dass den p Bedingungen*

$$\varphi_k(\overline{V}(\omega)) = \overline{\varphi}_k(\omega)$$

Genüge geschieht; die einzelne dieser p Functionen wird also in symmetrischen Punkten conjugiert complexe Werte annehmen und auf den bezüglichen Symmetrielinien durchgehends reell sein, während selbstverständlich die zwischen den so gewählten φ_k bestehenden algebraischen Relationen reelle Coefficienten haben.

Setzen wir diese φ_k zu homogenen Coordinaten eines Raumes R_{p-1}, so wird dem einzelnen Punkte einer der in Rede stehenden Symmetrielinien jederzeit ein *reeller* Punkt in diesem Raume R_{p-1} zugeordnet sein. Einer ganzen Symmetrielinie entspricht dabei ein reeller Zug der Normalcurve C_{2p-2} der φ, und wir gewinnen das Resultat: *Unter Zugrundelegung des gerade charakterisierten Systems gewinnt die bezügliche Normalcurve C_{2p-2} gerade soviele reelle Züge, als die Spiegelung $\overline{V}$ Symmetrielinien auf der Fläche F_μ besitzt.*

Dass hier übrigens allenthalben die Resolventen der Modulgleichung, welche nach § 5 den nun gewonnenen besonderen Modulsystemen angehören, durchaus reelle Coefficienten besitzen, brauchen wir kaum erst noch ausdrücklich zu betonen.

§ 8. Allgemeines über die Moduln gleichberechtigter und ausgezeichneter Untergruppen.

Verfolgen wir jetzt weiter, welche charakteristischen Unterschiede für die Moduln einer Untergruppe sich vorfinden, je nachdem diese Untergruppe in der Gesamtgruppe Γ mit anderen gleichberechtigt oder ausgezeichnet ist. Sei uns also irgend eine algebraische Modulfunction $s(\omega)$ vorgelegt, so mögen die gesamten Substitutionen, bei denen $s(\omega)$ unverändert bleibt, die Untergruppe Γ_μ des endlichen Index μ bilden. Es ist alsdann s mit J durch eine irreducibele Relation $f(s, J) = 0$ verbunden, und wir haben offenbar in $s(\omega)$, $J(\omega)$ ein volles Modulsystem der Γ_μ. Seien übrigens die Operationen dieser Γ_μ durch $1, v_1, v_2, \cdots$, ein Repräsentantensystem für Γ_μ aber durch $1, V_1, V_2, \cdots, V_{\mu-1}$ bezeichnet.

Jetzt bemerke man, dass die Gleichung

$$f\{s(\omega),\ J(\omega)\} = 0 \tag{1}$$

für jeden Punkt ω der positiven Halbebene erfüllt ist und eben deshalb in Gültigkeit bleibt, wenn man ω durch $V(\omega)$ ersetzt, unter V eine beliebige Modulsubstitution erster Art verstanden. Da aber J bei dieser Transformation von ω seinen Wert behält, so erblickt man, dass mit $s(\omega)$ auch jede Grösse $s(V(\omega))$ der Gleichung (1) genügt. Unter der Gesamtheit dieser Grössen $s(V(\omega))$ finden sich aber offenbar nur die μ verschiedenen:

$$s(\omega),\ s(V_1(\omega)),\ s(V_2(\omega)),\ \cdots,\ s(V_{\mu-1}(\omega)), \tag{2}$$

die Substitutionen V_k in der gerade erläuterten Bedeutung gebraucht. Indem wir diese Grössen als Functionen von ω durch

$$s(\omega),\ s_1(\omega),\ s_2(\omega),\ \cdots,\ s_{\mu-1}(\omega) \tag{3}$$

bezeichnen, entspringt ersichtlich der Satz: *Die μ Grössen* (3) *sind die Wurzeln der irreducibelen Gleichung* (1).

Um die Untergruppen kennen zu lernen, welche zu den Modulfunctionen (3) gehören, folgere man aus der jedenfalls gültigen Gleichung $s(v_i V_k(\omega)) = s(V_k(\omega))$ die nachfolgende:

$$s_k(V_k^{-1} v_i V_k(\omega)) = s_k(\omega). \tag{4}$$

Wir entnehmen daraus ohne weiteres das Resultat: *$s_k(\omega)$ ist eine algebraische Modulfunction, welche bei den Operationen der mit Γ_μ gleichberechtigten Untergruppe $\Gamma_\mu^{(k)} = V_k^{-1}\Gamma_\mu V_k$ und nur bei diesen unverändert bleibt.* In diesem Sinne wollen wir die μ Grössen (3) als *die mit $s(\omega)$ gleichberechtigten Modulfunctionen* bezeichnen. (Man vergl. übrigens die oben p. 590 über den Verzweigungssatz gemachte Bemerkung.)

Das gegenseitige Verhältnis zwischen den μ gleichberechtigten Moduln (3) gestaltet sich nun ganz verschieden je nach der Stellung der Untergruppe Γ_μ innerhalb der Gesamtgruppe Γ. Indem wir alle Modulsubstitutionen erster Art sammeln, die mit Γ_μ vertauschbar sind, gewinnen wir bekanntlich eine Untergruppe $\Gamma_{\mu:\nu}$ von Γ, wo ν ein Teiler von μ ist, und hier hatten wir seiner Zeit die drei Fälle zu unterscheiden, ob $\nu = 1$ oder $1 < \nu < \mu$ oder endlich $\nu = \mu$ war*). Im ersten Falle war Γ_μ nur mit ihren eigenen Substitutionen vertauschbar, und wir nannten dann die zugehörige Fläche F_μ bez. ihre Einteilung in μ Doppeldreiecke *irregulär*. Im zweiten Falle trat an Stelle dessen die *teilweise Regularität*, im letzten, wo Γ_μ in der Gesamtgruppe Γ ausgezeichnet war, die *Regularität* schlechtweg. Wollen wir uns vor allen Dingen entschliessen, diese Benennungen auch auf die bezüglichen μ-blättrigen Riemann'schen Flächen über der J-Ebene $F_\mu^{(J)}$ zu übertragen. Eine reguläre Fläche $F_\mu^{(J)}$ wird sich also z. B. dadurch charakterisieren, dass sie μ Transformationen in sich zulässt, bei deren einzelner die μ Blätter der Fläche eine gewisse Permutation erfahren. Überhaupt wird man die Eigenart der regulären und teilweise regulären Riemann'schen Flächen $F_\mu^{(J)}$ durch Übertragung der bezüglichen Sätze von p. 334 u. f. leicht erkennen.

Nun zu den functionentheoretischen Folgerungen dieser Sätze! Hierbei giebt uns der Fall gänzlicher Irregularität direct keine besonderen Resultate; unter den beiden anderen Fällen aber nehmen wir denjenigen der Regularität, als den weitaus wichtigsten, vorweg. Jetzt nämlich ist Γ_μ in der Gesamtheit ausgezeichnet, es gehören also alle μ Grössen (3) als Moduln zu der nämlichen Untergruppe Γ_μ, und folgeweise sind sie alle im vollen Modulsystem z, J dieser Untergruppe rational darstellbar. Wir sprechen also das wichtige Resultat aus: *Bei einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ sind die m gleichberechtigten Moduln* (3) *durch einen beliebigen unter ihnen, etwa z, und J rational darstellbar:*

$$z_k = R_k(z, J). \tag{5}$$

Sollen wir für den Augenblick nochmals z als eine zur $F_\mu^{(J)}$ gehörende algebraische Function von J auffassen, so werden $z, z_1, z_2, \ldots$ die μ Zweige derselben sein. Wir können dann durch ein einzelnes Wertsystem z, J den einzelnen Punkt der fraglichen Riemann'schen Fläche charakterisieren. Indem wir aber nach Massgabe von (5) den Punkt z, J der Fläche in den ihm eindeutig zugewiesenen Punkt

*) Man vergl. die hier in Betracht kommenden ausführlichen gruppentheoretischen Erörterungen p. 315 u. f. bez. p. 333 u. f.

z_k, J transformieren, wird die ganze Fläche dabei in sich selbst übergehen. Merken wir uns also: *Die μ Transformationen unserer μ-blättrigen regulären Fläche in sich finden ihren analytischen Ausdruck in den μ Formeln* (5).

Ist Γ_μ sogar innerhalb $\overline{\Gamma}$ ausgezeichnet, so werden wir entsprechend die $F_\mu^{(J)}$ regulär-symmetrisch nennen. Es kommen dann zu den μ rationalen Transformationen (5) noch weitere μ hinzu, welche durch Combination derselben mit der einzelnen Transformation:

$$z' = \bar{z}, \quad J' = \bar{J}$$

entspringen. Dabei ist das Modulsystem z, J der Γ_μ im Sinne des Schlusssatzes von § 6 gewählt gedacht.

Wir können übrigens die gewonnenen Resultate auch noch dahin interpretieren, dass wir im Falle einer ausgezeichneten Γ_μ in $f(z, J) = 0$ eine Gleichung besitzen, deren sämtliche Wurzeln z sich nach (5) in einer unter ihnen und J rational darstellen. *Einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ entspricht also eine Resolvente μ^{ten} Grades der Modulgleichung, die ihre eigene Galois'sche Resolvente ist* (cf. p. 138 u. f., sowie „Ikos." p. 92). Ist umgekehrt die Gleichung (1) ihre eigene Galois'sche Resolvente, so haben wir auch stets in der zugehörigen F_μ eine reguläre Riemann'sche Fläche, sowie in der zugehörigen Γ_μ eine ausgezeichnete Untergruppe von Γ*).

Auf den zweiten Fall $1 < \nu < \mu$, welchen wir früher kurz als den einer relativ ausgezeichneten Γ_μ bezeichneten, gehen wir nur mit wenigen Worten ein. Da werden ν unter den Repräsentanten $1, V_1, \ldots, V_{\mu-1}$ der Γ_μ in der Untergruppe $\Gamma_{\mu:\nu}$ enthalten sein; seien dies etwa die ν besonderen $1, V_{\frac{\mu}{\nu}}, V_{\frac{2\mu}{\nu}}, \ldots, V_{\frac{(\nu-1)\mu}{\nu}}$, während wir $1, V_1, V_2, \ldots, V_{\frac{\mu}{\nu}-1}$ als Repräsentantensystem für die $\Gamma_{\mu:\nu}$ denken. Nun werden offenbar die μ Gruppen $\Gamma_\mu^{(k)} = V_k^{-1}\Gamma_\mu V_k$ immer zu je ν identisch, und insbesondere coincidieren mit Γ_μ alle ν Untergruppen $\Gamma_\mu, \Gamma_\mu^{\left(\frac{\mu}{\nu}\right)}, \Gamma_\mu^{\left(\frac{2\mu}{\nu}\right)}, \ldots$.

*) Ganz allgemein können wir eine n-blättrige Riemann'sche Fläche regulär nennen, wenn sie n Transformationen in sich zulässt, bei der sich die n Blätter als ganze permutieren. Ihr wird dann immer eine Gleichung n^{ten} Grades entsprechen, die ihre eigene Galois'sche Resolvente ist; man vergl. darüber die p. 335 genannten Arbeiten von Dyck. Überhaupt berühren wir hier die wichtige Theorie der algebraischen Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, welche die Theorie der eben gemeinten regulären Flächen einschliesst, und für welche uns unsere späteren Entwicklungen äusserst interessante Einzelbeispiele ergeben. Für die allgemeine Theorie dieser Gebilde vergl. man die grundlegende Arbeit von Hurwitz: *Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen,* Göttinger Nachrichten 1887 (Math. Ann. Bd. 32).

Unter diesen Umständen gehören die mit $z(\omega)$ gleichberechtigten Modulfunctionen zu je ν der nämlichen Untergruppe an, und speciell haben wir als zur Γ_μ gehörig z, $z_{\underline{\mu}}$, $z_{\underline{2\mu}}$, $\cdots$, $z_{\underline{(\nu-1)\mu}}$. *Diese ν Grössen werden also ausnahmslos in der ersten unter ihnen z mit Hülfe von J rational darstellbar sein*, und wir mögen in diesem Sinne etwa

$$z_{\underline{l\mu}} = R_{\underline{l\mu}}(z, J), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, (\nu - 1) \tag{6}$$

erhalten, wobei die erste Gleichung $z_0 = z$ nur der Vollständigkeit halber mit genannt ist. Die Gleichungen (6) werden uns dann die analytische Darstellung für die ν Transformationen der Fläche F_μ in sich liefern, welche dieselbe jetzt noch zulässt.

Für den Fall einer irregulären Fläche müssen wir uns endlich mit der negativen Angabe begnügen, dass da keine einzige der gleichberechtigten Modulfunctionen (3) in z und J rational darstellbar ist.

§ 9. Besondere Ausführungen für die Hauptmoduln und Modulsysteme der ausgezeichneten Untergruppen.

Gerade wie vorher bei der Besprechung der Symmetrie specialisieren wir nunmehr auch diejenige der Regularität für die besonderen in § 5 p. 591 aufgestellten Moduln.

Um also mit einer *ausgezeichneten Γ_μ des Geschlechtes $p = 0$* zu beginnen, so sei $\tau(\omega)$ ein Hauptmodul derselben. Die μ mit τ gleichberechtigten Moduln τ, τ_1, τ_2, $\ldots$, $\tau_{\mu-1}$ gehören dann offenbar gleichfalls als Hauptmoduln zur Γ_μ, und daraus folgt, *dass sie durchweg lineare Functionen von τ sind:*

$$\tau_k = \frac{a_k\tau + b_k}{c_k\tau + d_k}, \tag{1}$$

womit wir die specielle Form der allgemeinen Gleichung (5) des vorigen Paragraphen für gegenwärtigen Fall erhalten haben*).

Die Gleichung (1) können wir auch dahin interpretieren, dass $\tau(\omega)$ bei Transformation seines Argumentes durch eine beliebige Modulsubstitution erster Art $V = v_i V_k$ eine bestimmte lineare Substitution

$$\tau(V(\omega)) = \tau(v_i V_k(\omega)) = \frac{a_k\tau(\omega) + b_k}{c_k\tau(\omega) + d_k}$$

erfährt. Aber der Gesamtheit der Modulsubstitutionen erster Art entsprechen dabei im ganzen nur μ verschiedene Substitutionen, die, wie

*) Liegt sogar eine in der erweiterten Modulgruppe $\bar{\Gamma}$ ausgezeichnete Untergruppe Γ_μ vor, so wird man die Überlegung des Textes leicht noch in entsprechender Weise ergänzen.

man sofort sieht, eine Gruppe G_μ der Ordnung μ bilden werden. Diese Gruppe G_μ ist durch ihre hier gegebene Einführung auf die Modulgruppe Γ direct meroedrisch isomorph bezogen; dabei sind ihre Substitutionen den Operationen des zur Γ_μ gehörenden Repräsentantensystems eindeutig zugewiesen, und man erblickt demnach sofort: *Die hier gewonnene endliche Gruppe G_μ der Substitutionen* (1) *ist holoedrisch isomorph und also, abstract genommen, identisch mit der endlichen G_μ, welche wir nach p. 320 u. f. der ausgezeichneten Γ_μ zuzuordnen haben**). Der Hauptmodul τ der Γ_μ versieht uns in dieser Weise mit einer zweckmässigen analytischen Darstellung unserer von früher her bekannten G_μ.

Auf der anderen Seite sind wir hier durchaus in Übereinstimmung mit den Entwicklungen p. 333 u. f. Dort deuteten wir G_μ geometrisch als Gruppe der Transformationen der Fläche F_μ in sich, bei denen die Einteilung der F_μ in μ Doppeldreiecke gleichfalls in sich überging. Aber hier können wir als Fläche F_μ direct die Ebene oder Kugel wählen, die wir als Trägerin der complexen Werte τ denken. *Diese wird dann samt ihrer Einteilung in μ Doppeldreiecke durch die μ Substitutionen* (1) *in sich übergeführt.* Hier ist nun auch der Ort, um eine Ergänzung zu p. 353 hinzuzufügen. Eine Gruppe linearer Substitutionen einer einzigen Variabelen τ (und die G_μ der Substitutionen (1) ist eine solche) hat notwendig den Typus einer in der Theorie der regulären Körper auftretenden Gruppe (nach „Ikos." p. 117 u. f.), und dementsprechend ist die Einteilung der τ-Kugel in ihre μ Doppeldreiecke notwendig identisch mit einer der wohlbekannten regulären Kugelteilungen**). Diese aber haben wir, soweit sie dem Verzweigungssatze genügen, bereits sämtlich zur Definition von Untergruppen der Modulgruppe verwandt (cf. p. 353 u. f.). *Hiernach haben wir damals* (wie wir dort auch schon anführten) *die gesamten ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ des Geschlechtes $p = 0$ kennen gelernt.*

Haben wir jetzt *eine relativ ausgezeichnete Γ_μ des Geschlechtes $p = 0$*, so werden sich die bezüglichen ν Transformationen (6) § 8 nunmehr für einen auszuwählenden Hauptmodul als lineare Substitutionen desselben darstellen. Die damit entspringende Gruppe G_ν muss wiederum eine in der Theorie der regulären Körper auftretende sein, und dementsprechend gewinnen wir für die bezügliche Einteilung der τ-Kugel das Resultat: Unter geeigneter Auswahl von τ wird die fragliche Einteilung eine solche sein, die durch ν Drehungen der τ-Kugel um ihren Mittelpunkt in sich übergeführt wird. Es müssen sich dabei

*) Eine entsprechende Entwicklung hätten wir übrigens schon an Formel (5) des vorigen Paragraphen knüpfen können.

**) Unter geeigneter Auswahl des Hauptmoduls τ.

immer $\frac{\mu}{\nu}$ Doppeldreiecke der Teilung zu einem grösseren Dreieck zusammenlegen, und solcher grösseren Dreiecke überdecken im ganzen ν die τ-Kugel lückenlos und einfach (vergl. unten Fig. 101, 102).

Indem wir weiter nur noch die in der Gesamtheit Γ *ausgezeichneten* Γ_μ berücksichtigen, nehmen wir sogleich den *allgemeinen* Fall des Geschlechtes $p > 2$ vorweg, um bei ihm insbesondere ein linearunabhängiges System der $\varphi_i = \frac{dj_i}{dJ}$ zu Grunde zu legen. Der mit $\varphi_i(\omega)$ gleichberechtigte Modul $\varphi_i(V_k(\omega))$ ist nun gleichfalls ein Modul φ unserer ausgezeichneten Γ_μ, was man etwa durch Rückgang auf die Bestandteile dj_i, dJ von φ_i erhärten wolle. Der fragliche Modul

$$\varphi_i^{(k)}(\omega) = \varphi_i(V_k(\omega))$$

muss sich demgemäss nach bekannten Sätzen im Modulsystem der $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, ..., $\varphi_p(\omega)$ linear und homogen darstellen lassen. Für das gesamte Modulsystem erhalten wir sonach der Operation V_k entsprechend eine lineare homogene Substitution der Gestalt:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(k)} &= \alpha_{11}^{(k)}\varphi_1 + \alpha_{12}^{(k)}\varphi_2 + \cdots + \alpha_{1p}^{(k)}\varphi_p, \\
\varphi_2^{(k)} &= \alpha_{21}^{(k)}\varphi_1 + \alpha_{22}^{(k)}\varphi_2 + \cdots + \alpha_{2p}^{(k)}\varphi_p, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_p^{(k)} &= \alpha_{p1}^{(k)}\varphi_1 + \alpha_{p2}^{(k)}\varphi_2 + \cdots + \alpha_{pp}^{(k)}\varphi_p.
\end{aligned} \tag{2}$$

So entspricht nun jeder einzelnen der μ Operationen V_k eine wohlbestimmte Substitution (2) der Moduln φ, *und es werden die so entspringenden μ Substitutionen in ihrer Gesamtheit wieder eine Gruppe G_μ der endlichen Ordnung μ bilden.* Hier haben wir denn im gegenwärtigen Falle eine elegante analytische Darstellung für die zur ausgezeichneten Γ_μ gehörende endliche Gruppe G_μ vor uns.

Gedenken wir hier wieder der Interpretation der p Moduln φ als homogener Coordinaten eines Raumes R_{p-1}: Was alsdann die Gleichungen (2) darstellen, ist eine *Collineation* dieses Raumes. Haben wir übrigens einmal ein Wertsystem für die ursprünglichen Coordinaten φ_1, φ_2, ..., φ_p, das thatsächlich in einem Punkte der Riemannschen Fläche F_μ stattfindet, so wird offenbar das transformierte Wertsystem der $\varphi_i^{(k)}$ gleichfalls in einem bestimmten anderen Punkte der F_μ eintreten. Wir werden dies geometrisch dahin aussprechen, dass bei der einzelnen Collineation (2) ein Punkt der Curve C_{2p-2} der φ jederzeit wieder in einen auf dieser C_{2p-2} gelegenen Punkt übergeht. Insgesamt folgt: *Den μ Transformationen der zur ausgezeichneten Γ_μ gehörenden Fläche F_μ entsprechend erfährt die Normalcurve C_{2p-2} der Moduln φ im ganzen μ Collineationen in sich.* Diese Collineationen

der C_{2p-2} in sich werden natürlich in ihrer Gesamtheit wieder eine Gruppe bilden und geben uns erneut eine eigenartige Interpretation unserer wiederholt genannten G_μ.

Der Umstand, dass unsere jetzt besprochenen Modulsysteme bez. Hauptmoduln sich gegenüber den Operationen V_k des zur ausgezeichneten Γ_μ gehörigen Repräsentantensystems durchgängig *linear* reproducieren, ist für alle expliciten Rechnungen von besonderem Vorteil, was man später wiederholt bemerken wird. Sehen wir also zu, wie sich in diesem Betracht die in § 5 für den elliptischen und hyperelliptischen Fall allgemein zu Grunde gelegten Moduln verhalten.

Für eine *ausgezeichnete* Γ_μ *des Geschlechtes* $p = 1$ sollte eine zweiwertige und eine dreiwertige Function zum vollen Modulsystem zusammengestellt werden, und wir konnten zu dem Ende geradezu diejenigen Functionen wählen, die den doppeltperiodischen Functionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ des bezüglichen elliptischen Gebildes entsprechen. Im Sinne von p. 559 u. f. kommt dies darauf hinaus, dass wir das Fundamentalpolygon der Γ_μ auf eine ebene Curve dritter Ordnung C_3 abbilden. Seien etwa $z_1(\omega)$, $z_2(\omega)$ unsere beiden Moduln, so möge man jetzt auf ω eine der μ Substitutionen V_k ausüben. Die gleichberechtigten Moduln $z_1^{(k)}(\omega) = z_1(V_k(\omega))$, $z_2^{(k)}(\omega) = z_2(V_k(\omega))$ werden im vollen Modulsystem z_1, z_2 der Γ_μ rational darstellbar sein:

$$z_1^{(k)} = R_k(z_1, z_2), \quad z_2^{(k)} = R_k'(z_1, z_2), \tag{3}$$

und gerade wie vorhin bei der C_{2p-2} der φ *wird nunmehr unsere Curve dritter Ordnung* C_3 *durch die* μ *rationalen Transformationen* (3) *eindeutig in sich übergeführt.* Hier müssen wir nun einen später noch ausführlich zu begründenden Satz vorweg nehmen, dass nämlich die elliptische Normalcurve n^{ter} Ordnung insgesamt $2n^2$ Collineationen in sich zulässt, was denn in unserem Falle der C_3 im ganzen 18 Collineationen ergeben würde. *Sonach können sich unter den Transformationen* (3) *vielleicht* 18 *lineare finden, sicher aber ist der ganze Rest von einem Grade* $\geqq 2$*). Will man also auch hier ausschliesslich mit linearen Transformationen zu thun haben, so wird man bei $\mu > 18$ an Stelle der C_3 eine elliptische Normalcurve höherer Ordnung zu Grunde legen müssen, was wir hier nicht weiter verfolgen wollen.

Gehöre endlich *die in der Gesamtgruppe ausgezeichnete* Γ_μ *zum hyperelliptischen Falle,* so legen wir nach p. 591 die zweiwertige Function z samt der zugehörigen $\sqrt{f(z)}$ zu Grunde, die wir als Moduln

*) Hat das elliptische Gebilde verschwindende Invariante g_2 oder g_3, so tritt eine leicht erkennbare Modification dieses Satzes ein.

der Γ_μ durch $z(\omega)$ und $z_1(\omega) = \sqrt{f(z)}$ bezeichnen wollen. Betrachten wir da zuvörderst $z(\omega)$ für sich, so wird jeder mit $z(\omega)$ gleichberechtigte Modul $z_k(\omega)$ wieder eine zweiwertige Function der F_μ liefern, welch' letztere bekanntermassen von z linear abhängig ist. Den μ Operationen V_k entsprechen so μ lineare Substitutionen von z:

$$z_k = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}, \tag{4}$$

welche insgesamt eine Gruppe bilden. Was die Ordnung dieser letzteren Gruppe angeht, so kann dieselbe nur μ oder $\frac{\mu}{2}$ sein. Unsere hyperelliptische Fläche gestattet nämlich auf alle Fälle die durch $z' = z$, $z_1' = -z_1$ dargestellte Transformation in sich. Findet sich diese unter den μ Transformationen der F_μ in sich, welche der zur Γ_μ zugehörigen G_μ entsprechen, so werden ersichtlich je zwei unter den μ Transformationen (4) identisch ausfallen, so dass diese Substitutionen insgesamt eine $G_{\frac{\mu}{2}}$ bilden. Es ist nun leicht zu sehen, dass der hiermit skizzierte Fall der allein mögliche ist. Man erinnere sich nämlich, dass nach p. 342 die Classe unserer ausgezeichneten Γ_μ des Geschlechtes $p > 1$ notwendig > 6 ist, und dass diesem Umstande zufolge in der zur Γ_μ gehörenden G_μ die parabolischen Modulsubstitutionen (z. B. S) cyclische Untergruppen einer Ordnung > 6 liefern. Auf der anderen Seite muss die Gruppe der Substitutionen (4) eine solche sein, wie sie in der Theorie der regulären Körper auftritt, und von diesen hat keine hier in Betracht kommende eine cyclische Untergruppe einer Ordnung > 6*). Wir haben sonach das Resultat: *Die zweiwertige Function $z(\omega)$ erfährt gegenüber den μ Substitutionen des Repräsentantensystems $\frac{\mu}{2}$ lineare Substitutionen* (4), *die eine $G_{\frac{\mu}{2}}$ bilden; aus ihr entspringt die G_μ der ausgezeichneten Γ_μ durch Combination der $\frac{\mu}{2}$ Substitutionen* (4) *mit der einzelnen*:

$$z_1' = -z_1. \tag{5}$$

Diese Überlegung ergiebt uns sogleich ein endgültiges Resultat über das Auftreten von ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ, die zum

*) Man könnte vielleicht glauben, dass die Gruppe der Substitutionen (4) eine Diedergruppe sei mit $n = \mu : 2$, oder gar eine cyclische mit $n = \mu$. In beiden Fällen müssten ersichtlich alle elliptischen Modulsubstitutionen der Periode 3 in der Γ_μ enthalten sein, was nach p. 341 ausser von der Gesamtgruppe Γ nur noch von der damals genannten Γ_2 der Stufe zwei gilt. Die hiermit bezeichnete Möglichkeit bleibt also im Texte ausgeschlossen.

hyperelliptischen Falle gehören. Die Gesamtheit der Substitutionen, welche die zweiwertige Function $s(\omega)$ in sich überführen, bilden nämlich, wie wir gerade sahen, eine $\Gamma_{\frac{\mu}{2}}$, und zu dieser gehört $s(\omega)$ als einwertige Function, d. h. als Hauptmodul. Eben der durchgängigen linearen Reproduction des $s(\omega)$ wegen ist aber diese $\Gamma_{\frac{\mu}{2}}$ eine *ausgezeichnete* Untergruppe des Geschlechtes $p = 0$. Da überdies die Classe der so gewonnenen ausgezeichneten $\Gamma_{\frac{\mu}{2}}$ notwendig > 3 ist, so haben wir für dieselbe ersichtlich nur die beiden Möglichkeiten der Hauptcongruenzgruppe 4ter Stufe Γ_{24} bez. derjenigen der 5ten Stufe Γ_{60}. *Dementsprechend giebt es höchstens zwei zum hyperelliptischen Falle führende ausgezeichnete Untergruppen, nämlich eine* Γ_{48} *der Classe* 8 *und eine* Γ_{120} *der Classe* 10; *thatsächlich werden wir solche zwei Untergruppen später wirklich kennen lernen**).

§ 10. Die Galois'schen Probleme und ihre Resolventen. Plan der ferneren Entwicklungen.

Um eine geordnete Auffassung der gesamten letztvoraufgehenden Entwicklungen zu gewinnen, müssen wir noch etwas ausgiebiger die Gesichtspunkte der Galois'schen Gleichungstheorie heranziehen. Wir knüpfen an die zu einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_μ gehörende Resolvente

$$f(s, J) = 0 \tag{1}$$

der Modulgleichung. In ihr haben wir eine irreducibele Gleichung μ^{ten} Grades für s vor uns, deren sämtliche Wurzeln s_k, wie wir in § 8 sahen, rational in einer unter ihnen s und J darstellbar sind:

$$s_k = R_k(s, J). \tag{2}$$

Wir nannten in diesem Sinne schon vorhin die Gleichung (1) ihre eigene Galois'sche Resolvente; daneben fassen wir jetzt die μ Transformationen (2) in ihrer Eigenschaft als eine Gruppe G_μ bildend auf, welches unsere wohlbekannte zur Γ_μ gehörende G_μ ist, und haben nun in dieser G_μ laut „Ikos." p. 90 u. f., abstract genommen, die Galois'sche**) Gruppe der Gleichung (1) vor uns.

Nur die Einkleidung, nicht aber das Wesen dieser Verhältnisse wird ein anderes, wenn wir an Stelle von s, J eine grössere Reihe

---

*) Die hier über die hyperelliptischen Fälle mitgeteilten Sätze wurden zuerst vom Herausgeber entwickelt.

**) Hiermit ist stets die Monodromiegruppe gemeint.

von Moduln, etwa die φ, zum vollen Modulsystem unserer ausgezeichneten Γ_μ im allgemeinen Falle eines grösseren p zu Grunde legen. Da tritt an Stelle der Gleichung (1) nach (8) p. 592 die nachfolgende:

$$(3)\quad J : J - 1 : 1 = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots) : \Psi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots) : \mathrm{X}(\varphi_1, \varphi_2, \cdots),$$

zu welcher dann noch die zwischen den φ bestehenden algebraischen Relationen hinzukommen. An Stelle der einzelnen Wurzel z, welche Gleichung (1) bei gegebenem J besitzt, tritt nun das einzelne System zusammengehöriger Werte φ, welche den letztgenannten Gleichungen bei gegebenem J genügen. Da aber J auf der zur Γ_μ gehörenden F_μ eine μ-wertige Function ist, so lassen sich die in Rede stehenden Gleichungen im ganzen durch μ Wertsysteme der φ auflösen. Hierbei tritt der Galois'sche Charakter dieses Problems unmittelbar dadurch in Evidenz, dass mit einem einzelnen dieser Wertsysteme alle $(\mu - 1)$ übrigen rational bekannt sind, indem sie sich ja speciell für das System der φ sogar linear in jenem Wertsysteme darstellen. Wollen wir dies also dahin zusammenfassen, *dass im Sinne unserer Fundamentalaufgabe* (p. 139) *den ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ solche Resolventen der Modulgleichung entsprechen, die wir der hier gewählten Einkleidung gemäss als Galois'sche Probleme μ^{ten} Grades bezeichnen.* In Anlehnung an den hiermit dargelegten Charakter der ausgezeichneten Untergruppen wollen wir den in (1) zu Grunde gelegten Modul z der ausgezeichneten Γ_μ einen *Galois'schen Modul* nennen und bezeichnen entsprechend den Hauptmodul bez. das volle Modulsystem einer ausgezeichneten Γ_μ als *Galois'schen Hauptmodul und Galois'sches System.*

Sollen wir jetzt das einzelne unserer Galois'schen Probleme μ^{ten} Grades einer erschöpfenden Behandlung unterziehen, so werden wir diese dadurch einleiten müssen, dass wir die bezügliche Galois'sche Gruppe G_μ in ihre gesamten Untergruppen zerlegen; denn damit gewinnen wir die Mittel, die niederen Resolventen unseres Problems zu überblicken. *In ihnen haben wir dann solche Resolventen endlichen Grades der Modulgleichung vor uns, wie sie nicht-ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ entsprechen.* Indem sich aber auf diese Weise die nicht-ausgezeichneten Untergruppen in unsere jetzt vertretene Auffassung einordnen, bleiben wir damit gerade in Übereinstimmung mit der planmässigen Erledigung des gruppentheoretischen Problems, die wir p. 327 befürwortet haben; danach sollte es sich ja in erster Linie um die Auffindung der ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ handeln, während wir die übrigen erst von ihnen aus, nämlich durch Zerlegung der zugehörigen G_μ, gewinnen wollten. Es schliesst das ja gar nicht aus, dass wir bei unseren weiter folgenden Einzeluntersuchungen gelegentlich den Ent-

wicklungsgang auch einmal gerade entgegengesetzt wählen, indem wir nämlich mit den niederen Resolventen beginnen, um von ihnen aus erst zum Galois'schen Problem aufzusteigen.

So haben wir nun den unendlich vielen ausgezeichneten Untergruppen der Modulgruppe eine unbegrenzte Menge individueller Galois'scher Probleme zugewiesen, die auf der einen Seite samt und sonders von der Modulgleichung beherrscht werden, insofern nämlich die Lösungen dieser Probleme eindeutige Functionen von ω sind, die aber umgekehrt ihrerseits im Auflösungsprocess der Modulgleichung jedes eine besondere Phase zu charakterisieren vermag. Als erste Glieder in der Kette dieser Probleme, die Fälle $p = 0$ erschöpfend, ordnen sich den Hauptcongruenzgruppen der niedersten Stufen entsprechend die Probleme der regulären Körper ein. Aber wir finden als naturgemässe Fortsetzung derselben (um hier für den Augenblick an den Hauptcongruenzgruppen festzuhalten) eine ganze unendliche Kette nicht minder interessanter, wenngleich mehr und mehr complicierter Probleme analogen Charakters, die den steigenden Werten der Stufenzahl n entsprechen.

Wenn es sich nun in der Folge darum handeln soll, alle diese allgemeinen Erörterungen durch zweckmässige Einzelbeispiele zu erläutern, so bietet sich da in der That ein überreicher Stoff der Untersuchung dar, an dem wir uns mit den hier vorbereiteten Mitteln der Riemann'schen Theorie versuchen könnten. Indessen muss es genügen, dass wir die vier immer wiederkehrenden Fälle: $p = 0$, $p = 1$, hyperelliptisch, allgemein, jeweils durch ein oder ein paar explicit durchzuführende Beispiele illustrieren. Dabei aber wählen wir uns solche ausgezeichnete Untergruppen, die wir von früher her völlig beherrschen. Nehmen wir also für $p = 0$ die Hauptcongruenzgruppen der Stufen $n = 2, 3, 4, 5$, womit wir dann schon die Gesamtheit der hier in Betracht kommenden Gruppen erledigt haben. Daran schliessen wir sogleich die Besprechung der beiden hyperelliptischen Fälle, bei denen ja, wie wir schon sahen, die zweiwertigen Functionen direct mit den Galois'schen Hauptmoduln für $n = 4$ bez. $n = 5$ identisch sind. Zugleich erledigen wir im engen Anschluss an die Galois'schen Hauptmoduln eine Reihe weiterer aus ihnen entspringender Moduln, die in der geschichtlichen Entwicklung der Theorie der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle gespielt haben und schon deshalb nicht übergangen werden dürfen. Es erübrigt endlich, auch noch für $p = 1$ und für den allgemeinen Fall $p > 2$ je ein Beispiel beizubringen, und wir wählen zu dem Ende neben der Γ_{72} der sechsten Stufe die Γ_{168} der siebenten Stufe, welchen Gruppen wir schon oben (p. 364 u. f.) eine ausführliche Untersuchung widmeten.

Das somit bezeichnete Untersuchungsgebiet zu durchlaufen, ist die Aufgabe, die wir uns für den Rest des gegenwärtigen Abschnitts vorsetzen. Wir werden dabei im Einzelfalle die Moduln endgültig fixieren, die Substitutionssysteme der Moduln, die Resolventen selbst explicite ausrechnen etc. Zugleich sollen die den homogenen Modulsubstitutionen entsprechenden *Modulformen* (cf. p. 143), deren wir bislang nicht besonders gedachten, in ausgiebigster Weise zur Verwendung kommen, da sie in der That in manchem Betracht wesentliche Vereinfachungen des Verfahrens bedingen. Alle weiter sich hier anschliessende Probleme und Gesichtspunkte zu verfolgen, bleibt indes den künftigen Abschnitten vorbehalten.

Übrigens dürfen wir nicht unerwähnt lassen, dass unser nun völlig vorbereiteter directer Riemann'scher Ansatz ohne weiteres doch nur eine beschränkte Zahl von Anwendungen gestattet; in der That erweist er sich über die in den nächsten Kapiteln zu gebenden Entwicklungen hinaus nur noch für ganz wenige Untergruppen Γ_μ zugkräftig zur Entwicklung von Einzelresultaten. Immer wird es uns gelingen, durch die in Rede stehende Methode unter einer grossen Zahl weiterer Modulfunctionen namentlich auch alle diejenigen kennen zu lernen (in Kap. III, 5), welche in der überlieferten Theorie eine Rolle spielen. Wir werden dabei sehen, wie in der Theorie dieser Grössen manche Gesichtspunkte, die allein durch die Mittel der Theorie der doppeltperiodischen Functionen nur in unvollkommener Weise erläutert werden konnten, vermöge der uns zur Verfügung stehenden Anschauungsweisen in ein neues Licht gerückt werden und damit ihre sachgemässe Erklärung finden.

Viertes Kapitel.

Die zu den ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechtes $p = 0$ gehörenden Modulfunctionen.

Unserem soeben aufgestellten Plane gemäss widmen wir dieses vierte Kapitel der ausführlichen Besprechung der ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechtes $p = 0$, bei denen wir die vorhin allgemein erörterten Gesichtspunkte mühelos explicit durchführen. Diese Untergruppen sind die Hauptcongruenzgruppen Γ_6, Γ_{12}, Γ_{24} und Γ_{60} der Stufen 2, 3, 4 und 5 und es sind, wie wir schon wiederholt bemerkten, die bezüglichen Galois'schen Probleme 6ten, 12ten, 24ten und 60ten Grades keine anderen als die uns seit lange geläufigen Probleme des Dieders $n = 3$, des Tetraeders, des Oktaeders und des Ikosaeders. Für unsere in Rede stehenden Untergruppen brauchen wir demnach die eigentlichen Riemann'schen Schlüsse noch gar nicht direct in Anwendung zu bringen; unsere Entwicklung werden wir vielmehr unmittelbar an die Theorie der regulären Körper anschliessen, welche in den Vorlesungen über das Ikosaeder zur Darstellung gekommen ist, wie wir denn bereits in den Gleichungen der regulären Körper (cf. Formel (5) p. 15, (1) p. 104 u. s. w.) die unseren Untergruppen Γ_6, Γ_{12}, $\cdots$ zugehörigen Resolventen in fertiger Form besitzen. Um so mehr werden wir uns daher einer Seite unserer Fragestellung zuwenden können, für welche wir im vorigen Kapitel eine allgemeine Formulierung nicht gegeben haben, nämlich der formentheoretischen*). Solches soll in der That in der ersten Hälfte des Kapitels geschehen; die eigentliche Riemann'sche Denkweise setzt dann erst wieder bei Beginn der zweiten Hälfte des Kapitels (§ 7) ein.

*) An sich sind die formentheoretischen Formulierungen ebensowohl auf allgemeine Principien zu beziehen, wie die functionentheoretischen; vergleiche die Bemerkungen, welche Hr. Klein hierüber neuerdings in Bd. 36 der Math. Ann. macht (*Zur Theorie der Abel'schen Functionen*). Indessen sind die betreffenden Überlegungen noch zu neu und bislang zu wenig entwickelt, als dass wir auf dieselben bei der Darstellung des Textes hätten eingehen können.

In zweierlei Hinsicht können wir in der Reihe der fraglichen Galois'schen Hauptmoduln eine Erweiterung eintreten lassen. Erstlich können wir nämlich die Gesamtgruppe Γ als Congruenzgruppe erster Stufe und damit als erstes Glied in der Kette auffassen, wobei wir als zugehörigen Galois'schen Hauptmodul $J(\omega)$ selbst haben. In der That werden wir in der Folge mehrfach Gelegenheit haben, auch die „erste Stufe" gleichmässig mit den übrigen in Betracht zu ziehen. Der anderen Erweiterung der Reihe der Galois'schen Hauptmoduln können wir nur im Vorbeigehen gedenken. Bereits wiederholt bemerkten wir, dass die naturgemässe Fortsetzung unserer Untergruppen $\Gamma_6, \Gamma_{12}, \cdots$ aus den Gruppen $\Gamma_{\{6\}}, \Gamma_{\{7\}}, \cdots$ besteht, die wir p. 356 u. f. einführten. Aber zur $\Gamma_{\{n\}}$ gehört, wie wir sagen werden, als „Hauptmodul" die Function $s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; J(\omega)\right)$, deren eindeutige Abhängigkeit von ω wir p. 584 erkannten. Es hält denn auch nicht schwer, für diese bei $n>5$ eintretenden transcendenten Moduln ganz allgemein eine grössere Reihe derjenigen Entwicklungen zu wiederholen, die wir für die Galois'schen Hauptmoduln durchführen wollen. Es liegt aber ein näheres Eingehen hierauf ausserhalb unseres Planes.

§ 1. Fixierung der Galois'schen Hauptmoduln und Zusammenstellung bezüglicher Formeln.

Schon p. 143 brachten wir als Bezeichnungsweise für die Galois'schen Hauptmoduln der Γ_6 etc. die nachfolgende in Vorschlag:

$$\lambda(\omega), \quad \xi(\omega), \quad \mu(\omega), \quad \zeta(\omega), \tag{1}$$

an der wir auch weiterhin festhalten. Die Einteilungen der bezüglichen Ebenen, wie sie die Figuren 12 p. 70, 28 p. 104, 14 p. 75 und 30 p. 105 geben, gelten uns jetzt nach p. 354 u. f. als die zu den Flächen F_6, F_{12}, F_{24} und F_{60} zusammengelegten Polygone der Γ_6 etc., und man wolle bemerken, dass die Moduln (1) sich dadurch eindeutig fixieren lassen, dass man ein einzelnes, beliebig gewähltes schraffiertes Dreieck der in Rede stehenden Einteilungen dem Ausgangsdreieck der Modulteilung zuweist. Dadurch werden nämlich in den Ecken dieses letzteren Dreiecks für den betreffenden Hauptmodul drei wohlbestimmte Werte vorgeschrieben, und durch Angabe solcher Werte in drei Punkten des Polygons ist nach p. 591 ganz allgemein der Hauptmodul einer Untergruppe $p = 0$ zu fixieren. In diesem Sinne hat es sich als zweckmässig erwiesen, von Fig. 12 das links unten befindliche Dreieck dem Ausgangsdreieck der Modulteilung zuzuweisen, von Fig. 28 desgleichen das rechts oberhalb befindliche, von Fig. 14 wiederum das

am weitesten rechts oberhalb der reellen Axe liegende Dreieck und endlich von Fig. 30 dasjenige Dreieck, welches sich zunächst am Punkte $\zeta = 0$ unterhalb an die reelle ξ-Axe anhängt. Es ist nicht schwer zu sehen*), dass wir die Moduln (1) gleichfalls gerade in dieser Weise fixieren, wenn wir an Stelle der eben gegebenen geometrischen Bestimmungen die abstracten Forderungen setzen, wie sie das nachfolgende Formelsystem ausdrückt:

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} \lambda(i\infty) = \infty, & \lambda(0) = 0, & \lambda(1) = 1, \\ \xi(i\infty) = \infty, & \xi(0) = 1, & \xi(1) = \varrho^2, \\ \mu(i\infty) = \infty, & \mu(0) = 1, & \mu(2) = -1, \\ \zeta(i\infty) = 0, & \zeta(0) = \varepsilon + \varepsilon^4, & \zeta\left(\frac{2}{5}\right) = \infty, \end{array}$$

ε dabei als complexe fünfte Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ gedacht.

Die so fixierten Galois'schen Hauptmoduln sind mit J durch Gleichungen verbunden, welche man unter (5) p. 15, (1) p. 104, (4) p. 20, sowie endlich p. 105 unten nachsehen wolle. Es sind dies einfach die Gleichungen der regulären Körper, die, wie schon gesagt, gegenwärtig unsere Galois'schen Probleme μ^{ten} Grades zum Ausdruck bringen.

Wir verwenden diese Gleichungen zur Ableitung einiger Näherungsformeln, die wir bei späteren Rechnungen oft brauchen werden. Nach p. 587 lässt sich eine zur n^{ten} Classe gehörende Modulfunction für die Umgebung von $\omega = i\infty$ in eine Reihe nach ansteigenden ganzen Potenzen von $r^{\frac{1}{n}}$ entwickeln. Wir wollen für unsere Hauptmoduln (1) jeweils die ersten Glieder dieser Reihenentwicklungen kennen lernen. Wie wir hierbei verfahren, erläutern wir für $\lambda(\omega)$ ausführlich. Bei $\omega^* = i\infty$ wird λ zufolge (2) unendlich, und also giebt (5) p. 15 näherungsweise $J = \frac{4}{27}\lambda^2$. Nun erinnere man sich auf der anderen Seite an die Formeln (2) p. 127 etc., die für den gedachten Punkt ω als Näherungswerte von g_2, g_3, Δ die folgenden gaben:

$$(3)\qquad g_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4, \quad g_3 = \frac{1}{216}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6, \quad \Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} r,$$

und entwickle aus ihnen die auch schon wiederholt angegebene Näherung:

$$(4)\qquad J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{12^3 r}.$$

Es folgt daraus für λ^2 ohne weiteres $\lambda^2 = \frac{1}{2^8 r}$, woraus wir nun noch λ

*) Man ziehe nötigenfalls auch noch die Figuren 80 u. f., p. 354, zum Gebrauch heran.

zu berechnen haben. Aber auf der imaginären ω-Axe wird unserer Festsetzung zufolge λ reell und negativ, während dortselbst $r = e^{2\pi i\omega}$ reell und positiv ausfällt. Wir finden sonach*):

$$\lambda = -\frac{1}{16} r^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

In völlig entsprechender Weise gewinnen wir:

$$\xi = \frac{1}{3} r^{-\frac{1}{3}}, \quad \mu = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{4}}, \quad \zeta = r^{+\frac{1}{5}}. \tag{6}$$

Allgemein benennen wir fortan eine zur Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe gehörende (algebraische) Modulfunction als *Congruenzmodul n^{ter} Stufe*. Wir haben dann vor allen Dingen den Satz auszusprechen: *Die Congruenzmoduln 2ter, 3ter, 4ter und 5ter Stufe sind rationale Functionen bez. von λ, ξ, μ und ζ, und entsprechend sind die Congruenzmoduln erster Stufe rationale Functionen von J.* Im speciellen werden die mit dem einzelnen unserer Hauptmoduln gleichberechtigten Moduln linear in jenen darstellbar sein, und es entspringt hierbei nach p. 603 die Aufgabe, die endlichen Gruppen G_6, G_{12}, G_{24} und G_{60} durch lineare Substitutionen unserer Galois'schen Hauptmoduln analytisch zum Ausdruck zu bringen. Wie wir diese (übrigens von „Ikos." her sehr bekannten) Substitutionen mit unseren hier zur Verfügung stehenden Mitteln in Erfahrung zu bringen haben, zeigen wir wieder am Beispiele $\lambda(\omega)$. Um zuvörderst die der Modulsubstitution S entsprechende Substitution von λ zu berechnen, setzen wir an:

$$\lambda(\omega + 1) = \frac{a\lambda(\omega) + b}{c\lambda(\omega) + d}.$$

Diese Gleichung besteht unabhängig von ω, und man setze demgemäss zuvörderst $\omega = i\infty$, wo wir nach (2) $\lambda(\omega + 1) = \lambda(\omega) = \infty$ als zugehörige Werte haben. Damit diese zugleich unserem eben geschriebenen Ansatze genügen, muss im letzteren $c = 0$ sein, so dass wir einfacher

$$\lambda(\omega + 1) = a\lambda(\omega) + b$$

haben werden. Hier setze man nun weiter $\omega = 0$ und findet unter Rücksicht auf (2) sofort $b = 1$, während endlich der Specialwert $\omega = 1$ unter Berücksichtigung von $\lambda(2) = \lambda(0) = 0$ für a den Wert -1 giebt. In ganz ähnlicher Weise berechnet man der Substitution T

*) Unter $r^{\frac{1}{n}}$ ist in der Folge stets die eindeutig bestimmte Grösse $e^{\frac{2\pi i\omega}{n}}$ verstanden.

entsprechend $\lambda\left(\frac{-1}{\omega}\right)$ als lineare Function von $\lambda(\omega)$ und findet so insgesamt*)

$$\lambda(\omega+1) = 1 - \lambda(\omega), \quad \lambda\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \frac{1}{\lambda(\omega)}. \tag{7}$$

Diese beiden Substitutionen, als S und T entsprechend, sind nun bekanntlich Erzeugende der G_6, deren vollständige Aufstellung hiernach ohne Mühe geleistet werden könnte. Durch völlig analoge Überlegungen erhält man für die übrigen Galois'schen Hauptmoduln die nachfolgenden erzeugenden Substitutionen:

$$\begin{aligned}
\xi(\omega+1) &= \varrho^2\xi(\omega), & \xi\left(\tfrac{-1}{\omega}\right) &= \frac{\xi(\omega)+2}{\xi(\omega)-1},\\
\mu(\omega+1) &= -i\mu(\omega), & \mu\left(\tfrac{-1}{\omega}\right) &= \frac{\mu(\omega)+1}{\mu(\omega)-1},\\
\zeta(\omega+1) &= \varepsilon\zeta(\omega), & \zeta\left(\tfrac{-1}{\omega}\right) &= \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta(\omega)+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta(\omega)+(\varepsilon-\varepsilon^4)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Die sechs aus (7) entspringenden, die G_6 bildenden λ-Substitutionen sind „Ikos." p. 44 genannt, sowie von uns oben p. 15 reproduciert. Die fertig ausgerechneten zwölf Substitutionen des ξ sind

$$\xi' = \varrho^i\xi, \quad \xi' = \varrho^i \cdot \frac{\xi + 2\varrho^k}{\xi - \varrho^k}, \quad (i, k = 0, 1, 2).$$

Wir haben dieselben hier angeben müssen, da sie erst durch die unter (2) p. 104 gegebene Transformation in die „Ikos." p. 43 Formel (30b) mitgeteilte Gestalt der Tetraedersubstitutionen übergehen. Die G_{24} und G_{60}, welche für μ und ζ aus den unter (8) gegebenen Erzeugenden hervorgehen, haben endlich direct diejenige Gestalt, welche für die Oktaeder- und Ikosaedergruppe in den Formeln (31a) und (32) p. 43 von „Ikos." mitgeteilt ist.

§ 2. Einführung der zu den Galois'schen Hauptmoduln gehörenden Modulformen.

Wir deuteten schon am Anfang des gegenwärtigen Kapitels an, dass es hier ganz wesentlich unsere Aufgabe sein soll, auch die Modulformen mit in Betracht zu ziehen. Wie wir die zu den Galois'schen Hauptmoduln gehörenden Modulformen einzuführen haben, ist nach Analogie von p. 117 u. f. sofort evident: wir werden nämlich den Differentiationsprocess, wie er dort auf $J(\omega)$ angewandt wurde, auf $\lambda(\omega)$ etc.

---

*) Selbstverständlich hätten wir diese Substitutionen auch aus der Dreiecksteilung der λ-Ebene auf Grund unserer Bestimmungen über die Zuordnung derselben zur ω-Halbebene ableiten können.

zur Ausübung bringen*). Sei $\tau(\omega)$ irgend einer unserer vier Hauptmoduln, so gilt bei Anwendung irgend einer Modulsubstitution erster Art, wie wir wissen:

$$\tau\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \frac{a\tau(\omega)+b}{c\tau(\omega)+d}. \tag{1}$$

Indem wir unter τ' die Ableitung von τ nach dem jeweils beigesetzten Argumente verstehen, folgt aus (1) durch Differentiation nach ω:

$$\tau'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)\cdot\frac{1}{(\gamma\omega+\delta)^2} = \frac{ad-bc}{(c\tau(\omega)+d)^2}\cdot\tau'(\omega).$$

Hier nehmen wir links und rechts die reciproken Werte, spalten zugleich ω in ω_1 und ω_2 und ziehen endlich beiderseits die Quadratwurzel; es folgt auf dem Wege:

$$\pm\sqrt{ad-bc}\cdot\frac{\gamma\omega_1+\delta\omega_2}{\sqrt{\tau'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)}} = c\cdot\frac{\omega_2\tau(\omega)}{\sqrt{\tau'(\omega)}}+d\cdot\frac{\omega_2}{\sqrt{\tau'(\omega)}}. \tag{2}$$

Um die Bedeutung der hier ausgeführten Wurzelziehung zu erläutern, gehen wir auf die Darstellung von J als rationale Function des Hauptmoduls τ zurück: $J = r(\tau)$. Durch Differentiation nach ω folgt

$$\frac{dJ}{d\omega} = \frac{dr}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{d\omega},$$

woraus wir unter Benutzung von (3) p. 118 berechnen:

$$\frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\tau}{d\omega}}} = \frac{\sqrt{\pi i\Delta}}{3g_2\sqrt{g_3}}\cdot\sqrt{\frac{dr}{d\tau}}. \tag{3}$$

Hier steht rechter Hand *eine algebraische Function der beiden Variabelen* g_2 *und* g_3, wie man aus den einzelnen Bestandteilen unserer Formel schliessen wolle: *Es ist also auch die linke Seite von* (3) *eine algebraische Function von* g_2 *und* g_3. Übrigens ist der Radicand $\frac{d\tau}{d\omega}$ eine eindeutige Function von ω, die jedenfalls nur in solchen Punkten ω verschwinden oder unendlich werden kann, in welchen die Abbildung der τ-Ebene auf die ω-Halbebene aufhört conform zu sein. Aber wir wissen, dass dies nur in den Spitzen geschieht, mit denen das zu $\tau(\omega)$ gehörende Fundamentalpolygon an die reelle ω-Axe heranreicht, und also besitzt die Quadratwurzel $\sqrt{\tau'(\omega)}$ nur an gewissen Stellen der reellen ω-Axe Verzweigungspunkte. Indem aber unsere Variabelen ω_1, ω_2 stets nur solche Veränderungen erleiden dürfen, bei denen ω in die negative Halbebene jedenfalls niemals hineingelangt, ist das Umkreisen eines der

*) Die Durchführung der hier und in den nächsten Paragraphen gegebenen ormentheoretischen Entwicklungen rührt vom Herausgeber her.

Verzweigungspunkte von $\sqrt{\tau'(\omega)}$ von vornherein ausgeschlossen. Wir finden damit: *Die auf der linken Seite von* (3) *stehende algebraische Function von g_2 und g_3 ist innerhalb der ganzen positiven ω-Halbebene eine eindeutige Function der beiden Variabelen ω_1, ω_2.* Diese eindeutige Function $\frac{\omega_2}{\sqrt{\tau'(\omega)}}$ ist in den ω_1, ω_2 homogen von erster Dimension und bleibt, wie wir sogleich noch sehen werden, unverändert bei den homogenen Substitutionen einer gewissen Untergruppe. Sie hat also alle Eigenschaften, die naeh p. 144 eine *elliptische Modulform* besitzen soll, eine Bezeichnung, welche wir demnach hinfort wieder aufnehmen werden.

Jetzt schreiben wir unter Anlehnung an Gleichung (2):

$$(4) \qquad \tau_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{\varkappa \omega_2 \tau(\omega)}{\sqrt{\frac{d\tau}{d\omega}}}, \quad \tau_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{\varkappa \omega_2}{\sqrt{\frac{d\tau}{d\omega}}},$$

wobei wir unter $\varkappa$ eine im Einzelfall zweckmässig zu bestimmende numerische Constante verstehen. *Wir haben dadurch $\tau = \frac{\tau_1}{\tau_2}$ in den Quotienten zweier Modulformen erster Dimension τ_1, τ_2 zerlegt.* Aus den Formeln (2) und (1) aber entnehmen wir nun sofort:

$$(5) \quad \begin{aligned} &\pm\sqrt{ad-bc}\cdot\tau_1(\alpha\omega_1+\beta\omega_2, \gamma\omega_1+\delta\omega_2) = a\cdot\tau_1(\omega_1,\omega_2)+b\cdot\tau_2(\omega_1,\omega_2),\\ &\pm\sqrt{ad-bc}\cdot\tau_2(\alpha\omega_1+\beta\omega_2, \gamma\omega_1+\delta\omega_2) = c\cdot\tau_1(\omega_1,\omega_2)+d\cdot\tau_2(\omega_1,\omega_2). \end{aligned}$$

Bei Ausübung homogener Modulsubstitutionen erfahren sonach die Formen τ_1, τ_2 homogene binäre Substitutionen der Determinante 1, *welche von sich aus direct zu den nicht-homogenen Substitutionen* (1) *zurückführen.* Infolge des doppelten Vorzeichens auf der linken Seite von (5) entspricht dabei jeder Substitution (1) ein Paar nur durch das Vorzeichen der Coefficienten verschiedener Substitutionen (5). Dies entspricht aber genau dem Umstande, dass die nicht-homogene Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ immer auf zwei homogene führt (cf. p. 143); *der einen gehört das obere, der anderen das untere Zeichen in* (5) *an,* denn in der That bedingt ja ein Zeichenwechsel von α, β, γ, δ für unsere Modulformen *erster* Dimension selbst einen Wechsel des Vorzeichens. *Ingesamt entspringt sonach neben der G_μ der Substitutionen* (1) *eine homogene $G_{2\mu}$ von Substitutionen* (5), *und es gehören also die Modulformen τ_1, τ_2 zu einer homogenen Untergruppe $\Gamma_{2\mu}$ des Index 2μ.* Ob die so zu gewinnenden homogenen $\Gamma_{2\mu}$ die p. 394 definierten homogenen Hauptcongruenzgruppen der vorliegenden Stufen sind, oder wie sie sich sonst arithmetisch gestalten mögen, werden wir weiter unten zu untersuchen haben.

§ 3. Endgültige Fixierung der Modulformen λ_1, λ_2 u. s. w.

Indem wir jetzt die allgemeinen Entwicklungen des vorigen Paragraphen im speciellen durchführen wollen, handelt es sich zuvörderst darum, die bei der Definition der Modulformen in (4) § 2 hereingenommene numerische Constante $\varkappa$ in zweckmässiger Weise zu fixieren. Im Hinblick auf sogleich durchzuführende Rechnungen schreiben wir in diesem Sinne:

$$(1)\quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1+i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\omega_2\lambda}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}}, & \lambda_2 &= -\frac{1+i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}},\\ \xi_1 &= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\omega_2\xi}{\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}}, & \xi_2 &= \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}},\\ \mu_1 &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\omega_2\mu}{\sqrt{\frac{d\mu}{d\omega}}}, & \mu_2 &= \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\mu}{d\omega}}},\\ \zeta_1 &= \frac{1+i}{\sqrt{20\pi}}\cdot\frac{\omega_2\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{d\omega}}}, & \zeta_2 &= \frac{1+i}{\sqrt{20\pi}}\cdot\frac{\omega_2}{\sqrt{\frac{d\zeta}{d\omega}}}, \end{aligned}$$

wobei die in die numerischen Bestandteile eingehenden Quadratwurzeln stets positiv genommen sein sollen. Aber auch so bringen die Wurzeln $\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}$, $\sqrt{\frac{d\xi}{d\omega}}$, $\cdots$ jeweils noch eine Zweideutigkeit mit sich, über welche wir in üblicher Weise dadurch zu entscheiden haben, dass wir für einen beliebigen in der positiven Halbebene zu wählenden Punkt ω die betreffenden Werte $\sqrt{\frac{d\lambda}{d\omega}}$, $\cdots$ auch dem Vorzeichen nach endgültig fixieren; nur erst dann haben wir in (1) mit eindeutig bestimmten Modulformen zu thun. Wir verfahren zu diesem Ende so, dass wir aus (5) und (6) p. 614 die Näherungswerte der Moduln (1) bei Annäherung an den Punkt $\omega = i\infty$ des Ausgangsdreiecks berechnen, wobei dann im einzelnen der vier Fälle das fragliche Vorzeichen in der einen oder anderen Weise nach Willkür zu wählen ist. Mögen wir in diesem Sinne die folgenden Näherungsformeln haben:

$$(2)\quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\omega_2}{4\pi}r^{-\frac{1}{4}}, & \lambda_2 &= -\frac{4\omega_2}{\pi}r^{\frac{1}{4}},\\ \xi_1 &= \frac{\omega_2}{2\pi}r^{-\frac{1}{6}}, & \xi_2 &= \frac{3\omega_2}{2\pi}r^{\frac{1}{6}}, \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \mu_1 = \frac{\omega_2}{2\pi} r^{-\frac{1}{8}}, \quad \mu_2 = \frac{\omega_2}{\pi} r^{\frac{1}{8}},$$
$$\zeta_1 = \frac{\omega_2}{2\pi} r^{\frac{1}{10}}, \qquad \zeta_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} r^{-\frac{1}{10}}.$$

Hiermit sind unsere Modulformen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ eindeutig bestimmt.

Die binären Substitutionen unserer Moduln sind im vorigen Paragraphen nur erst insoweit bestimmt, dass noch ein Vorzeichen in den betreffenden Formeln fraglich blieb. Es ist hier der Ort, in diesem Betracht zu entscheiden, und wir wollen zu dem Ende für unsere vier Modulsysteme die den homogenen Substitutionen S und T:

$$(3)\qquad \begin{aligned} S&: \omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2, \\ T&: \omega_1' = -\omega_2, \qquad \omega_2' = \omega_1 \end{aligned}$$

entsprechenden binären Substitutionen endgültig bestimmen, aus denen sich dann die übrigen in bekannter Weise erzeugen lassen. Für die Substitution S folgt bei λ_1, λ_2 zufolge der Formeln (7) p. 615 und (5) p. 617 jedenfalls der Ansatz:

$$\pm i\lambda_1' = -\lambda_1 + \lambda_2, \quad \pm i\lambda_2' = \lambda_2.$$

Aber aus (2) folgt für λ_2 bei $\omega = i\infty$ der Wert $\lambda_2 = -\frac{4\omega_2}{\pi} \cdot e^{\frac{\pi i \omega}{2}}$. Wendet man hierauf die homogene Substitution S an, d. h. lässt man bei unverändertem ω_2 den Betrag von ω um 1 wachsen, so nimmt jener Näherungswert ersichtlich den Factor i an: $\lambda_2' = i\lambda_2$. Es gelten also in dem geschriebenen Ansatz die unteren Zeichen, so dass der Substitution S die nachfolgende Substitution der λ_1, λ_2 zugehört:

$$-i\lambda_1' = -\lambda_1 + \lambda_2, \quad -i\lambda_2' = \lambda_2.$$

Nach den wiederholt genannten Formeln haben wir weiter für T:

$$\pm i\lambda_1' = \lambda_2, \quad \pm i\lambda_2' = \lambda_1,$$

und um hier über das Vorzeichen zu entscheiden, verfahren wir folgendermassen. Wir berechnen durch Combination der letzten Formel mit der bereits für S gefundenen:

$$\lambda_1(\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = \pm \lambda_1(\omega_1, \omega_2) \mp \lambda_2(\omega_1, \omega_2),$$
$$\lambda_2(\omega_1 - \omega_2, \omega_1) = \pm \lambda_1(\omega_1, \omega_2),$$

wobei die oberen Zeichen den oberen im Ansatz für T, die unteren aber den unteren entsprechen. Jetzt aber hat die Modulsubstitution $\omega_1' = \omega_1 - \omega_2$, $\omega_2' = \omega_1$ die Periode sechs; dasselbe muss von der zugehörigen λ-Substitution gelten, da die λ_1, λ_2 von erster Dimension sind, und nun berechnet man leicht, dass dies nur für die oberen Zeichen der letzten Formel eintritt. Genau die nämlichen Überlegungen führen

in den drei übrigen Fällen fast ebenso schnell zum Ziele, *und wir erhalten solchergestalt insgesamt als Erzeugende S, T unserer hier in Rede stehenden homogenen Gruppen* G_{12}, G_{24}, G_{48}, G_{120}:

$$(4)\quad \lambda:\begin{cases} S: & -i\lambda_1' = -\lambda_1 + \lambda_2, & -i\lambda_2' = \lambda_2, \\ T: & i\lambda_1' = \lambda_2, & i\lambda_2' = \lambda_1, \end{cases}$$

$$(5)\quad \xi:\begin{cases} S: & \xi_1' = -\varrho\xi_1, & \xi_2' = -\varrho^2\xi_2, \\ T: & -i\sqrt{3}\xi_1' = \xi_1 + 2\xi_2, & -i\sqrt{3}\xi_2' = \xi_1 - \xi_2, \end{cases}$$

$$(6)\quad \mu:\begin{cases} S: & \frac{1-i}{\sqrt{2}}\mu_1' = -i\mu_1, & \frac{1-i}{\sqrt{2}}\mu_2' = \mu_2, \\ T: & i\sqrt{2}\mu_1' = \mu_1 + \mu_2, & i\sqrt{2}\mu_2' = \mu_1 - \mu_2, \end{cases}$$

$$(7)\quad \xi:\begin{cases} S: & \xi_1' = -\varepsilon^3\xi_1, & \xi_2' = -\varepsilon^2\xi_2, \\ T: & \sqrt{5}\xi_1' = -(\varepsilon - \varepsilon^4)\xi_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\xi_2, & \\ & \sqrt{5}\xi_2' = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\xi_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4)\xi_2. & \end{cases}$$

§ 4. Relationen zwischen den Modulformen λ_1, λ_2 etc. und g_2, g_3. Die Formenprobleme.

Bevor wir die zu den Modulformen λ_1, λ_2 etc. gehörenden homogenen Untergruppen bestimmen, erledigen wir einige weitere sich hier anschliessende Untersuchungen. Vor allem soll es sich um explicite Aufstellung derjenigen Relationen handeln, durch welche die Modulformen erster Stufe g_2, g_3 mit unseren λ_1, λ_2 etc. verknüpft sind; durch diese Relationen können wir dann geradezu λ_1, λ_2 etc. als algebraische Functionen von g_2, g_3 definiert ansehen. Die Rechnungen, welche wir zu solchem Ende anzustellen haben, sind wiederum in allen vier Fällen im Wesen übereinstimmend, so dass es genügen wird, wenn wir sie im ersten Falle der λ_1, λ_2 ausführlich mitteilen.

Indem wir die Gleichung zwischen λ und J unter durchgängigem Gebrauch der Modulformen schreiben, lautet sie:

$$g_2^3 : 27g_3^2 : \Delta = 4(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)^3 : (2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3)^2 : 27(\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2))^2.$$

Unter Einführung eines von ω_1, ω_2 abhängig zu denkenden Proportionalitätsfactors σ spalten wir diese fortlaufende Proportion in die drei Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} 4(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)^3 &= g_2^3 \cdot \sigma(\omega_1, \omega_2), \\ (2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3)^2 &= 27g_3^2 \cdot \sigma(\omega_1, \omega_2), \\ 27(\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2))^2 &= \Delta \cdot \sigma(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Bei den Dimensionen der Modulformen g_2, g_3, Δ in ω_1, ω_2 erkennt man auf Grund von (1) in σ eine Modulform 18ter Dimension, und also wird $\Delta^3\sigma^2$ von der nullten Dimension, d. i. eine Modulfunction sein. Wir gewinnen auf Grund der letzten Gleichung (1) für dieselbe sofort die Darstellung:

$$\Delta^3\sigma^2 = 3^6 \cdot \Delta \cdot (\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2))^4.$$

Hier ist Δ jedenfalls Modulform erster Stufe (cf. (6) p. 118), und man berechnet auf Grund von (4) p. 620 ohne weiteres, dass auch der andere Bestandteil auf der rechten Seite der letzten Gleichung bei den Operationen S und T unverändert bleibt. Dieserhalb ist $\Delta^3\sigma^2$ Modulfunction erster Stufe und als solche rational in J:

$$\Delta^3\sigma^2 = 3^6 \cdot \Delta \cdot (\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2))^4 = R(J).$$

Man wolle nun überlegen, an welchen Stellen diese Modulfunction erster Stufe im Ausgangsdreieck unendlich zu werden vermag. Es ist solches höchstens bei $\omega = i\infty$ möglich; denn in allen übrigen Punkten des Ausgangsdreiecks sind (cf. p. 128, 617) Δ, λ_1, λ_2 einzeln endlich*). Aber bei $\omega = i\infty$ findet sich aus (3) p. 613 und (2) p. 618 als Wert unserer Modulfunction einfach $2^4 \cdot 3^6$. Dieselbe wird hiernach im ganzen Ausgangsdreieck nicht unendlich und ist also nach wohlbekannten Sätzen mit einer Constanten identisch. Den Wert dieser Constanten aber haben wir gerade zu $2^4 \cdot 3^6$ bestimmt. Man berechnet so ohne weiteres

$$\sigma = \frac{108}{(\sqrt{\Delta})^3}$$

und erhält aus (1) die endgültigen Formeln:

$$(2) \qquad \lambda: \begin{cases} \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \dfrac{3g_2}{\sqrt{\Delta}}, \\ 2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3 = \dfrac{54g_3}{\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta}}, \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) = -\dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}. \end{cases}$$

Hierbei haben wir noch zwei Bemerkungen zu machen: Man sieht erstlich, dass wir aus den Gleichungen (1) beim Fortgang zu (2) jeweils beiderseits die dritte bez. zweite Wurzel gezogen haben. Damit entspringt die merkwürdige Thatsache, die wir sogleich noch näher zu verfolgen haben werden, *dass* $\sqrt{\Delta}$ *eine eindeutige Modulform ist.*

*) Wir gehen hierbei von der Voraussetzung aus, dass die homogenen Variabelen ω_1, ω_2 auf durchaus endliche Werte eingeschränkt werden sollen.

Jedenfalls aber ist $\sqrt[4]{\Delta}$ erst dann eine *bestimmte* Modulform, wenn wir ihren Wert etwa für $\omega = i\infty$ unter den offen stehenden vier Möglichkeiten in einer Weise wählen. Wir schreiben in diesem Sinne als Näherungswert bei $\omega = i\infty$: $\sqrt[4]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 r^{\frac{1}{4}}$ und benutzen für die sogleich zu betrachtende dritte Wurzel $\sqrt[3]{\Delta}$, von der übrigens ganz ähnliche Bemerkungen gelten, $\sqrt[3]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 r^{\frac{1}{3}}$. Nur unter dieser Voraussetzung sind die Formeln (2), sowie die sogleich unter (3) und (4) mitzuteilenden Relationen correct. — Eine zweite Bemerkung betrifft die auf den rechten Seiten von (2) auftretenden numerischen Factoren. Der Zahlwert derselben ist offenbar durch die Auswahl der numerischen Factoren $\varkappa$ (Formel (4), p. 617) bedingt, welche wir in die Definition unserer Modulformen λ_1, λ_2 mit hineinnahmen. In der That haben wir $\varkappa$ oben so bestimmt, dass die drei Coefficienten auf den rechten Seiten von (2) möglichst kleine, aber durchgehends ganzzahlige Werte bekommen; und es wurden auch bei den übrigen Modulformen ξ_1, ξ_2 u. s. w. die bezüglichen numerischen Factoren im Hinblick auf die unten stehenden Relationen (3) etc. nach dem gleichen Gesichtspunkte gewählt.

Nach dieser ausführlichen Besprechung des ersten Falles genügt es, bei den drei übrigen nur noch kurz die den Gleichungen (2) entsprechenden Relationen zusammenzustellen. Wir finden:

$$(3)\qquad \xi:\begin{cases} \xi_1^4 + 8\xi_1\xi_2^3 = \dfrac{12 g_2}{(\sqrt[3]{\Delta})^2}, \\ \xi_1^6 - 20\xi_1^3\xi_2^3 - 8\xi_2^6 = \dfrac{216 g_3}{\Delta}, \\ \xi_1^3\xi_2 - \xi_2^4 = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\Delta}}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \mu:\begin{cases} \mu_1^8 + 14\mu_1^4\mu_2^4 + \mu_2^8 = \dfrac{12 g_2}{\Delta}, \\ \mu_1^{12} - 33\mu_1^8\mu_2^4 - 33\mu_1^4\mu_2^8 + \mu_2^{12} = \dfrac{216 g_3}{\Delta\sqrt{\Delta}}, \\ \mu_1\mu_2(\mu_1^4 - \mu_2^4) = \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \xi:\begin{cases} -(\xi_1^{20} + \xi_2^{20}) + 228(\xi_1^{15}\xi_2^5 - \xi_1^5\xi_2^{15}) - 494\xi_1^{10}\xi_2^{10} = -\dfrac{12 g_2}{\Delta^2}, \\ (\xi_1^{30} + \xi_2^{30}) + 522(\xi_1^{25}\xi_2^5 - \xi_1^5\xi_2^{25}) - 10005(\xi_1^{20}\xi_2^{10} + \xi_1^{10}\xi_2^{20}) = \dfrac{216 g_3}{\Delta^3}, \\ \xi_1\xi_2(\xi_1^{10} + 11\xi_1^5\xi_2^5 - \xi_2^{10}) = -\dfrac{1}{\Delta}. \end{cases}$$

Wenn wir durch die Relationen zwischen J und λ u. s. w. die den vier in Rede stehenden Hauptcongruenzgruppen entsprechenden Galois'schen Probleme der Grade 6, 12, 24 und 60 definieren konnten, so können wir jetzt die vier ihnen entsprechenden *Formenprobleme**) durch die vier Gleichungssysteme (2) bis (5) formuliert denken. Dabei sind g_2, g_3 ihrem Zahlwerte nach beliebig gegeben, während $\sqrt[3]{\Delta}$ und $\sqrt[4]{\Delta}$ unter Beobachtung der Relation $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ gewählt werden müssen; gesucht sind die zugehörigen Wertsysteme λ_1, λ_2 bez. ξ_1, ξ_2 etc. Wir werden in sofort verständlicher Weise sagen, *dass wir hier Galois'sche Formenprobleme der Grade* 12, 24, 48 *und* 120 *vor uns haben, deren bezügliche Gruppen durch die homogenen* G_{12}, G_{24}, G_{48} *und* G_{120} *gegeben sind.*

Über alle weiteren Entwicklungen betreffs dieser Probleme, sowie betreffs der Gestalt der Relationen (2) etc. verweisen wir auf die bezüglichen Mitteilungen in den Vorlesungen über das Ikosaeder.

§ 5. Die eindeutigen Modulformen $\sqrt[3]{\Delta}$, $\sqrt[4]{\Delta}$ und $\sqrt[12]{\Delta}$.

Besonders wichtige Folgerungen knüpfen sich, wie wir bereits andeuteten, an die beiden dritten unter (2) und (3) des vorigen Paragraphen gegebenen Relationen. Wir entnehmen aus denselben:

$$(1) \qquad \sqrt[3]{\Delta} = \frac{3}{\xi_1^{\,3}\xi_2 - \xi_2^{\,4}}, \quad \sqrt[4]{\Delta} = -\frac{2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

und durch deren Division:

$$(2) \qquad \sqrt[12]{\Delta} = -\frac{3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\xi_2(\xi_1^{\,3} - \xi_2^{\,3})},$$

so dass sich der merkwürdige Satz ergiebt: *Die zwölfte Wurzel aus der Discriminante* Δ, *welche übrigens hier dadurch endgültig definiert ist, dass bei* $\omega = i\infty$ *näherungsweise*

$$\sqrt[12]{\Delta} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right) r^{\frac{1}{12}}$$

zutrifft, ist eine eindeutige elliptische Modulform; ein Gleiches gilt dann ohne weiteres auch von $\sqrt[3]{\Delta}$ *und* $\sqrt[4]{\Delta}$.

Die hiermit gewonnenen Modulformen können sich gegenüber homogenen Modulsubstitutionen höchstens noch um multiplicative 12te bez. 3te und 4te Einheitswurzeln ändern, und wir wollen in diesem Betracht vorerst ihr Verhalten bei Ausübung der homogenen Operationen S und T in Erfahrung bringen. Die Darstellungen (1) und (2)

*) Vergl. darüber „Ikos." p. 63 u. f.

geben uns hier auf Grund der Formeln (4) und (5) p. 620 durch mühelose Rechnung die nachfolgenden Resultate:

(3) $\sqrt[3]{\Delta}(\omega_1+\omega_2, \omega_2) = \varrho \cdot \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$, $\sqrt[3]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1) = \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$,

(4) $\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1+\omega_2, \omega_2) = i \cdot \sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$, $\sqrt[4]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1) = i \cdot \sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$,

aus deren Division wir dann weiter folgern:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) &= e^{\frac{\pi i}{6}} \cdot \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2), \\ \sqrt[12]{\Delta}(-\omega_2, \omega_1) &= -i \cdot \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Durch Wiederholung der Operation T folgern wir im speciellen

$$\sqrt[3]{\Delta}(-\omega_1, -\omega_2) = \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2), \quad \sqrt[4]{\Delta}(-\omega_1, -\omega_2) = -\sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2),$$
$$\sqrt[12]{\Delta}(-\omega_1, -\omega_2) = -\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Es stimmt dies Resultat mit dem Umstande überein, *dass wir in* $\sqrt[3]{\Delta}$, $\sqrt[4]{\Delta}$ *und* $\sqrt[12]{\Delta}$ *Modulformen der Dimension* (-4) *bez.* (-3) *und* (-1) *besitzen*, was ja aus der Dimension (-12) von Δ selbst von vornherein bekannt ist.

Bevor wir vom allgemeinen Ausdruck für die Einheitswurzel handeln, um welche sich die einzelne unserer drei Modulformen bei einer beliebigen Modulsubstitution ändert, mögen wir die homogenen Untergruppen aufstellen, welche zu $\sqrt[3]{\Delta}$ und $\sqrt[4]{\Delta}$ gehören, womit dann zugleich die zu $\sqrt[12]{\Delta}$ gehörende homogene Gruppe gewonnen sein wird. Zu $\sqrt[3]{\Delta}$ wird ersichtlich eine Γ_3 vom Index drei, zu $\sqrt[4]{\Delta}$ eine homogene Γ_4 gehören. Jetzt bemerke man, dass zur einzelnen dieser beiden Untergruppen mit der Substitution v auch jede Substitution $V^{-1}vV$ gehört, unter V eine ganz beliebige Modulsubstitution verstanden; man folgert dies ohne Mühe aus dem Umstande, dass unsere Moduln bei Ausübung von V nur einen von ω unabhängigen Factor annehmen. Constatieren wir also: *Die beiden zu* $\sqrt[3]{\Delta}$ *und* $\sqrt[4]{\Delta}$ *gehörenden homogenen Gruppen* Γ_3 *und* Γ_4 *sind ausgezeichnete Untergruppen.* Nach den beiden ersten Gleichungen (3) und (4) ist in Γ_3 die Operation S^3, in Γ_4 aber S^4 enthalten, und es finden sich demnach auch alle mit S^3 gleichberechtigten Operationen in Γ_3, wie alle mit S^4 gleichberechtigten in Γ_4. Sofort entspringt daraus auf Grund früherer Sätze: In Γ_3 ist die homogene Hauptcongruenzgruppe dritter, in Γ_4 ebendiese Gruppe vierter Stufe enthalten. Wir können das auch dahin aussprechen: *Die Formen* $\sqrt[3]{\Delta}$ *und* $\sqrt[4]{\Delta}$ *sind Congruenzmoduln dritter bez. vierter Stufe, und eben deshalb ist* $\sqrt[12]{\Delta}$ *ein Congruenzmodul der zwölften Stufe.*

Zur endgültigen Bestimmung der Γ_3 und Γ_4 bemerke man, dass

die homogene Operation T^2 wohl in Γ_3, aber nicht in Γ_4 enthalten ist. Es folgt in bekannter Weise, dass der Γ_3 eine nicht-homogene ausgezeichnete Γ_3, der Γ_4 aber eine nicht-homogene ausgezeichnete Γ_2 zugeordnet ist. Da muss nun diese nicht-homogene Γ_3 der dritten Stufe, modulo 3 reduciert, innerhalb der hier in Betracht kommenden G_{12} vom Tetraedertypus eine ausgezeichnete G_4 ergeben, während entsprechend die nicht-homogene Γ_2 in der zur vierten Stufe gehörenden nicht-homogenen G_{24} vom Oktaedertypus eine ausgezeichnete G_{12} ergeben wird. Aber in jener G_{12} giebt es nur eine ausgezeichnete G_4, nämlich die in ihr enthaltene Vierergruppe, welche sich neben der Identität aus den Operationen der Periode zwei der G_{12} zusammensetzt, und innerhalb der G_{24} giebt es nur eine ausgezeichnete G_{12}, nämlich die in ihr enthaltene Tetraedergruppe. Indem wir also daran erinnern, dass in der G_{12} der modulo 3 incongruenten Substitutionen die Operationen der Periode zwei durch $\alpha + \delta \equiv 0$, (mod. 3) charakterisiert sind, folgt erstlich: *Die Modulform* $\sqrt[3]{\Delta}$ *bleibt bei allen modulo* 3 *mit einem der folgenden acht Typen*:

$$(6)\quad \begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & +1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & -1\\ +1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1, & +1\\ +1, & +2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+2, & +1\\ +1, & +1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & +1\\ -1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & -1\\ -1, & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2, & -1\\ -1, & -1\end{pmatrix}$$

congruenten homogenen Modulsubstitutionen und nur bei diesen unverändert (was man übrigens auch leicht durch directe Verwendung der Formeln (3) ableiten kann). Für $\sqrt[4]{\Delta}$ charakterisieren wir zunächst die vorhin genannte ausgezeichnete Γ_2, die übrigens, wie man sofort überblicken wird, zur eindeutigen Modulform $\sqrt{\Delta}$ gehört*). Die in Rede stehende nicht-homogene Γ_2 reduciert sich modulo 4 auf die zwölf Typen:

$$(7)\quad \begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & +1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & +2\\ 0, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & 0\\ +2, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1, & +2\\ +2, & +5\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-1, & -1\\ +1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+1, & +3\\ -1, & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+3, & +1\\ -1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3, & -7\\ +1, & +2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0, & +1\\ -1, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & -1\\ +1, & +3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2, & -1\\ +3, & +1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}+2, & +5\\ -3, & -7\end{pmatrix}.$$

In der That bilden diese zwölf Substitutionen, nicht-homogen aufgefasst, mod. 4 eine Untergruppe G_{12} innerhalb der G_{24}, und man

*) Mit deren Hülfe sich die Modulfunction $\frac{g_3}{\sqrt{\Delta}}$ zusammensetzt.

erkennt an dieser G_{12} auch leicht den Tetraedertypus, indem sich diese Gruppe nämlich aus ihren beiden Substitutionen

$$V_3 \equiv \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 \equiv \begin{pmatrix} -1, & 2 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } 4)$$

erzeugen lässt, welche letztere den Bedingungen

$$V_3^3 \equiv 1, \quad V_2^2 \equiv 1, \quad (V_3 V_2)^3 \equiv 1 \tag{8}$$

genügen. Aber nun bemerke man, dass V_3 und V_2, unter den hier gewählten Vorzeichen ihrer Coefficienten als homogene Substitutionen gedeutet, gerade wieder den Bedingungen (8) genügen und sonach eine homogene Tetraedergruppe G_{12} erzeugen. Diese letztere G_{12} umfasst dann mod. 4 gerade die zwölf Typen (7), wenn wir dieselben unter den gewählten Vorzeichen der Coefficienten als homogene Substitutionen deuten, wie man solches sofort durch Rechnung zeigt*). Die so gewonnene homogene G_{12} führt nun zur Untergruppe Γ_4 von $\sqrt[4]{\Delta}$, weil sich nämlich $\sqrt[4]{\Delta}$ bei den hier mit V_3 und V_2 bezeichneten homogenen Operationen nicht ändert; in der That kann sich $\sqrt[4]{\Delta}$ bei der Operation V_3 der Periode *drei* nicht ändern, weil sie allgemein bei Ausübung einer Modulsubstitution eine multiplicative *vierte* Einheitswurzel annimmt; weiter ist aber $V_2 \equiv S^2 T^2$, so dass sich $\sqrt[4]{\Delta}$ zufolge (4) auch bei V_2 nicht ändert. Also der Satz: *Die zu* $\sqrt[4]{\Delta}$ *gehörende* Γ_4 *ist diejenige ausgezeichnete homogene Congruenzgruppe vierter Stufe, die sich modulo 4 auf die zwölf Operationen* (7) *reduciert***).

Um jetzt allgemein die Einheitswurzeln zu bestimmen, welche $\sqrt[3]{\Delta}$ und $\sqrt[4]{\Delta}$ bei beliebigen Modulsubstitutionen annehmen, setzen wir an:

$$\sqrt[3]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varrho^A \cdot \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) \tag{9}$$

und bestimmen die durch A bezeichnete, von α, β, γ, δ eindeutig abhängige ganze Zahl in folgender Weise. Sei erstlich $\alpha \equiv \pm 1 \pmod 3$, so üben wir in (9) auf ω_1 und ω_2 die Operation $S^{-\alpha\beta}$ aus und reducieren in dem auf Grund von (3) entspringenden Resultate linker Hand die Coefficienten gelegentlich modulo 3, was beim Congruenzmodul dritter Stufe $\sqrt[3]{\Delta}$ ohne weiteres statthaft ist. Es folgt:

*) Der innerhalb der G_{24} enthaltenen nicht-homogenen G_{12} vom Tetraedertypus ist hiernach innerhalb der homogenen G_{48} eine G_{24} zugeordnet, in welcher letzteren sich aber wiederum eine homogene G_{12} aussondern lässt; letztere G_{12} steht zur ursprünglichen nicht-homogenen G_{12} im Verhältnis des holoedrischen Isomorphismus. Hiervon war bereits unter dem Texte der Seite 393 die Rede.

**) Die Bestimmung der Gruppen Γ_3, Γ_4 ist zuerst durch Hrn. Hurwitz in der bereits p. 118 genannten Arbeit im 18ten Bande der Math. Ann. p. 563 u. f. geschehen.

$$\sqrt[3]{\Delta}(\alpha\omega_1, \gamma\omega_1 + \alpha\omega_2) = \varrho^{A-\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Durch Ausübung von T folgt weiter:

$$\sqrt[3]{\Delta}(-\alpha\omega_2, \alpha\omega_1 - \gamma\omega_2) = \varrho^{A-\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2),$$

und wenn wir jetzt $S^{\alpha\gamma}$ und dann erneut T anwenden, kommt:

$$\sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = \varrho^{A-\alpha\beta+\alpha\gamma} \cdot \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Wir schliessen daraus, dass für $\alpha \equiv \pm 1$, (mod. 3) die Zahl A durch

(10) $$A \equiv \alpha\beta - \alpha\gamma, \text{ (mod. 3)}$$

gegeben ist. Für $\alpha \equiv 0$, (mod. 3) setzen wir wieder:

$$\sqrt[3]{\Delta}(\beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varrho^{A} \cdot \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2);$$

hier folgt durch Ausübung von $S^{-\gamma\delta}$ und T ähnlich wie soeben:

(11) $$A \equiv \gamma\delta, \text{ (mod. 3)}.$$

Die Congruenzen (10) und (11) lassen sich jetzt in den allgemein gültigen Ausdruck von A zusammenziehen:

(12) $$A \equiv \alpha^2(\alpha\beta - \alpha\gamma) + (1 - \alpha^2)\gamma\delta, \text{ (mod. 3)},$$

dem wir übrigens noch leicht die Gestalt verleihen:

(13) $$A \equiv \alpha\beta - \alpha\gamma + \gamma\delta - \alpha^2\gamma\delta \equiv (\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha\beta + \gamma\delta).$$

Die bei Transformation von $\sqrt[3]{\Delta}$ auftretende dritte Einheitswurzel ist sonach allgemein gegeben durch:

(14) $$\sqrt[3]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varrho^{(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\gamma\delta)} \cdot \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2).$$

Beim Modul vierter Stufe $\sqrt[4]{\Delta}$ schlagen wir ein völlig analoges Verfahren ein, indem wir

$$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = i^{B} \cdot \sqrt[4]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$$

ansetzen und wieder in zweckmässiger Folge Substitutionen S und T ausüben. Ohne noch einmal die Rechnung explicite durchzuführen, geben wir hier sogleich deren Resultat an. Es findet sich:

(15) $$B \equiv \gamma(1 - \alpha^2)(\alpha + \delta + 1) + \alpha^2(1 - \alpha + \alpha\beta - \alpha\gamma), \text{ (mod. 4)}.$$

Das Verhalten der vierten Wurzel $\sqrt[4]{\Delta}$ aus der Discriminante gegenüber den Modulsubstitutionen ist hiernach gegeben durch:

(16) $$\sqrt[4]{\Delta}(\alpha\omega_1+\beta\omega_2, \gamma\omega_1+\delta\omega_2) = i^{\gamma(1-\alpha^2)(\alpha+\delta+1)+\alpha^2(1-\alpha+\alpha\beta-\alpha\gamma)} \cdot \sqrt[4]{\Delta}(\omega_1,\omega_2).$$

Leicht folgert man daraus noch weiter:

(17) $$\sqrt{\Delta}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = (-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta} \cdot \sqrt{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$$

und gewinnt durch zweckmässige Combination von (14) und (16) das entsprechende Verhalten der eindeutigen Modulform $\sqrt[12]{\Delta}$.*)

§ 6. Bestimmung der zu den Modulformen λ_1, λ_2, etc. gehörenden homogenen Untergruppen**).

Vermöge der inzwischen über die Wurzeln aus der Discriminante gewonnenen Resultate ist es jetzt leicht, für die in § 3, p. 618 eingeführten Modulformen die zugehörigen homogenen Untergruppen zu bestimmen. Beginnen wir die Untersuchung sogleich mit λ_1, λ_2 und verknüpfen diese Moduln mit $\sqrt[4]{\Delta}$ zu den beiden neuen Moduln:

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{\sqrt[4]{\Delta}}, \quad \lambda_4 = \frac{\lambda_2}{\sqrt[4]{\Delta}}, \tag{1}$$

welche auf Grund von (4) p. 620 und (4) p. 624 gegenüber S und T das Verhalten

$$\begin{aligned} S\colon\ & \lambda_3' = -\lambda_3 + \lambda_4, \quad \lambda_4' = \lambda_4, \\ T\colon\ & \lambda_3' = -\lambda_4, \qquad\quad \lambda_4' = -\lambda_3 \end{aligned} \tag{2}$$

zeigen. Nun wolle man aus dem Umstande, dass sich jedes unserer Modulsysteme gegenüber den Modulsubstitutionen stets linear reproduciert, vorab den allgemeinen Satz folgern: *Die gesamten homogenen*

*) Die Bestimmung der bei $\sqrt[3]{\Delta}$ und $\sqrt[4]{\Delta}$ auftretenden Einheitswurzeln auf dem hier verfolgten Wege ist zuerst durch Hrn. Hurwitz l. c. p. 564 u. f. geschehen. In der Theorie der linearen Transformation der ϑ-Functionen spielt auch $\sqrt[8]{\Delta}$ und damit $\sqrt[24]{\Delta}$ eine wichtige Rolle. Genaue Untersuchungen über das Verhalten der letzteren sind schon früher von Hrn. Dedekind angestellt worden, dessen Function η nichts anderes als $\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}\sqrt[24]{\Delta}$ ist. Man vergleiche ausser der schon p. 142 genannten Arbeit die *„Erläuterungen zu den Riemann'schen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen"* in Riemann's Werken (Leipzig 1876) p. 438. Neuere Untersuchungen über $\sqrt[24]{\Delta}$ sind durchgeführt von Hrn. Th. Molien (vergl. dessen Note: *Über gewisse in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln,* Berichte des Kgl. Sächs. Gesellsch. d. W. zu Leipzig, 1885), desgl. von Hrn. Kiepert (im Verlauf der Abhandlung: *Über Teilung und Transformation der elliptischen Functionen,* Math. Ann. Bd. 26 (1885), sowie endlich im Anschluss an Dedekind von Hrn. H. Weber in dessen Arbeit, *Zur Theorie der elliptischen Functionen,* Acta Mathematica Bd. 6 p. 329 u. f. (1885). Im Texte muss $\sqrt[24]{\Delta}$ ausser Betracht bleiben; denn sie ist in den ω_1, ω_2 von der Dimension $\left(-\frac{1}{2}\right)$ und also nicht mehr eine eindeutige Modulform in dem von uns festgesetzten Sinne.

**) Die in diesem Paragraphen gegebenen Entwicklungen wurden erst neuerdings vom Herausgeber durchgeführt.

Modulsubstitutionen, welche das einzelne unserer Modulsysteme unverändert lassen, bilden eine ausgezeichnete Untergruppe der homogenen Modulgruppe. Aber man sieht sofort, dass λ_3, λ_4 bei S^2 und also auch bei allen mit S^2 gleichberechtigten Substitutionen unverändert bleiben. Diese Operationen erzeugen nun die homogene Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe, *und demnach sind λ_3 und λ_4 Modulformen zweiter Stufe.* Da wir hingegen in $\sqrt[4]{\Delta}$ bereits einen Congruenzmodul vierter Stufe erkannten, *so sind mit ihm auch λ_1 und λ_2 Modulformen vierter Stufe* und werden zufolge (1) bei einer mit der Identität modulo 2 congruenten Substitution das Verhalten von $\sqrt[4]{\Delta}$ zeigen; wir haben also nach (16) p. 627 für eine Substitution dieser Art:

$$\lambda_1(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = (-1)^{\frac{1-\alpha+\beta-\gamma}{2}} \cdot \lambda_1(\omega_1,\ \omega_2)$$

und entsprechend für λ_2. Im Hinblick auf die unter (7) p. 625 charakterisierte Untergruppe von $\sqrt[4]{\Delta}$ folgt jetzt ohne weiteres: *Die zu den Modulformen vierter Stufe λ_1, λ_2 gehörende ausgezeichnete homogene Congruenzgruppe umfasst alle mod. 4 mit den vier Typen:*

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1, & 2 \\ 0, & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 2, & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 5 \end{pmatrix}$$

congruenten homogenen Substitutionen.

Während übrigens die aus λ_3, λ_4 entspringende G_6 direct die Structur der nicht-homogenen Diedergruppe ($n = 3$) besitzt, werden wir die aus (4) p. 620 entspringende homogene G_{12} der Formen λ_1, λ_2, da sie auf die G_6 hemiedrisch isomorph bezogen ist, als eine homogene Diedergruppe ($n = 3$) bezeichnen*). Diese homogene G_{12} enthält, wie man leicht nachweist, eine cyclische G_6 und drei cyclische G_4 als Untergruppen. Der Vollständigkeit halber rechnen wir uns auch noch die zwischen λ_3 und λ_4 einerseits und g_2, g_3 andrerseits bestehenden Relationen aus. Man findet aus (2) p. 621 für λ_3, λ_4 sofort:

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4^2 = \dfrac{3g_2}{\Delta}, \\ 2\lambda_3^3 - 3\lambda_3^2\lambda_4 - 3\lambda_3\lambda_4^2 + 2\lambda_4^3 = \dfrac{54g_3}{\Delta\sqrt{\Delta}}, \\ -\lambda_3\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_4) = \dfrac{2}{\Delta}\cdot - \end{cases}$$

*) Wir müssen hier von vornherein mit der Möglichkeit rechnen, dass sich eine nicht-homogene G_6 des eindeutig bestimmten Diedertypus möglicherweise noch in mehreren wesentlich verschiedenen Arten zu homogenen G_{12} erweitern lässt, d. h. dass für eine homogene Diedergruppe G_{12} noch mehrere unter-

In ganz analoger Weise definieren wir jetzt neben dem System ξ_1, ξ_2 die beiden weiteren Modulformen $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$\xi_3 = \xi_1 \sqrt[6]{\Delta}, \quad \xi_4 = \xi_2 \sqrt[6]{\Delta}. \tag{5}$$

Diese Formen erfahren gegenüber den homogenen Substitutionen S und T die Änderungen:

$$\begin{aligned} &S: \quad \xi_3' = \xi_3, && \xi_4' = \varrho \xi_4, \\ &T: \; i\sqrt{3}\xi_3' = \xi_3 + 2\xi_4, && i\sqrt{3}\xi_4' = \xi_3 - \xi_4, \end{aligned} \tag{6}$$

so dass ξ_3, ξ_4 gegenüber S^3 invariant sind und sich demzufolge als Moduln *dritter* Stufe erweisen. Da ξ_3, ξ_4 aber von ungerader Dimension in den ω_1, ω_2 sind, so werden sie bei T^2 das Zeichen wechseln, *und es entspringt aus* (6) *eine homogene Tetraedergruppe* G_{24}, *welche uns offenbar direct die zur homogenen Hauptcongruenzgruppe dritter Stufe gehörende endliche* G_{24} *darstellt.* Merken wir uns für ξ_3, ξ_4 sogleich auch die den Relationen (4) entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{cases} \xi_3^4 + 8\xi_3\xi_4^3 = 12 g_2, \\ \xi_3^6 - 20\xi_3^3\xi_3^4 - 8\xi_4^6 = 216 g_3, \\ \xi_3^3\xi_4 - \xi_4^4 = 3\sqrt[3]{\Delta}. \end{cases} \tag{7}$$

Jetzt ist besonders interessant, dass auch aus den Operationen (5) p. 620 eine homogene Gruppe von 24 Operationen der ξ_1, ξ_2 entspringt, die mit den eben betrachteten Substitutionen der ξ_3, ξ_4, im ganzen betrachtet, übereinstimmt. *Die* G_{24} *der* ξ_1, ξ_2 *zeigt also den eben schon gewonnenen homogenen Tetraedertypus. Inzwischen sind die Formen* ξ_1, ξ_2 *ebenso wie* $\sqrt[6]{\Delta}$ *Congruenzmoduln der sechsten Stufe;* sie gehören also zu einer ausgezeichneten homogenen Γ_{24} der Stufe sechs, deren bezügliche endliche G_{24} dieselbe Structur besitzt, wie die zur Hauptcongruenzgruppe vierter Stufe Γ_{24} gehörige homogene G_{24}. Um jene Γ_{24} der 6ten Stufe zu bestimmen, schreiben wir uns zunächst die mod. 6 verschiedenen, mod. 3 mit 1 congruenten nicht-homogenen Substitutionen auf:

$$\begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 3, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2, & 3 \\ 3, & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2, & 3 \\ -3, & 4 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden zwölf homogenen Substitutionen werden zur Hälfte ξ_1, ξ_2 im Vorzeichen ändern, zur Hälfte unverändert lassen; die letzteren sechs werden unsere fragliche Γ_{24} mod. 6 charakterisieren. Nun lassen die sechs eben geschriebenen Substitutionen, unter Festhaltung der

---

schiedene Structuren möglich sind. Die gleiche Bemerkung gilt auch für die übrigen Gruppen der regulären Körper.

für ihre Coefficienten gewählten Vorzeichen, ξ_3, ξ_4, $\sqrt[3]{\Delta}$ einzeln unverändert, während $\sqrt{\Delta}$ nach (17) p. 627 bei der ersten, zweiten und letzten Substitution das Zeichen wechselt, bei den drei übrigen aber unverändert bleibt. Mit Rücksicht auf die ungerade Dimension der ξ_3, ξ_4 folgert man hieraus mühelos: *Die zu* ξ_1, ξ_2 *gehörende homogene* Γ_{24} *sechster Stufe umfasst alle modulo* 6 *mit:*

$$(8)\quad \begin{pmatrix} -1, & 3 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 3, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2, & 3 \\ 3, & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & -3 \\ 3, & -4 \end{pmatrix}$$

congruenten homogenen Modulsubstitutionen. Dass diese sechs Typen modulo 6 thatsächlich eine ausgezeichnete G_6 in der homogenen G_{144} bilden, kann man natürlich auch direct beweisen. —

Unter Zurückschiebung von μ_1, μ_2 nehmen wir jetzt erst ξ_1, ξ_2 vorweg, weil nämlich hier Schritt für Schritt die nämliche Überlegung Anwendung findet, wie soeben bei ξ_1, ξ_2. Wir schreiben:

$$(9)\qquad \xi_3 = \zeta_1\sqrt{\Delta}, \quad \xi_4 = \zeta_2\sqrt{\Delta},$$

welche Modulformen nach (7) p. 620 und (17) p. 627 bei S und T die Änderungen erleiden:

$$(10)\quad \begin{aligned} &S\colon \quad \zeta_3' = \varepsilon^3\zeta_3, && \zeta_4' = \varepsilon^2\zeta_4, \\ &T\colon \sqrt{5}\,\zeta_3' = (\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta_3 - (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_4, && \sqrt{5}\,\zeta_4' = -(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_3 - (\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta_4. \end{aligned}$$

Die Operation S^5 *lässt* ζ_3, ζ_4 *unverändert, so dass wir in ihnen Modulformen fünfter Stufe und übrigens* $(-5)^{\text{ter}}$ *Dimension besitzen.* Die aus (10) entspringende homogene Ikosaedergruppe stellt uns also die zur Hauptcongruenzgruppe fünfter Stufe gehörende homogene G_{120} dar. Mit g_2, g_3 sind ζ_3, ζ_4 verbunden durch:

$$(11)\quad \begin{cases} H(\zeta_3, \zeta_4) = -12 g_2 \Delta^8, \\ T(\zeta_3, \zeta_4) = 216 g_3 \Delta^{12}, \\ f(\zeta_3, \zeta_4) = -\Delta^5, \end{cases}$$

wobei H, T, f die wohlbekannten Ikosaederformen sind.

Andrerseits entspringt aus (7) p. 620 eine G_{120}, deren Substitutionen, im ganzen betrachtet, wieder mit denen von ζ_3, ζ_4 völlig übereinstimmen. *Aber* ζ_1, ζ_2 *sind Modulformen zehnter Stufe und gehören als solche zu einer ausgezeichneten homogenen* Γ_{120} *dieser Stufe, deren entsprechende* G_{120}, *wie wir sehen, dieselbe Structur besitzt, wie die zur homogenen Hauptcongruenzgruppe fünfter Stufe gehörende* G_{120}. *Die fragliche* Γ_{120} *der zehnten Stufe reduciert sich mod.* 10 *genommen auf die sechs Substitutionen:*

$$(12)\quad \begin{pmatrix} -1, & 5 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 5, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6, & 5 \\ 5, & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 5, & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6, & 5 \\ 5, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}. -$$

Eine besondere Stellung nimmt das nun noch übrig bleibende Modulsystem μ_1, μ_2 ein. Hier können wir zuvörderst das Eintreffen derjenigen Möglichkeiten beobachten, die wir bei der homogenen Diedergruppe unter dem Texte p. 629 in Aussicht stellten. Aus den Formeln (6) p. 620 entspringt, wie wir sogleich noch näher sehen werden, eine homogene G_{48}, die als eine homogene Oktaedergruppe zu bezeichnen sein wird. Wir betonen dabei besonders, dass den cyclischen G_4 der nicht-homogenen Oktaedergruppe in dieser homogenen G_{48} *cyclische* G_8 entsprechen, wie man aus der ersten der eben citierten Formeln ohne weiteres abliest. Auf der anderen Seite entspricht aber der homogenen Hauptcongruenzgruppe vierter Stufe eine G_{48}, die wir mit demselben Rechte als homogene Oktaedergruppe bezeichnen. In dieser G_{48} ist aber der aus S entspringenden nicht-homogenen G_4 die homogene G_8 der Operationen:

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 3\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1, & -1\\ 0, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & -2\\ 0, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & -3\\ 0, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}$$

zugeordnet, und diese ist, wie man sofort bemerkt, keineswegs cyclisch. Wir haben also da zwei von einander verschiedene homogene Oktaedergruppen.

Beim System der μ_1, μ_2 verfügen wir nun über keinen Zusatzfactor, der diese Moduln etwa analog wie die voraufgehenden in solche von der vierten Stufe zu verwandeln fähig wäre, und man hat in der That bislang kein Modulsystem gefunden, das sich mit der homogenen Oktaedergruppe G_{48} vom letzteren Typus holoedrisch isomorph substituierte. Bei dieser Sachlage ist der Beweis, dass die μ_1, μ_2 der achten Stufe angehören, etwas umständlicher. Wir verfahren nämlich in diesem Betracht, wie folgt:

Durch Combination unserer Moduln μ_1, μ_2 mit der vierten Wurzel aus der Discriminante definieren wir die beiden Modulformen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$\mu_3 = \mu_1 \sqrt[4]{\Delta}, \quad \mu_4 = \mu_2 \sqrt[4]{\Delta}, \tag{13}$$

welche gegenüber S und T das Verhalten zeigen:

$$\begin{aligned} S\colon &\quad \mu_3' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\mu_3, \qquad \mu_4' = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\mu_4, \\ T\colon &-\sqrt{2}\mu_3' = \mu_3 + \mu_4, \quad -\sqrt{2}\mu_4' = \mu_3 - \mu_4, \end{aligned} \tag{14}$$

(und dieserhalb übrigens wiederum zu einer wesentlich neuen homogenen

Oktaedergruppe Anlass geben). Mit g_2, g_3 erweisen sich diese neuen Moduln verbunden durch die Relationen:

$$(15)\qquad \begin{cases} \mu_3^8 + 14\mu_3^4\mu_4^4 + \mu_4^8 = 12g_2\Delta, \\ \mu_3^{12} - 33\mu_3^8\mu_4^4 - 33\mu_3^4\mu_4^8 + \mu_4^{12} = 216g_3\Delta\sqrt{\Delta}, \\ \mu_3\mu_4(\mu_3^4 - \mu_4^4) = 2\Delta. \end{cases}$$

Von den jetzt definierten Moduln μ_3, μ_4 können wir nun zeigen, dass sie der achten Stufe angehören, wofern wir hier eine später noch ausführlich zu betrachtende nicht-homogene ausgezeichnete Congruenzgruppe Γ_{48} der achten Stufe zum Gebrauch heranziehen. Dieselbe lässt sich, wie wir hier vorgreifend bemerken, aus S^8, den beiden Substitutionen $\begin{pmatrix} 17, & 4 \\ 4, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -15, & 4 \\ -4, & 1 \end{pmatrix}$, sowie aus denjenigen ferneren Substitutionen erzeugen, welche aus den beiden soeben angeführten durch wiederholte Transformation vermöge S entspringen. Man beweist nun in der That ohne Mühe auf Grund von (14), dass für $k = 3, 4$ die Gleichungen:

$$\mu_k(\pm 17\omega_1 \pm 4\omega_2, \pm 4\omega_1 \pm \omega_2) = \mu_k(\omega_1, \omega_2),$$
$$\mu_k(\mp 15\omega_1 \pm 4\omega_2, \mp 4\omega_1 \pm \omega_2) = \mu_k(\omega_1, \omega_2)$$

erfüllt sind, und man schliesst in bekannter Weise daraus sofort, dass auch alle mit den soeben ausgeübten gleichberechtigten Substitutionen μ_3 und μ_4 unverändert lassen. Da μ_3, μ_4 aber auch bei S^8 in sich übergehen, so gehören sie in der That zur fraglichen Γ_{48}, die sich übrigens, wie man leicht berechnet, mod. 8 auf die vier nicht-homogenen Typen $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5, & 4 \\ 0, & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5, & 0 \\ 4, & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 4, & 1 \end{pmatrix}$ reduciert. Merken wir uns also als Resultat: *Die beiden Formen μ_3 und μ_4 sind Congruenzmoduln achter Stufe* $(-2)^{\text{ter}}$ *Dimension und gehören zu einer ausgezeichneten homogenen* Γ_{48}, *welche alle modulo* 8 *mit:*

$$(16)\qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 4 \\ 0, & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 0 \\ 4, & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 4, & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 7, & 0 \\ 0, & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 0, & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 4, & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7, & 4 \\ 4, & 7 \end{pmatrix}$$

congruenten homogenen Modulsubstitutionen umfasst.

Da sich nun $\sqrt[4]{\Delta}$ bereits oben als ein Congruenzmodul der vierten Stufe erwies, so erkennen wir jetzt in μ_1, μ_2, die doch der vierten Stufe nicht angehören können, gleichfalls Moduln der *achten* Stufe. Dabei gehören sie zu einer ausgezeichneten homogenen Γ_{48} dieser Stufe, die man unter Rücksichtnahme auf das Verhalten von $\sqrt[4]{\Delta}$ durch ganz analoge Überlegungen in Erfahrung bringt, wie vorhin die

Gruppen von ξ_1, ξ_2 und ζ_1, ζ_2. Es findet sich, *dass die fragliche ausgezeichnete* Γ_{48} *sich mod.* 8 *auf die acht homogenen Operationen*:

$$(17) \qquad \begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5, 0\\4, 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5, 4\\0, 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, 4\\4, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3, 0\\0, 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7, 4\\0, 7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7, 0\\4, 7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3, 4\\4, 3\end{pmatrix}$$

reduciert. Dass die durch (16) und (17) charakterisierten Untergruppen G_8 der zur achten Stufe gehörenden homogenen G_{384} ausgezeichnete sind, beweist man in der That auch leicht direct.

Hiermit kommen unsere an die Galois'schen Hauptmoduln sich anknüpfenden formentheoretischen Betrachtungen zum Abschluss.

§ 7. Die sechs gleichberechtigten Γ_6 der fünften Stufe und die zugehörige F_6.

In dem nun beginnenden zweiten Teile des gegenwärtigen Kapitels schreiten wir zu Untersuchungen wesentlich anderen Charakters vor, indem wir nämlich nunmehr auch die nicht ausgezeichneten Congruenzgruppen der bislang behandelten Stufen untersuchen wollen. Nach unseren hier in Betracht kommenden allgemeinen Erörterungen (§ 10 des vorigen Kapitels) entspricht dem einzelnen System gleichberechtigter Untergruppen Γ_μ dieser Art eine Resolvente μ^{ten} Grades des bezüglichen Galois'schen Problems. Wir werden also in erster Linie die Aufstellung solcher Resolventen als unsere Aufgabe ansehen. Eine erschöpfende Durchführung dieser Aufgabe bleibt hier indessen gänzlich ausgeschlossen; vielmehr wenden wir uns sogleich zur fünften Stufe, da sich in der That die analogen Entwicklungen für die voraufgehenden Stufen in allereinfachster Weise durchführen lassen*). Auch bei der fünften Stufe beabsichtigen wir keineswegs, die Gesamtheit der Resolventen des Problems sechzigsten Grades anzugeben; vielmehr wollen wir nur diejenigen beiden Systeme von Untergruppen der fünften Stufe heranziehen, welche den kleinsten Index aufweisen. Das sind nach p. 489 einerseits *sechs gleichberechtigte* Γ_6, die den halbmetacyclischen Untergruppen der G_{60} entsprechen, sodann aber zufolge des Galois'schen Satzes *fünf gleichberechtigte* Γ_5. Wir gewinnen von ihnen aus eine Resolvente sechsten und eine fünften Grades der Ikosaedergleichung, Resolventen, die ja freilich schon in der Ikosaedertheorie die fundamentalste Rolle spielten. Wir müssen hier aber um so mehr

*) Wir verweisen in diesem Betracht schon hier auf das zu Beginn des folgenden Paragraphen zu gebende Citat.

auf diese Gleichungen eingehen, als gerade die Art, wie wir sie ableiten wollen, allgemein für die Theorie der Modulfunctionen charakteristisch ist und weiterhin in einer ganzen Reihe von Fällen zur Verwendung gelangt.

Eine einzelne unter den sechs gleichberechtigten Γ_6 (um mit diesen zu beginnen) ist nach (1) p. 458 z. B. diejenige Untergruppe, welche alle Substitutionen der Gestalt:

$$(1)\quad v(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\delta}, \quad (\mathrm{mod.}\ 5)$$

enthält. Diese Γ_6 enthält die Substitution S; ein Fundamentalpolygon F_6 der Γ_6 muss sich also ganz innerhalb der beiden durch $\omega = \pm\frac{1}{2}$ ziehenden Geraden der Modulteilung anordnen lassen und stellt übrigens einen zehnten Teil des in Fig. 83 p. 355 angedeuteten Polygons der Γ_{60} dar. Es ist nicht besonders schwer zu sehen, dass das Polygon der fraglichen Γ_6 die hier in Fig. 96 angegebene Gestalt besitzt. Inzwischen wollen wir zum Beweise der Richtigkeit der Fig. 96 umgekehrt von ihr aus auf Grund des Verzweigungssatzes eine Untergruppe definieren und zeigen, dass dieselbe unsere durch (1) gegebene Γ_6 ist. Die Substitutionen v_1, v_2, v_3, v_4, vermöge deren die einander zugeordneten Randcurven der Fig. 96 mit einander correspondieren, berechnen sich aufs leichteste zu:

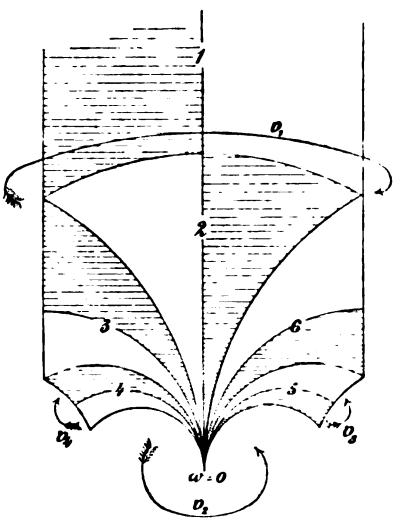


Fig. 96.

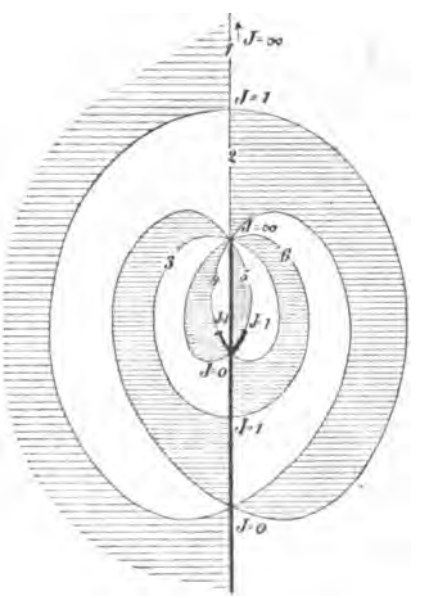


Fig. 97.

$$(2)\quad v_1(\omega) = \omega + 1,\ v_2(\omega) = \frac{\omega}{5\omega+1},\ v_3(\omega) = \frac{2\omega-1}{5\omega-2},\ v_4(\omega) = \frac{2\omega+1}{-5\omega-2};$$

dieselben haben in der That alle die Form (1). Um aber zu zeigen, dass das in Fig. 96 gezeichnete Polygon dem Verzweigungssatze

genügt, müssen wir dasselbe durch Zusammenbiegung auf einander bezogener Randcurven zur geschlossenen Fläche F_6 zusammenlegen. Diese Fläche lässt sich in einfachster Weise zu einer Ebene gestalten, da es sich nämlich in Fig. 96 um ein Polygon des Geschlechtes $p = 0$ handelt. Die zwölf Elementardreiecke der Fig. 96 geben solcherweise zu der in Fig. 97 angedeuteten Einteilung der Ebene Anlass. Um die Entstehung dieser letzteren Figur aus der ersteren noch leichter zu überblicken, haben wir beiderseits die Doppeldreiecke, wie sie einander entsprechen, mit den Nummern 1 bis 6 versehen; zugleich sind in der letzteren Figur die durch Zusammenheftung auf einander bezogener Randcurven entstehenden Linien des besseren Überblicks halber stärker markiert. — Die Ebenenteilung der Fig. 97 entspricht nun, wie man sich überzeugen wolle, gerade vollständig den Anforderungen des Verzweigungssatzes (cf. p. 345), *und also werden wir in den gezeichneten Figuren thatsächlich Polygon und Fläche F_6 der vorgelegten Γ_6 besitzen.*

Die zur Γ_6 gehörende sechsblättrige Riemann'sche Fläche F_6 über der J-Ebene werden wir sogleich zu verwenden haben; stellen wir also schon hier ihre Verzweigung fest. Dieselbe liegt in der Ebenenteilung der Fig. 97 offen am Tage; in der That ist ja diese Figur im Sinne von p. 65 u. f. ein zweckmässiger Ersatz der in Rede stehenden Riemann'schen Fläche F_6. Wir lesen demnach unmittelbar aus Fig. 97 ab: *Die Fläche F_6 ist ausschliesslich bei $J = 0, 1, \infty$ verzweigt; und zwar ordnen sich bei $J = 0$ die sechs Blätter zu je drei in zwei Verzweigungspunkte zusammen, bei $J = 1$ verlaufen zwei Blätter isoliert, die vier anderen hängen zu Paaren in zwei Verzweigungspunkten zusammen, endlich bei $J = \infty$ verläuft ein Blatt isoliert, während die übrigen fünf cyclisch mit einander verzweigt sind.* Hiervon haben wir nun sogleich eine interessante Anwendung zu machen.

§ 8. Aufstellung der Resolvente sechsten Grades*).

Die Untergruppe Γ_6 des vorigen Paragraphen gehört zum Geschlechte $p = 0$ und besitzt somit einen Hauptmodul $\tau(\omega)$. Die complexe Ebene von τ können wir dann bekanntlich geradezu als die der Fig. 97 zu Grunde liegende Ebene betrachten und werden jedenfalls

*) Die hier zur Aufstellung der Resolvente in Anwendung gebrachte Methode ist zuerst von Klein in dem Aufsatz: *Über lineare Differentialgleichungen*, Math. Ann. Bd. 12 (1877) entwickelt und dann in den p. 142 ausführlich genannten Arbeiten ausgiebig benutzt worden. Zu den dortselbst berechneten Gleichungen gehören neben der Resolvente des Textes auch die entsprechenden auf die Stufen 2, 3, 4 bezüglichen Resolventen, weiter solche der Stufen 5, 7, 13, von denen im Texte erst weiter unten gehandelt wird.

den Hauptmodul so fixieren wollen, dass die in Fig. 97 auftretende Gerade die reelle τ-Axe werde; es hat das nach den bezüglichen Entwicklungen in § 7 des vorigen Kapitels keine Schwierigkeit. In der That bleiben wir mit dieser Absicht in Übereinstimmung, wenn wir zuvörderst

$$\tau(i\infty) = 0, \quad \tau(0) = \infty \tag{1}$$

setzen. Hiermit ist freilich τ erst bis auf einen constanten Factor definiert; inzwischen werden wir den letzteren baldigst in zweckmässiger Weise festlegen. Verfolgen wir vorerst die Beziehung von τ zu J, welche uns (zufolge § 5 des vorigen Kapitels) den Ausdruck der gewünschten Resolvente sechsten Grades liefert.

Zwischen τ und J besteht eine algebraische Relation, deren allgemeine Form in (7) p. 592 angegeben ist. Dabei bedeuten für gegenwärtigen Fall Φ, Ψ, X ganze Functionen sechsten Grades von τ, die gleich Null gesetzt diejenigen Werte von τ liefern, welche bez. den Werten $J = 0, 1, \infty$ entsprechen. Aber nun sehe man in Fig. 97 nach, dass die sechs Punkte τ mit $J = 0$ an zwei getrennten Stellen zu je drei coincidieren, was wir schon in etwas anderer Form am Schlusse des vorigen Paragraphen aussprachen. Es muss demnach $\Phi(\tau) = 0$ zwei dreifache Wurzeln haben, so dass wir setzen werden:

$$\Phi(\tau) = (\tau^2 + a\tau + b)^3.$$

In völlig entsprechender Weise liest man für Ψ und X aus Fig. 97 oder dem Schlusssatze des vorigen Paragraphen die Ansätze ab:

$$\Psi(\tau) = (\tau^2 + c\tau + d)(\tau^2 + e\tau + f)^2, \quad X(\tau) = g\tau.$$

Beim Ausdruck für X haben wir zugleich berücksichtigt, dass zufolge unserer Auswahl des Hauptmoduls τ die fünffache Wurzel von $X = 0$ bei $\tau = \infty$, die einfache bei $\tau = 0$ gelegen ist; die $a, b, c, \cdots$ sind hierbei noch nicht näher bekannte numerische Grössen. Merken wir uns also, *dass wir auf Grund der im vorigen Paragraphen gefundenen Verzweigung von τ über J als Gestalt der in Rede stehenden Relation die folgende ansetzen müssen*:

$$J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + a\tau + b)^3 : (\tau^2 + c\tau + d)(\tau^2 + e\tau + f)^2 : g\tau. \tag{2}$$

Wenn wir hier übrigens den Coefficienten von τ^6 in Φ direct gleich 1 annahmen, so war dies deshalb statthaft, weil $\tau = \infty$ nicht zu den Wurzeln von $\Phi = 0$ gehört. Dass aber dann auch in $\Psi = 0$ der höchste Coefficient gleich 1 zu nehmen ist, folgt deshalb, weil die Gleichung $\Phi - X = \Psi$ ersichtlich identisch bestehen muss.

Nun aber ist besonders interessant, dass wir vermöge der vorgetragenen Überlegungen die in Aussicht genommene Resolvente vom

sechsten Grade nicht nur in der durch (2) gegebenen zum Teil noch unbestimmten Gestalt haben ansetzen können, *dass wir vielmehr von hier aus mit Hülfe einiger weniger Rechnungen die fertige Form unserer Resolvente gewinnen können, ohne dass wir etwa noch wesentlich neue Hülfsmittel heranziehen müssten**). Bevor wir diese Rechnungen durchführen, müssen wir τ endgültig fixieren, und wir wollen das dadurch thun, dass wir die in (2) enthaltene Constante g mit -1728 identisch setzen. Damit gewinnt τ, wie man leicht aus (2) berechnet, bei $\omega = 0$ den Näherungswert:

$$\tau = -e^{-\frac{2\pi i}{5\omega}},$$

ist also endgültig bestimmt und zwar (in Übereinstimmung mit unserer obigen Festsetzung) auf der imaginären ω-Axe als *reelle* Grösse.

Zur Bestimmung der noch unbekannten Coefficienten $a, b, c, \cdots$ benutzen wir nun die identische Gleichung $\Phi - X = \Psi$. Man beweise nämlich durch elementare Betrachtung, dass die Functionaldeterminante von Φ und X:

$$\Phi\frac{dX}{d\tau} - X\frac{d\Phi}{d\tau} = -5g(\tau^2 + a\tau + b)^2\left(\tau^2 + \frac{a}{5}\tau - \frac{b}{5}\right)$$

den in $\Phi - X = \Psi$ quadratisch enthaltenen Factor $(\tau^2 + e\tau + f)$ noch in erster Potenz besitzen wird. Da aber Ψ mit Φ sicher keinen linearen Factor gemeinsam hat, so kommt als notwendige Folgerung die Identität:

$$\tau^2 + e\tau + f = \tau^2 + \frac{2a}{5}\tau - \frac{b}{5},$$

welche uns $e = \frac{2a}{5}$, $f = -\frac{b}{5}$ liefert.

Mit Hülfe der so berechneten Werte e, f schreibe man jetzt die Identität $\Phi - X = \Psi$ ausführlich; sie lautet:

$$\tau^6 + 3a\tau^5 + 3(a^2+b)\tau^4 + (a^3+6ab)\tau^3 + 3(b^2+a^2b)\tau^2 + (3ab^2+1728)\tau + b^3$$
$$= (\tau^2 + c\tau + d)\left(\tau^4 + \frac{4a}{5}\tau^3 + \frac{4a^2-10b}{25}\tau^2 - \frac{4ab}{25}\tau + \frac{b^2}{25}\right).$$

In ihr müssen nun gleich hohe Potenzen rechts und links die nämlichen Coefficienten aufweisen. Vergleichen wir aber zunächst die 5ten Potenzen und die Absolutglieder, so kommt:

$$c = \frac{11a}{5}, \quad d = 25b.$$

Die vierten Potenzen liefern

---

*) Es liegt dies offenbar daran, dass unsere F_6 durch Angabe ihrer bei $J = 0, 1, \infty$ gelegenen Verzweigungspunkte bereits vollständig bestimmt ist, was man auch geometrisch leicht bestätigen kann.

$$b = \frac{a^2}{20},$$

und endlich die zweiten unter Verwertung der schon gefundenen Beziehungen:

$$a^5 = -10^5.$$

Da aber unsere Gleichung infolge der symmetrischen Auswahl von τ durchweg reelle Coefficienten besitzt, so ist notwendig $a = -10$, und damit finden sich ingesamt für die unbekannten Constanten in (2) die durchgängig rationalen Zahlwerte:

$$a = -10, \quad b = 5, \quad c = -22, \quad d = 125, \quad e = -4, \quad f = -1.$$

*Unsere gesuchte Resolvente sechsten Grades hat demnach die fertige Form**):

(3) $$J : J - 1 : 1 = (\tau^2 - 10\tau + 5)^3 : (\tau^2 - 22\tau + 125)(\tau^2 - 4\tau - 1)^2 : -1728\tau.$$

Wir bezeichnen Gleichung (3) fortan als die *functionentheoretische* Gestalt unserer Resolvente sechsten Grades und setzen ihr eine zweite *formentheoretische* Gestalt gegenüber. In der ersteren Gestalt ist nämlich die Unbekannte τ eine Modulfunction, in der letzteren wird entsprechend die Unbekannte eine Modulform sein. Wir gelangen zu ihr, indem wir vorab die Aufgabe lösen, den Hauptmodul τ als rationale Function von ζ darzustellen. Statt aber hier in die Einzelheiten der Ableitung dieser Darstellung $\tau = R(\zeta)$ einzuführen, geben wir sogleich als fertiges Resultat

(4) $$\tau = \frac{125}{\zeta^5 - \frac{1}{\zeta^5} + 11}$$

an und wollen nun umgekehrt an der rechten Seite von (4) alle wesentlichen Eigenschaften von τ nachweisen. Die rechte Seite von (4) bleibt in der That bei den zehn ζ-Substitutionen

$$\zeta' = \varepsilon^\nu \zeta, \quad \zeta' = \frac{-\varepsilon^\nu}{\zeta}, \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

unverändert, welche zufolge leichter Rechnung die unserer Γ_6 zugeordnete Untergruppe G_{10} der G_{60} bilden**). Da wir überdies in (4) eine rationale Function zehnten Grades von ζ haben, so wird dieselbe auf dem Polygon der Γ_6 einwertig sein und also einen Hauptmodul der Γ_6 abgeben. Derselbe wird, wie man aus (2) p. 613 berechnet, bei $\omega = i\infty$ zu Null, bei $\omega = 0$ aber ∞, stimmt also mit τ jedenfalls bis auf einen numerischen Factor. Dass aber letzterer mit 1 identisch

*) Cf. „Ikos." p. 111 Formel (49).

**) Man vergl. die ausführliche Angabe der 60 Ikosaedersubstitutionen in „Ikos." p. 43 Formel (32).

ist, ergiebt sich, weil die rechte und linke Seite von (4) bei $\omega = i\infty$ übereinstimmend die Annäherung $-125r$ besitzt, was man auf Grund von (3) p. 639 bez. (6) p. 614 leicht zeigt. Gleichung (4) giebt sonach in der That die richtige Darstellung von τ als Function von ζ.

Jetzt schreiben wir unter Heranziehung der Formen ζ_1, ζ_2 die Gleichung (4) in der homogenen Gestalt:

$$\tau = \frac{125\,\zeta_1^{\,6}\zeta_2^{\,6}}{\zeta_1\zeta_2(\zeta_1^{\,10} + 11\,\zeta_1^{\,5}\zeta_2^{\,5} - \zeta_2^{\,10})}.$$

Aber was hier im Nenner steht, ist nach (5) p. 622 nichts anderes, als $-\Delta^{-1}$, so dass wir für τ die merkwürdige Darstellung:

$$\tau = -125\,\zeta_1^{\,6}\zeta_2^{\,6}\Delta \tag{5}$$

gewinnen. Wir sehen: *Auch noch* $\sqrt[6]{\frac{\tau}{-\Delta}}$ *ist eine eindeutige Modulform fünfter Stufe; denn sie ist unter zweckmässiger Fixierung der sechsten Einheitswurzel mit* $\zeta_1\zeta_2\sqrt{5}$ *identisch.* Freilich gehört $\zeta_1\zeta_2\sqrt{5}$ nicht direct zur Γ_6, indem diese Grösse nämlich bei der Substitution $\zeta_1' = -\zeta_2$, $\zeta_2' = \zeta_1$ noch einen Zeichenwechsel erleidet. Jedenfalls aber gehört dieser Gruppe wieder die Modulform:

$$z = \sqrt[3]{\frac{\tau}{-\Delta}} = 5\zeta_1^{\,2}\zeta_2^{\,2} \tag{6}$$

an, und dieses z wollen wir jetzt an Stelle von τ in (3) substituieren. Vorerst setzen wir die Proportion (3) in die Gleichung um:

$$-\frac{\tau}{\Delta} = \left(\frac{\tau^2 - 10\tau + 5}{12g_2}\right)^3,$$

um aus ihr durch Ausziehen der dritten Wurzel

$$z = \frac{\tau^2 - 10\tau + 5}{12g_2}$$

zu gewinnen. Dass übrigens bei dieser letzten Operation nicht etwa eine complexe dritte Einheitswurzel als Factor der linken oder rechten Seite auftritt, zeigt man unter Rücksicht auf die Darstellung (6) von z wieder durch Annäherung an $\omega = i\infty$. Indem wir jetzt in der letzten Gleichung vollends $\tau = -z^3\Delta$ substituieren, kommt als Gleichung für z:

$$z^6 + \frac{10}{\Delta}z^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}z + \frac{5}{\Delta^2} = 0, \tag{7}$$

*womit die in Aussicht genommene formentheoretische Gestalt unserer Resolvente gewonnen ist**).

*) In „Ikos." p. 110–112 ist die Anordnung gerade umgekehrt, wie hier im Texte, indem zuerst die formentheoretische Resolvente aufgestellt und aus ihr die functionentheoretische abgeleitet wird.

Man wolle bemerken, dass die linke Seite der Gleichung (7) in den ω_1, ω_2 Homogeneität zeigt, indem nämlich jedes Glied derselben in ω_1, ω_2 von der Dimension 24 ist. In der That ist ja z Modulform vierter Dimension. Da übrigens $\sqrt[3]{\Delta}$ der Dimension (-4) angehört, so ist $x = -z\sqrt[3]{\Delta}$ von der Dimension Null und stellt also eine Modulfunction dar. Die Substitution von x statt z in die letzte Gleichung giebt die oft benutzte Gestalt unserer Resolvente:

$$x^6 - 10x^3 + \frac{12 g_3}{\sqrt[3]{\Delta}} \cdot x + 5 = 0. \tag{8}$$

Indessen gehört diese Gleichung nicht eigentlich der fünften, sondern der fünfzehnten Stufe an; wirklich ist ja auch $x = z\sqrt[3]{\Delta}$ eine Modulfunction der fünfzehnten Stufe*).

§ 9. Näheres über die Resolvente sechsten Grades. Die Frage nach ihrem Affect.

Die Gleichungen sechsten Grades des vorigen Paragraphen sind Resolventen der Ikosaedergleichung und besitzen als solche eine Galois'sche Gruppe**) sechzigster Ordnung. Wir wollen diesen Satz hier nochmals unter Zugrundelegung der formentheoretischen Resolvente

$$z^6 + \frac{10}{\Delta} z^3 - \frac{12 g_3}{\Delta^2} z + \frac{5}{\Delta^2} = 0 \tag{1}$$

ableiten und sodann eine Reihe weiterer algebraischer Überlegungen an diese besonders interessante Form unserer Resolvente knüpfen.

Wir nennen die sechs Wurzeln von (1) im Anschluss an eine schon von Galois gebrauchte Bezeichnungsweise z_∞, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, und zwar sei z_∞ der im vorigen Paragraphen schlechthin durch z bezeichnete Modul:

$$z_\infty = z(\omega_1, \omega_2) = 5\xi_1^2\xi_2^2, \tag{2}$$

während wir alsdann weiter im Anschluss an Fig. 96, p. 635:

$$z_\nu = z(-\omega_2, \omega_1 - \nu\omega_2) \tag{3}$$

schreiben. Lassen wir jetzt J in seiner Ebene irgend welche geschlossene Wege beschreiben, so kommt das darauf hinaus, dass wir auf ω irgend welche Modulsubstitutionen ausüben. Denken wir uns nun die sechs Wurzeln von (1) in die soeben schon geschriebene Anordnung gebracht und üben alsdann der formentheoretischen Gestalt von (1) ent-

*) Bei der fünften Stufe würde man übrigens bleiben, wenn man statt z die Function $x = -g_2 z$ substituiert. Es kommt dann als Resolvente (cf. „Ikos." p. 111):

$$x^6 - 10Jx^3 + 12J^2x + 5J^2 = 0.$$

**) Damit ist hier immer die Monodromiegruppe gemeint.

sprechend homogene Modulsubstitutionen aus, so ist jeder solchen eine bestimmte Permutation der $\varepsilon_\infty, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots$ zugeordnet*). Es entsprechen dabei den Substitutionen S und T die Permutationen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} S&: \varepsilon_\infty' = \varepsilon_\infty, \quad \varepsilon_\nu' = \varepsilon_{\nu-1}, \\ T&: \begin{cases} \varepsilon_\infty' = \varepsilon_0, & \varepsilon_0' = \varepsilon_\infty, & \varepsilon_2' = \varepsilon_2, \\ \varepsilon_1' = \varepsilon_4, & \varepsilon_4' = \varepsilon_1, & \varepsilon_3' = \varepsilon_3, \end{cases} \end{aligned}$$

wie man leicht zum Nachweis bringt. Da aber alle sechs ε Moduln fünfter Stufe sind und überdies in den ω_1, ω_2 gerade Dimension aufweisen, so erhalten wir insgesamt nur sechzig Permutationen, die eine aus den beiden Permutationen (4) zu erzeugende G_{60} bilden. *Diese G_{60} ist offenbar mit der Ikosaedergruppe holoedrisch isomorph und giebt uns die Galois'sche Gruppe der Gleichung* (1) *in ihrer elementaren Form als Permutationsgruppe, und zwar unter Zugrundelegung des Rationalitätsbereichs der Coefficienten von* (1). Wirklich ist jede Function der sechs Wurzeln, die ihren Wert bei den sechzig Permutationen der G_{60} nicht ändert, eine Modulform erster Stufe; als solche ist sie mit Rücksicht auf die Dimension der ε in g_2 und J, und also auch in den Coefficienten von (1) rational darstellbar, d. h. sie ist für uns rational bekannt.

Wir können hier die Frage aufwerfen, wie man bei dieser Sachlage die Eigenart der besonderen Gleichung (1) gegenüber der allgemeinen Gleichung sechsten Grades in zweckmässigster Weise charakterisieren kann, oder (um es mit dem Kronecker'schen Ausdruck zu bezeichnen) wie man den *Affect* der Gleichung (1) am einfachsten angeben kann. Wir werden hier dem allgemeinen Brauche dadurch folgen, dass wir uns mit irgend einer rationalen Function f der sechs Wurzeln versehen, die so gebildet ist, dass sie bei den sechzig Permutationen der G_{60} numerisch unverändert bleibt, bei allen übrigen Permutationen der sechs Grössen $\varepsilon_\infty, \varepsilon_0, \cdots$ indessen ihren Wert ändert. Eine derartige Function f nennen wir eine *Affectfunction* von (1) und ziehen aus dem Fundamentalsatze der Galois'schen Theorie ganz allgemein das Resultat, dass irgend eine Affectfunction von (1) in einer particulär gewählten und übrigens den symmetrischen Functionen der sechs Wurzeln rational ist. Gegenwärtig wäre alsdann ein solches f gegenüber der Gesamtgruppe aller 6! Permutationen der ε noch eine $\frac{6!}{60} = 12$-wertige Function und würde als solche einer Gleichung zwölften Grades genügen, deren Coefficienten sich aus den symmetrischen Functionen der ε

*) Will man übrigens lieber bei den nicht-homogenen Substitutionen bleiben, so kann man auch an Stelle von (1) die auf der vorigen Seite unter dem Texte mitgeteilte Form der Resolvente zu Grunde legen.

rational aufbauen. Übrigens kann es vielleicht zweckmässig sein, statt einer einzelnen solchen Affectfunction mehrere rationale Functionen f, f', $\cdots$, der sechs Wurzeln zu setzen, die insgesamt gerade wieder bei jenen 60 Permutationen und nur bei diesen numerisch unverändert bleiben, während die einzelne Function vielleicht auch noch darüber hinaus bei anderen Permutationen der z ihren Wert nicht ändert; man bemerkt leicht, dass ein solches System f, f', $\cdots$, die einzelne Affectfunction zu ersetzen vermag. *Den Affect von* (1) *werden wir also dadurch in kürzester Weise fixieren können, dass wir irgend eine einzelne Affectfunction f oder ein solches Affectfunctions-System wirklich angeben.*

Es wäre nun nicht schwer, für die Gleichung (1) eine einzelne Affectfunction auf directem Wege aufzubauen; das betreffende Verfahren würde aber für ähnlich gebaute höhere Gleichungen, mit denen wir später zu thun haben, nicht mehr anwendbar sein. Wir wollen demnach zur Erledigung unserer Frage noch andere Mittel heranziehen und erinnern uns zu diesem Ende mit Vorteil des Umstandes, dass unsere Resolvente (1) eine besondere Ausdrucksform für ein ternäres Formenproblem, nämlich das „Problem der A" ist, welches letztere in „Ikos." II Kap. 4 in ausgiebiger Weise betrachtet worden ist. Besagte Formen A müssen wir demnach vorab in Erinnerung bringen. Dieser Schritt bringt es denn freilich mit sich, dass wir an Stelle der Gleichung sechsten Grades für z vielmehr die Gleichung zwölften Grades der Betrachtung zu Grunde legen werden, der $\sqrt{z}$ genügt. Wir werden sogleich bemerken, dass auch diese eine Resolvente der Ikosaedergleichung ist.

§ 10. Das Modulsystem der A. Affect der Resolvente zwölften Grades.

Nach Massgabe von „Ikos." II, 4 (p. 211 u. f.) bezeichnen wir die drei quadratischen Verbindungen der Formen ξ_1, ξ_2 in der folgenden Art:

$$A_0 = -\xi_1\xi_2, \quad A_1 = \xi_2^2, \quad A_2 = -\xi_1^2. \tag{1}$$

In diesen A_0, A_1, A_2 haben wir drei Modulformen fünfter Stufe zweiter Dimension gewonnen, die ihrerseits den Hauptmodul ζ in der Gestalt:

$$\zeta = -\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_2}{A_0} \tag{2}$$

darstellen. Zwischen den A besteht offenbar die Relation

$$A_0^2 + A_1A_2 = 0, \tag{3}$$

welche man, wenn man will, als homogen geschriebene Gleichung eines Kegelschnitts auffassen kann; dieser letztere ist alsdann im Sinne unserer allgemeinen Entwicklungen p. 591 wechselweise eindeutig auf das Polygon der Hauptcongruenzgruppe fünfter Stufe bezogen.

Das Verhalten der A bei Ausübung homogener Modulsubstitutionen berechnen wir ohne weiteres aus dem entsprechenden Verhalten der ξ_1, ξ_2. Wir finden, dass sich die A ternär homogen substituieren, und erhalten insbesondere für die Operationen S und T aus (7) p. 620 die nachfolgenden Substitutionen (cf. „Ikos." p. 213, Formel (4)):

$$(4)\qquad \begin{cases} S: & A_0' = A_0, \quad A_1' = \varepsilon^4 A_1, \quad A_2' = \varepsilon A_2, \\ T: & \begin{cases} \sqrt{5}A_0' = A_0 + A_1 + A_2, \\ \sqrt{5}A_1' = 2A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_1 + (\varepsilon + \varepsilon^4)A_2, \\ \sqrt{5}A_2' = 2A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)A_1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_2. \end{cases} \end{cases}$$

Durch Wiederholung und Combination dieser Substitutionen erhalten wir eine mit der Ikosaedergruppe holoedrisch isomorphe G_{60} ternärer A-Substitutionen, deren vollständige Aufstellung keine Schwierigkeiten haben würde. Als besonders bemerkenswerten Umstand nennen wir noch, dass die A infolge ihrer geraden Dimension insgesamt nur 60 Substitutionen bilden, im Gegensatze zu den Formen ξ_1, ξ_2, welche als solche der ersten Dimension eine *homogene* Ikosaedergruppe G_{120} herstellen.

Indem wir die drei Ikosaederformen H, T, f derart schreiben, dass sie sich ganz und rational aus den quadratischen Verbindungen der ξ_1, ξ_2 aufbauen, können wir sie ohne weiteres als ganze homogene Functionen der Grade 10 bez. 15 und 6 in den A darstellen und gewinnen dann an Stelle der Formeln (5) p. 622 das System der drei Gleichungen:

$$(5)\qquad \Phi(A_0, A_1, A_2) = -\frac{12 g_2}{\Delta^2}, \quad \Psi(A_0, A_1, A_2) = \frac{216 g_3}{\Delta^3},$$
$$X(A_0, A_1, A_2) = -\frac{1}{\Delta},$$

wo linker Hand die drei in Rede stehenden Formen gemeint sind. Dieselben verhalten sich gegenüber den Operationen (4), nötigenfalls unter Benutzung der Identität (3), invariant und lassen sich eben infolge dieser Identität in eine grosse Reihe verschiedener Gestalten umsetzen*). Man denke sich jetzt die drei Formen Φ, Ψ, X mit Rücksicht auf die zwischen ihnen bestehende Relation:

$$\Phi^3 + \Psi^2 + 1728 X^5 = 0$$

*) Man sehe z. B. die in „Ikos." p. 215 mitgeteilten Formen C', D, B', welche bis auf numerische Factoren (unter Obacht auf (3)) mit den Formen Φ, Ψ, X identisch sind. Die Formen C', D, B' haben indes noch eine weitergehende Bedeutung: sie verhalten sich gegenüber den Substitutionen (4) invariant, auch ohne dass man das Bestehen der Identität (3) voraussetzt. Auf die in diesem Umstande liegende Verallgemeinerung können wir an dieser Stelle nicht eingehen.

beliebig gewählt und verlange dann die zugehörigen, Gleichung (3) befriedigenden Wertsysteme A_0, A_1, A_2 zu berechnen. Das so gestellte Problem sechzigsten Grades werden wir als *das Formenproblem der* A bezeichnen und erkennen dessen Galois'schen Charakter äusserlich daran, dass sich alle sechzig Lösungssysteme A_0, A_1, A_2 in einem unter ihnen vermöge der aus (4) entspringenden Substitutionen linear darstellen.

Nun ist die Sachlage die, dass unser soeben formuliertes Problem der A die Gleichung sechsten Grades (1) p. 641 oder, was einfacher ist, die Gleichung zwölften Grades:

$$(6) \qquad (\sqrt{z})^{12} + \frac{10}{\Delta}(\sqrt{z})^6 - \frac{12 g_2}{\Delta^2}(\sqrt{z})^2 + \frac{5}{\Delta^2} = 0,$$

welcher $\sqrt{z}$ genügt*), zur Resolvente hat. *In der That gestatten die Quadratwurzeln aus den z in den* A_0, A_1, A_2 *eine sehr elegante Darstellung*, die aus den Formeln (6) p. 640 und (3) p. 641 mit Rücksicht auf das Verhalten der A bei S und T entspringt:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \sqrt{z_\infty} &= -\sqrt{5}A_0, \\ \sqrt{z_\nu} &= A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{4\nu} A_2 **), \end{aligned}$$

und andrerseits erweisen sich auch die Coefficienten von (6) als rationale Functionen der beim Probleme der A bekannten Grössen Φ, X. Beiläufig bemerken wir, dass das in (7) auftretende Schema von Jacobi allgemein für $(n+1)$ Grössen formuliert wurde (unter n eine ungerade Primzahl verstanden), und dass man daher nach dem Vorschlage Brioschi's, Gleichungen der hier auftretenden Art Jacobi'sche Gleichungen nennt***).

Um jetzt den Affect der Gleichung (6) äusserlich erkennbar festzulegen, haben wir einfach auf das Problem der A Bezug zu nehmen. Aus den Relationen (7) berechnen wir uns

$$(8) \qquad \begin{aligned} 5A_0 &= -\sqrt{5}\sqrt{z_\infty}, \\ 5A_1 = \sum_{\nu=0}^{4} \varepsilon^{-\nu}\sqrt{z_\nu}, &\quad 5A_2 = \sum_{\nu=0}^{4} \varepsilon^{\nu}\sqrt{z_\nu}, \end{aligned}$$

während andrerseits aus den nämlichen Relationen auch noch folgt:

*) Dieselbe gehört, wie man sich durch (6) p. 640 leicht überzeugen kann, zu denjenigen sechs Γ_{12}, die den sechs cyclischen G_5 innerhalb der G_{60} entsprechen.

**) Der Fortgang von z zu $\sqrt{z}$ erfordert die Auswahl des zunächst fraglichen Vorzeichens. Wie dasselbe für die in den Formeln (7) aufgenommenen Modulformen $\sqrt{z}$ fixiert ist, geht aus den rechten Seiten dieser Formeln hervor.

***) Man vergl. übrigens „Ikos." p. 147, 150.

$$\sqrt{5}\sqrt{z_\infty} + \sum_\nu \sqrt{z_\nu} = 0,$$

(9)

$$\sum_\nu \varepsilon^{2\nu}\sqrt{z_\nu} = 0, \quad \sum_\nu \varepsilon^{3\nu}\sqrt{z_\nu} = 0.$$

Hier schliessen wir aus (8), dass nicht nur Φ und X, sondern auch Ψ rational in den $\sqrt{z}$ ist, und wir denken uns neben den Coefficienten von (6) auch den Wert von Ψ, der aus diesen Coefficienten nur erst durch eine Quadratwurzel zu berechnen ist, ausdrücklich gegeben. *In dem so fixierten Rationalitätsbereich werden alsdann die linken Seiten von* (9) *für unsere Gleichung zwölften Grades ein Affectfunctions-System bilden.* In der That sind die linken Seiten von (9), ohne in den Wurzeln von (6) symmetrisch zu sein, rational bekannt, indem sie in einfachster Weise den Wert Null haben. Sie genügen aber auch, um den Affect festzulegen. Denn nehmen wir die Gleichungen (9) als bestehend an, so definieren die Formeln (8) drei, die Identität (3) p. 643 erfüllende Grössen A_0, A_1, A_2, für welche wir dann umgekehrt aus unserer Gleichung (6) und dem adjungierten Werte Ψ das „Problem der A" formulieren können. Aber dieses Problem hat nur 60 Lösungen, und dem geht es, wie wir hier nicht noch ins einzelne darlegen wollen, parallel, dass die linken Seiten von (9) insgesamt nur bei gewissen 60 Permutationen der $\sqrt{z}$ ihren Wert nicht ändern, eben denjenigen, welche die Galois'sche Gruppe von (6) abgeben.

§ 11. Die fünf gleichberechtigten Γ_5 der fünften Stufe und die zugehörige Fläche F_5*).

Nach dem p. 489 formulierten Galois'schen Satze giebt es bei $q = 5$ als Congruenzgruppen von niederstem Index fünf gleichberechtigte Γ_5, welche den fünf gleichberechtigten Tetraedergruppen G_{12} innerhalb der Ikosaedergruppe G_{60} zugeordnet sind. Wir wollen diese Gruppen jetzt des näheren untersuchen, um die ihnen entsprechende Resolvente fünften Grades der Ikosaedergleichung wiederum auf functionentheoretisch-geometrischem Wege aufzustellen.

Sei Γ_5 eine einzelne unter den fraglichen Gruppen, G_{12} aber die ihr entsprechende Untergruppe der G_{60}. In dieser G_{12} ist alsdann sicher die G_5 der fünf Substitutionen $1, S, S^2, S^3, S^4$ nicht enthalten, und wir entnehmen daraus ohne weiteres, dass unter den fünf Doppeldreiecken $1, S, S^2, S^3, S^4$ keine zwei bezüglich der Γ_5 äquivalent sind.

*) Diesem und dem folgenden Paragraphen liegt die Arbeit von Klein, *Über die Erniedrigung der Modulargleichungen*, Math. Ann. Bd. 14 (1878) zu Grunde.

Da aber für die Γ_5 insgesamt nur fünf inäquivalente Doppeldreiecke existieren, so folgt, dass wir ein Fundamentalpolygon für die Γ_5 aus diesen fünf Doppeldreiecken aufbauen können. Statt ihrer können wir aber auch die Doppeldreiecke S^{-2}, S^{-1}, 1, S, S^2 wählen, wie solches in Fig. 98 geschehen ist, wo diese Dreiecke dann mit den Nummern 1 bis 5 versehen sind.

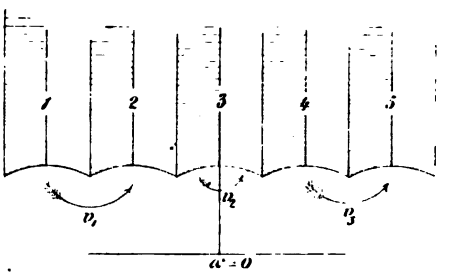


Fig. 98.

Hier werden nun jedenfalls die beiden geraden Randcurven, welche Fig. 98 nach rechts und links hin abschliessen, einander zuzuordnen sein; denn sie correspondieren durch die Substitution S^5. Es fragt sich nun weiter, wie die zehn unteren freien Elementardreiecksseiten der Fig. 98 einander zuzuordnen sind. Ohne hier in die Einzelheiten der Untersuchung einzuführen, constatieren wir sogleich, dass die in Fig. 98 angedeutete Zuordnung jedenfalls zu einer unserer Γ_5 führt. Erstlich nämlich lässt sich das Polygon Fig. 98 durch Zusammenbiegen auf einander bezogener Randcurven in eine einfach bedeckte Ebene verwandeln, deren in Fig. 99 gegebene Einteilung, wie man sich überzeugen wolle, den Bedingungen des Verzweigungssatzes vollständig genügt. Es definiert also das Polygon Fig. 98 eine Γ_5 und zwar eine solche der fünften Classe, wie man an der Zahl der bei $\omega = i\infty$ zusammenhängenden Dreiecke sieht. Aber eine Untergruppe fünfter Classe ist nach bekannten Sätzen des vorigen Abschnitts notwendig eine Congruenzgruppe fünfter Stufe, und da giebt es als zum Index 5 gehörig nur die eine Art unserer fünf gleichberechtigten Γ_5. *Fig. 98 stellt uns also wirklich das Polygon, Fig. 99 die geschlossene Fläche F_5 einer unserer Γ_5 dar.* Die Polygone der übrigen vier Γ_5 gewinnen wir einfach dadurch, dass wir in Fig. 98 nicht das Dreieck 3, sondern der Reihe nach die Dreiecke 1, 2, 4, 5 als Ausgangsdreieck der Modulteilung ansehen*).

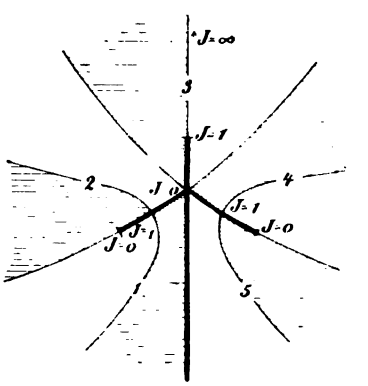


Fig. 99.

*) Es entspringt zugleich aus der Überlegung des Textes, dass sich die Randcurven der Fig. 98 in anderen als den hiermit zur Geltung gekommenen

Dieses Resultat kann man übrigens rein rechnerisch in folgender Weise bestätigen. Die Erzeugenden der zunächst betrachteten Γ_5 sind neben S^5 die drei in Fig. 98 durch v_1, v_2, v_3 bezeichneten Substitutionen. Wir berechnen für deren Gestalt sehr leicht:

$$(1) \qquad v_1(\omega) = \frac{\omega + 3}{-\omega - 2}, \quad v_2(\omega) = \frac{-1}{\omega}, \quad v_3(\omega) = \frac{2\omega - 3}{\omega - 1}.$$

Hier befriedigen v_1, v_2 die Congruenzen:

$$v_1^3 \equiv 1, \quad v_2^2 \equiv 1, \quad (v_1 v_2)^5 \equiv 1, \ (\text{mod. } 5),$$

erzeugen also, modulo 5 betrachtet, eine Tetraedergruppe G_{12}. Dieser G_{12} gehört dann aber auch die Operation v_3 an, denn wir berechnen sofort, dass modulo 5 die Congruenz $v_3 \equiv v_1^2 v_2$ besteht.

Die Verzweigung der unseren Γ_5 zugehörigen fünfblättrigen Fläche F_5 über der J-Ebene liegt in Fig. 99 offen vor Augen. Wir stellen die Lage und Art der Verzweigungspunkte hier zum Schlusse ausführlich zusammen: *Bei $J = 1$ verläuft ein Blatt der F_5 isoliert, die vier anderen sind zu Paaren in zwei Verzweigungspunkten mit einander verbunden; bei $J = 0$ verlaufen zwei Blätter isoliert, während die übrigen drei in einem Verzweigungspunkte cyclisch zusammenhängen; bei $J = \infty$ hängen alle fünf Blätter in einem Verzweigungspunkte cyclisch zusammen.* Diese Sätze werden wir sogleich zur Verwendung zu bringen haben.

§ 12. Aufstellung der Resolvente fünften Grades.

Die Gewinnung der Resolvente fünften Grades geschieht jetzt in ganz ähnlicher Weise, wie diejenige der Resolvente sechsten Grades in § 8. Die durch Fig. 98 definierte Γ_5 ist vom Geschlechte $p = 0$, besitzt also einen Hauptmodul, den wir τ nennen wollen. Wir werden denselben jedenfalls so fixieren, dass die verticale Symmetrielinie der Fig. 99 die reelle τ-Axe wird. Solches trifft zu, wenn wir in den drei Punkten $\omega = i$, ϱ, $i\infty$ für $\tau(\omega)$ die Werte:

$$(1) \qquad \tau(i) = 0, \quad \tau(\varrho) = 3, \quad \tau(i\infty) = \infty$$

festsetzen.

Indem dann wieder τ mit J durch eine Relation der Form (7) p. 592 verbunden ist, specificieren wir auf Grund der Angaben am Schlusse des vorigen Paragraphen diese Relation zu dem Ansatze:

Arten nicht zuordnen lassen, wofern wir mit dem Verzweigungssatz in Übereinstimmung bleiben wollen. Damit begründet sich dann wieder die Thatsache, dass die sogleich zu berechnende Resolvente fünften Grades nach Auswahl des Hauptmoduls durch die blosse Angabe der Verzweigungspunkte der $F_5^{(J)}$ bereits eindeutig bestimmt ist.

(2) $J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + a\tau + b)(\tau - 3)^3 : \tau(\tau^2 + c\tau + d)^2 : e,$

wobei a, b, c, d, e noch zu bestimmende numerische Coefficienten sind. Zur Auswertung derselben berechnen wir uns die Functionaldeterminante von X und Ψ, welche hier in einfachster Weise:

(3) $$e\frac{d\Psi}{d\tau} = 5e(\tau^2 + c\tau + d)\left(\tau^2 + \frac{3c}{5}\tau + \frac{d}{5}\right)$$

wird. Auf Grund der Identität $\Phi = \Psi + X$ finden wir durch elementare Überlegung, dass (3) den cubischen Factor von Φ noch quadratisch enthalten wird. Da aber Φ und Ψ jedenfalls keine Linearfactoren gemeinsam haben können, so entspringt aus der gerade gegebenen Überlegung die Identität:

$$\tau^2 + \frac{3c}{5}\tau + \frac{d}{5} = (\tau - 3)^2,$$

so dass wir $c = -10$, $d = 45$ finden. Des weiteren wird die Functionaldeterminante

$$X\frac{d\Phi}{d\tau} - \Phi\frac{dX}{d\tau} = 5e(\tau - 3)^2\left(\tau^2 + \frac{4a - 6}{5}\tau + \frac{3b - 3a}{5}\right)$$

den quadratischen Factor $(\tau^2 - 10\tau + 45)$ von Ψ noch linear enthalten, woraus man sofort die Identität

$$\tau^2 + \frac{4a - 6}{5}\tau + \frac{3b - 3a}{5} = \tau^2 - 10\tau + 45$$

zieht. Der Vergleich der Coefficienten giebt $a = -11$, $b = 64$, während wir endlich für e den Wert

$$e = \Phi(0) - \Psi(0) = -1728$$

finden. *Die einfachste functionentheoretische Gestalt der Resolvente fünften Grades ist demnach in fertig ausgerechneter Form**):

(4) $J : J - 1 : 1 = (\tau^2 - 11\tau + 64)(\tau - 3)^3 : \tau(\tau^2 - 10\tau + 45)^2 : -1728.$

Um eine formentheoretische Gestalt für die Resolvente fünften Grades zu gewinnen, ziehen wir zuvörderst aus der Proportion (4) die Gleichung:

$$\frac{1728 \cdot 27 g_3^2}{-\Delta} = \tau(\tau^2 - 10\tau + 45)^2$$

und führen sodann die Modulform fünfter Stufe sechster Dimension:

(5) $$z = \sqrt{\frac{\tau}{-\Delta}} = \frac{6^3 g_3}{\Delta(\tau^2 - 10\tau + 45)}$$

ein, wobei das zunächst fragliche Vorzeichen von z durch den rechter

*) Cf. „Ikos." p. 102 Formel (21), wo die hier mit τ bezeichnete Grösse r genannt ist. Über die Darstellung derselben in ζ sehe man „Ikos." p. 103 u. f. Ebendaselbst sind noch zahlreiche andere Formen der Resolvente fünften Grades berechnet.

Hand stehenden Ausdruck dieses Moduls eindeutig bestimmt ist. Indem man durchgehends τ durch z ersetzt, *kommt als formentheoretische Gestalt der Resolvente**):

$$(6) \qquad z^5 + \frac{10}{\Delta} z^3 + \frac{45}{\Delta^2} z - \frac{216 g_3}{\Delta^3} = 0.$$

Noch andere einfache Gestalten für die in Rede stehende Resolvente erhalten wir durch die Substitution $x = z\sqrt{-\Delta}$, wobei

$$(7) \qquad x^5 - 10x^3 + 45x + \frac{216 g_3}{\sqrt{-\Delta}} = 0$$

entspringt (die eigentlich der zehnten Stufe angehört), oder auch durch die Substitution $y = 3g_3 z$, wodurch wir erhalten:

$$(8) \qquad 3y^5 + 10(J-1)y^3 + 15(J-1)^2 y - 8(J-1)^3 = 0.$$

Wir haben hier in einer Reihe verschiedener Formen eine Gleichung fünften Grades mit einer Monodromiegruppe sechzigster Ordnung kennen gelernt. Diese Gruppe wird sich als Permutationsgruppe der fünf Wurzeln aus den sechzig geraden Vertauschungen derselben zusammensetzen. Als Affectfunction könnten wir daher gegenwärtig in einfachster Weise das Differenzenproduct der Wurzeln vorlegen, und thatsächlich ist dasselbe rational bekannt, nämlich rational in g_2 und g_3 darstellbar. Man vergleiche darüber die Entwicklungen in „Ikos." p. 108 und 109, wo sich für drei verschiedene Gestalten der Resolvente das fragliche Differenzenproduct rational in den bekannten Grössen berechnet findet.

Hiermit sind die beiden interessantesten Resolventen für das zur fünften Stufe gehörende Problem sechzigsten Grades zur Besprechung gelangt. Die so gegebenen Entwicklungen müssen nun überhaupt zur Charakterisierung der ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechtes $p = 0$ hinreichend sein.

---

*) Vergl. „Ikos." p. 105 Formel (27).

Fünftes Kapitel.

Über Modulfunctionen, die sich aus den Galois'schen Hauptmoduln herstellen lassen.*)

Im Anschluss an die voraufgehend entworfene Theorie der Galois'schen Hauptmoduln lässt sich jetzt eine ganze Reihe weiterer Untergruppen functionentheoretisch behandeln, indem sich nämlich deren Moduln teils durch einfache Operationen aus den Galois'schen Hauptmoduln herstellen, teils aber mit Hülfe der bei den Galois'schen Hauptmoduln zu Tage getretenen Gesetze explicite leicht gewinnen lassen. Hierfür werden wir im Laufe des gegenwärtigen Kapitels eine Anzahl von Beispielen kennen lernen. Bei der Auswahl derselben ist erstlich die Absicht massgeblich, für den hyperelliptischen, sowie elliptischen Fall ausführliche Untersuchungen beizubringen, und wir erledigen in diesem Sinne am Anfang des Kapitels die beiden ausgezeichneten Untergruppen Γ_{48} und Γ_{120}, welche nach p. 607 zu hyperelliptischen Flächen führen, während der Abschluss des Kapitels einer zusammenhängenden Untersuchung der zu $p = 1$ gehörenden ausgezeichneten Γ_{72} gewidmet ist. Auf der anderen Seite müssen wir hier auf diejenigen Modulfunctionen zu sprechen kommen, welche seit langer Zeit in der Theorie der elliptischen Functionen betrachtet worden sind. Dieselben gehören im Sinne unserer Ausdrucksweise zu den Stufen 4, 8, 16; inzwischen ist es aus Gründen der Darstellung zweckmässig, die Behandlung dieser Moduln vor der Untersuchung der zur Stufe 6 gehörenden Γ_{72} vorweg zu nehmen. Wir kommen auf die in Rede stehenden Grössen demnach sogleich nach Erledigung der hyperelliptischen Fälle zu sprechen.

§ 1. Die zu hyperelliptischen Gebilden führenden ausgezeichneten Γ_{48} und Γ_{120}.

Im vorletzten Kapitel (p. 607) haben wir gesehen, dass es unter allen ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ der Modulgruppe höchstens zwei

*) Die Entwicklungen des gegenwärtigen Kapitels sind, soweit nichts anderes angegeben ist, aus älteren Untersuchungen des Herausgebers hervorgegangen.

geben kann, deren zugehörige Modulfunctionen ein hyperelliptisches Gebilde abgeben. Die erste unter ihnen war eine zur achten Classe gehörende Γ_{48}, und wir wollen jetzt untersuchen, ob denn eine solche Gruppe wirklich existiert.

Als die zu den Modulformen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension μ_3, μ_4 gehörende Gruppe lernten wir diejenige homogene ausgezeichnete Congruenzgruppe achter Stufe kennen, welche sich modulo 8 genommen auf die unter (16) p. 633 gegebenen Substitutionen reducierte. Wie man sieht, enthält diese homogene Γ_{48} die Operation T^2, so dass ihr in der nicht-homogenen Modulgruppe Γ eine Untergruppe Γ_{48} achter Stufe von dem nämlichen Index 48 zugeordnet ist. Die so gewonnene ausgezeichnete nicht-homogene Congruenzgruppe achter Stufe besteht aus allen modulo 8 mit:

$$(1) \qquad \begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, 4\\4, 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5, 4\\0, 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5, 0\\4, 5\end{pmatrix}$$

congruenten Substitutionen und gehört, wie man sofort berechnet, zum Geschlechte $p = 2$, so dass für sie der hyperelliptische Fall thatsächlich vorliegt.

Die in Rede stehende Γ_{48} ist in der Hauptcongruenzgruppe vierter Stufe als Untergruppe vom Index zwei enthalten, und es wird sich demgemäss umgekehrt das Polygon F_{48} der Γ_{48} aus zwei Polygonen der eben gemeinten Γ_{24} aufbauen lassen. Thatsächlich erhalten wir ein F_{48}, indem wir an dem in Fig. 82 (p. 355) angegebenen Dreieckscomplex einen völlig gleichen nach rechts hin anlagern und dessen untere Randcurven nach dem Gesetze*):

$$(\nu - \tfrac{1}{2}, \nu) - (\nu + 4, \nu + \tfrac{9}{2}),\ (\nu, \nu + \tfrac{1}{2}) - (\nu + \tfrac{7}{2}, \nu + 4);$$
$$\nu = 0, 1, 2, 3$$

zusammenordnen. Man rechnet nämlich leicht aus, dass die dieser Zuordnung entsprechenden erzeugenden Substitutionen modulo 8 alle zu den Typen (1) gehören. Dem Aufbau des Polygons F_{48} aus zwei Polygonen F_{24} vierter Stufe entspricht nun weiter der Umstand, dass wir die geschlossene Fläche F_{48} in einfachster Weise durch doppelte Überdeckung der oktaedrisch geteilten Kugel erzielen können. Beide Blätter werden dabei, damit $p = 2$ wird, in sechs Verzweigungspunkten zusammenhängen, und man bemerkt sofort, dass diese nirgendwo anders als in den sechs Ecken des Oktaeders gelegen sein können.

---

*) Wir benutzen hier wieder die schon p. 368 u. f. zur Geltung gekommene Schreibweise.

Die functionentheoretische Behandlung der Γ_{48} erledigt sich hiernach fast von selbst. Als zweiwertige Function der F_{48} werden wir etwa den Hauptmodul μ des vorigen Kapitels heranziehen, der dann in den sechs eben genannten Verzweigungspunkten die Werte $0, \infty, \pm 1, \pm i$ besitzt. Wir schliessen nach p. 571 ohne weiteres: *Die beiden Grössen*:

$$\mu, \quad \sqrt{\mu(\mu^4 - 1)} \tag{2}$$

bilden ein volles Modulsystem der Γ_{48}*). Gegenüber den Substitutionen der zur Γ_{48} gehörenden endlichen G_{48} erfährt μ nur 24 lineare Substitutionen (in Übereinstimmung mit dem hierauf bezüglichen Satze p. 606). Es verdient demgegenüber bemerkt zu werden, dass wir in

$$\mu_3 = \mu_1 \sqrt[4]{\Delta}, \quad \mu_4 = \mu_2 \sqrt[4]{\Delta} \tag{3}$$

zwei zur Γ_{48} gehörende Modulformen besitzen, *welche eine mit der nichthomogenen G_{48} holoedrisch isomorphe Gruppe von 48 binären Substitutionen erleiden.* Denselben einfachen Charakter hat demgemäss auch das System der beiden Modulfunctionen der Γ_{48}:

$$\mu_5 = \frac{\mu_3 g_2}{g_3}, \quad \mu_6 = \frac{\mu_4 g_2}{g_3};$$

in ihnen haben wir dann wieder ein volles Modulsystem der Γ_{48}, indem sich in der That die beiden Grössen (2) ohne Mühe in der nachfolgenden Gestalt rational durch μ_5 und μ_6 ausdrücken lassen:

$$\mu = \frac{\mu_5}{\mu_6}, \quad \sqrt{\mu(\mu^4 - 1)} = \frac{\mu_6}{9\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu^{12} - 33\mu^8 - 33\mu^4 + 1}{\mu^8 + 14\mu^4 + 1}.$$

Die Γ_{48} ist die erste von uns ausführlich betrachtete Gruppe eines Geschlechtes $p > 0$; wir ergreifen die Gelegenheit, die beiden ihr zugehörigen Integrale erster Gattung gleichfalls explicite in die Untersuchung einzuführen. Unter Aufnahme eines geeigneten Zahlenfactors schreiben wir dieselben nach p. 571 in der Gestalt:

$$j_1(\omega) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu(\mu^4 - 1)}}, \quad j_2(\omega) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\mu}{\sqrt{\mu(\mu^4 - 1)}},$$

die wir jetzt noch in eine sehr viel elegantere Form umsetzen werden. Zuvörderst berechnen wir nämlich aus (1), p. 618 unter Gebrauch von (3) für das Differential $d\mu$ die Darstellung:

$$d\mu = \frac{\omega_2^3 d\omega}{4\pi i \mu_2^3} = \frac{-\sqrt{\Delta}(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1)}{4\pi i \mu_4^2}.$$

*) Ein mehr symmetrisch gebautes volles System der Γ_{48} hat man, wie wir nebenbei bemerken, in den beiden Grössen $\mu_1^2\mu_2 \cdot \sqrt[4]{\Delta}$, $\mu_1\mu_2^2 \cdot \sqrt[4]{\Delta}$.

Dabei ist das Differential $\omega_2^2 d\omega$ rechter Hand durch $-(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1)$ ersetzt, eine Schreibweise von $\omega_2^2 d\omega$, bei der die Invarianz dieses Ausdrucks gegenüber der Anwendung von homogenen Modulsubstitutionen unmittelbar evident ist. Andrerseits zieht man aus (15) p. 633 ohne weiteres:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu(\mu^4-1)}} = \frac{\mu_4^3}{\sqrt{2\Delta}},$$

so dass die beiden Integrale der Γ_{48} die Gestalt annehmen:

$$(4)\quad j_1 = \frac{3}{16\pi i}\int \mu_3(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1),\quad j_2 = \frac{3}{16\pi i}\int \mu_4(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1).$$

Die in die Integrale aufgenommenen Zahlenfactoren sind so abgeglichen, dass die Coefficienten der ersten Glieder in den Reihenentwicklungen von j_1, j_2 nach $r^{\frac{1}{8}}$ möglichst einfach werden. In der That finden wir durch Verwendung von (6) p. 614 als bei $\omega = i\infty$ gültig:

$$(5)\qquad j_1 = 3r^{\frac{1}{8}} + \cdots,\quad j_2 = 2r^{\frac{3}{8}} + \cdots.$$

Mit Hülfe dieser Formeln können wir übrigens auch direct den Beweis führen, dass die beiden unter (4) gegebenen Integrale j_1 und j_2 im Polygon der Γ_{48} allenthalben endlich sind, und wir gehen auf den dabei durchzuführenden Gedankengang um so lieber ein, als wir denselben späterhin bei ähnlichen Gelegenheiten noch wiederholt zu verwenden haben. Man bemerke zunächst, dass die auf den rechten Seiten von (4) stehenden Modulfunctionen zufolge ihrer Bauart sicher nicht im Innern des Polygons, sondern höchstens noch in dessen Spitzen unstetig werden können. In der bei $\omega = i\infty$ gelegenen Spitze bleiben sie aber zufolge (5) offenbar endlich. Wollen wir dann weiter in $\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$ untersuchen, so bemerken wir, dass zufolge der linearen Reproduction der μ_3, μ_4 gegenüber den Modulsubstitutionen $j_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ eine lineare ganze Function:

$$j_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = Aj_1(\omega) + Bj_2(\omega) + C$$

der beiden Grössen (4) mit von ω unabhängigen endlichen Coefficienten A, B, C ist. Der Wert von $j_1\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ ist sonach C d. i. endlich, und wir finden ein analoges Resultat sofort auch für $j_2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$. Die Functionen (4) erweisen sich demnach thatsächlich im ganzen Polygon F_{48} als endlich.

Sehr viel kürzer werden wir jetzt den zweiten unter den ausgezeichneten Untergruppen Γ_μ vorkommenden hyperelliptischen Fall erledigen können. Diesem Falle sollte eine Γ_{120} zu Grunde liegen, die zur Classe 10 gehört und deshalb ein Geschlecht $p = 5$ besitzen würde. Es giebt nun in der That eine ausgezeichnete Congruenzgruppe zehnter Stufe Γ_{120}, welche alle modulo 10 mit

$$\text{(6)} \qquad \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 5\\ 5, & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6, & 5\\ 5, & 1\end{pmatrix}$$

congruenten Substitutionen umfasst und sonach in der Hauptcongruenzgruppe fünfter Stufe als Untergruppe vom Index zwei enthalten ist. Letzterem Umstande zufolge lässt sich das Polygon F_{120} der Γ_{120} aus dem in Fig. 83 (p. 355) gegebenen Dreieckscomplex wieder durch Verdoppelung desselben unter geeigneter Änderung des Kantenzusammenhanges herstellen, während sich die bezügliche geschlossene Fläche als doppelt überdeckte ikosaedrisch geteilte Kugel anordnen lässt, wobei die zwölf Verzweigungspunkte offenbar die zwölf Ecken des Ikosaeders sind.

Dass wir hier eine hyperelliptische Fläche haben, ist sofort evident. Ersichtlich ist ja auf derselben ζ eine zweiwertige Function, und wir gewinnen ohne weiteres den Satz: *Die beiden Grössen:*

$$\text{(7)} \qquad \zeta,\ \sqrt{\zeta(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1)}$$

bilden ein volles Modulsystem der ausgezeichneten Γ_{120}. Mag es genügen, wenn wir im Anschluss hieran nur noch die zugehörigen fünf Integrale erster Gattung aufstellen. Wir schreiben dieselben:

$$j_\alpha = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\int \frac{\zeta^\alpha\, d\zeta}{\sqrt{\zeta\,(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1)}},\quad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

und wollen dieselben einer ähnlichen Transformation unterziehen, wie vorhin die Integrale der Γ_{48}. Wir finden aus den bezüglichen Formeln des vorigen Kapitels:

$$d\zeta = \frac{\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1}{10\pi i \zeta_2^{\,2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta\,(\zeta^{10} + 11\zeta^5 - 1)}} = i\zeta_2^{\,6}\sqrt{\Delta},$$

und also kommt für die Integrale die neue Gestalt:

$$\text{(8)} \qquad j_\alpha(\omega) = \frac{2\alpha + 1}{20\pi}\int \zeta_1^\alpha \zeta_2^{4-\alpha} \cdot \sqrt{\Delta} \cdot (\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1).$$

Die numerischen Factoren sind hier wieder so gewählt, dass die ersten

Coefficienten der Reihenentwicklungen nach $r^{\frac{1}{10}}$ möglichst einfach ausfallen; wir haben nämlich als bei $\omega = i\infty$ gültig:

$$j_\alpha = r^{\frac{2\alpha+1}{10}} + \cdots .$$

Dass wir hieran wieder einen directen Beweis für die durchgängige Endlichkeit unserer Grössen im Polygon F_{120} knüpfen könnten, brauchen wir kaum noch hinzuzusetzen*).

§ 2. Die eindeutigen Modulfunctionen $\sqrt[n]{\lambda}$, $\sqrt[n]{1-\lambda}$ u. s. w.

Eine wesentlich anders geartete Kette von Untersuchungen, die sich durch die nächstfolgenden Paragraphen hindurchziehen wird, macht uns u. a. mit mehreren aus den Galois'schen Hauptmoduln entspringenden Grössen bekannt, die in der Theorie der elliptischen Functionen seit langer Zeit eine wichtige Rolle spielen. Wir knüpfen dabei an die schon unter (6) p. 21 aufgestellte Relation:

$$\lambda : \lambda - 1 : 1 = (\mu^2 - 1)^2 : (\mu^2 + 1)^2 : -4\mu^2 \tag{1}$$

und wollen uns vorab überzeugen, dass dieselbe auch noch mit der im vorigen Kapitel getroffenen Fixierung der Moduln λ und μ in Übereinstimmung ist. Man verfolge zu dem Ende die Wertverteilung der auf dem Polygon der Hauptcongruenzgruppe vierter Stufe (Fig. 82, p. 355) vierwertigen Function λ. Wie man leicht bemerkt, liegen die vier Nullpunkte von λ thatsächlich zu Paaren bei $\mu = +1$ und $\mu = -1$ vereint, die Unstetigkeitspunkte aber zu Paaren bei $\mu = 0$ und $\mu = \infty$, und man führt auf diesem Wege mühelos die Bestätigung von (1) zu Ende.

Jetzt ziehen wir aus (1) die beiden Formeln:

$$\sqrt{\lambda} = i\frac{\mu^2 - 1}{2\mu}, \quad \sqrt{1-\lambda} = \frac{\mu^2 + 1}{2\mu} \tag{2}$$

und erkennen vermöge derselben in $\sqrt{\lambda}$ und $\sqrt{1-\lambda}$ *eindeutige Modulfunctionen und zwar solche der vierten Stufe,* wobei dann die infolge der Quadratwurzeln zunächst fraglichen Vorzeichen von $\sqrt{\lambda}$ und $\sqrt{1-\lambda}$ durch die auf den rechten Seiten von (2) stehenden Ausdrücke eindeutig fixiert sind. Umgekehrt ergiebt sich aus den Formeln (2) die folgende Darstellung von μ:

$$\mu = -i\sqrt{\lambda} + \sqrt{1-\lambda}. \tag{3}$$

*) Fernere Entwicklungen über die zehnte Stufe findet man in der Inauguraldissertation des Herausgebers (Leipzig, 1885).

Es können demgemäss die beiden Grössen $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{1-\lambda}$, neben einander gestellt, geradezu als *ein volles Modulsystem für die Hauptcongruenzgruppe vierter Stufe* an Stelle von μ treten. Verbunden sind sie alsdann durch die selbstverständliche Relation:

$$(\sqrt{\lambda})^2 + (\sqrt{1-\lambda})^2 = 1,$$

die wir im Sinne unserer allgemeinen Entwicklungen p. 591 u. f. als einen auf das Polygon der Γ_{24} eindeutig bezogenen Kreis (oder Kegelschnitt) zu deuten haben.

Nun ist es sehr interessant, *dass nicht nur* $\sqrt{\lambda}$ *und* $\sqrt{1-\lambda}$, *sondern ganz allgemein* $\sqrt[n]{\lambda}$, $\sqrt[n]{1-\lambda}$ *für jegliche ganze Zahl* n *eindeutige Modulfunctionen darstellen*, ein Resultat, das wir ohne Mühe aus dem Verzweigungssatze gewinnen werden. Man ziehe nämlich die Fig. 13, p. 72, heran, welche uns die λ-Kugel versinnlicht, und denke dieselbe derart n-fach überdeckt, wie es etwa vorerst $\sqrt[n]{\lambda}$ verlangt. Da werden also die n Blätter im ganzen in zwei, bei $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ gelegenen Verzweigungspunkten mit einander zusammenhängen, wo dann beidemal alle n Blätter cyclisch in einander übergehen. Indem wir für die Eckpunkte der Dreiecke, in denen $J = 1, 0, \infty$ wird, wieder die alte Benennung der Punkte a bez. b und c heranziehen, überblickt man hierbei sehr leicht: Auf unserer n-blättrigen Fläche liegen im ganzen $3n$ Punkte a, jeder umgeben von vier Elementardreiecken, des ferneren liegen auf derselben $2n$ Punkte b, jeder umgeben von je sechs Dreiecken, während sich die Punkte c in zwei Kategorien zerlegen. Da haben wir erstlich zwei Punkte c, nämlich die beiden Verzweigungspunkte, deren jeder von $4n$ Elementardreiecken umgeben ist, und es bleiben sodann noch n fernere Punkte (in denen $\lambda = 1$ wird), deren einzelner von vier Dreiecken umlagert ist. *Nach dem Verzweigungssatze* (p. 345) *definiert diese Fläche eine in der Modulgruppe enthaltene Untergruppe* Γ_{6n} *des Index* $6n$ *und der Classe* $2n$; *dieselbe erweist sich sofort als vom Geschlechte* $p = 0$ *und besitzt als zugehörigen Hauptmodul* $\sqrt[n]{\lambda}(\omega)$*).

Um ein Fundamentalpolygon dieser Γ_{6n} zu erhalten, müssen wir die beschriebene n-blättrige Fläche in der ω-Halbebene ausbreiten. Gebrauchen wir hier als λ-Ebene die in Fig. 12 (p. 70) gegebene Zeichnung und denken in derselben die negative reelle Axe als Verzweigungsschnitt, über welchen hinüber wir von jedem einzelnen Blatte in

*) Entsprechende Überlegungen führt man sofort auch für $\sqrt[n]{1-\lambda}$ durch; die Gruppe Γ'_{6n} dieses Hauptmoduls ist einfach $\Gamma'_{6n} = S^{-1}\Gamma_{6n}S$.

das nächstfolgende geführt werden! Führen wir jetzt längs dieses Verzweigungsschnittes einen durch alle Blätter hindurchgehenden Schnitt, um die solchergestalt isolierten n Blätter jedes für sich in je ein Polygon F_6 der Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe zurückzubiegen, so werden diese Polygone F_6 (um das Polygon F_{6n} zu erhalten) jeweils längs derjenigen Randcurven neben einander zu lagern sein, die dem oberen und unteren Ufer der negativen λ-Axe im einzelnen Blatte entsprechen. Aber wir müssen, um die Blätter in die bezüglichen Polygone F_6 zurückzuverwandeln, nun auch noch jedes einzelne Blatt für sich längs der positiven λ-Axe zwischen 0 und 1 durchschneiden; hieraus entspringen für jedes F_6 zwei halbkreisförmige Randcurven, die also als zusammengehörig anzusehen sind*). So lagern sich nun die n Polygone direct in der Art neben einander, wie

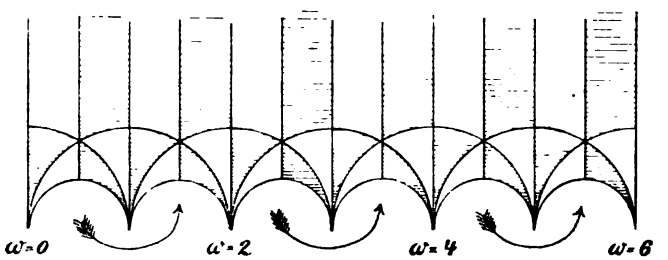


Fig. 100.

durch Fig. 100 im speciellen Falle $n = 3$ versinnlicht ist, und wir haben ausser der schon in der Figur angedeuteten Zuordnung der unteren Randcurven nun auch noch die beiden nach rechts und links das Gesamtpolygon abschliessenden Geraden auf einander zu beziehen

Aus Figur 100 berechnen wir jetzt sofort ein System von Erzeugenden der Untergruppe Γ_{6n}; es zeigt sich, *dass die* Γ_{6n} *aus der Substitution* S^{2n} *im Verein mit den* n *weiteren Substitutionen*:

$$(4)\quad \omega' = \frac{(4\nu+3)\omega - (8\nu^2+8\nu+2)}{2\omega - (4\nu+1)},\quad \nu = 0,\ 1,\ 2, \cdots, (n-1)$$

hergestellt werden kann. Die Erzeugenden der zu $\sqrt[n]{1-\lambda}$ gehörenden Γ'_{6n} entspringen (zufolge der Note auf der vorigen Seite) aus den hiermit gegebenen Substitutionen einfach durch Transformation vermöge der Operation S.

Unser Verfahren, durch Wurzelziehungen aus λ höhere Hauptmoduln herzustellen, hat übrigens eine ganz allgemeine Bedeutung. Möge irgend eine Untergruppe Γ_μ des Geschlechtes $p = 0$ vorliegen,

*) Vergl. den p. 294 u. f. beschriebenen entgegengesetzten Umwandlungsprocess eines Polygons F_6 in die λ-Ebene.

so wähle man auf der geschlossenen Fläche F_μ zwei Punkte c der auf derselben gelegenen Dreiecksteilung nach Willkür aus und fixiere den zugehörigen Hauptmodul τ derart, dass im einen dieser beiden Punkte $\tau = 0$, im anderen $\tau = \infty$ zutrifft. Da bemerkt man nun, genau wie vorhin bei $\sqrt[n]{\lambda}$, dass die zu $\sqrt[n]{\tau}$ gehörige n-blättrige Fläche über der τ-Ebene eine Teilung in $2n\mu$ Elementardreiecke trägt, welche durchgängig dem Verzweigungssatze genügt. Daher der Satz: *Mit τ ist auch $\sqrt[n]{\tau}$ für jede positive Zahl n eine eindeutige Modulfunction, und zwar gehört dieselbe als Hauptmodul zu einer Untergruppe $\Gamma_{n\mu}$ des Index $n\mu$ und des Geschlechtes $p = 0$.**)

Im speciellen wollen wir uns noch anmerken: $\sqrt[3]{\xi - 1}$ ist Hauptmodul einer Γ_{36} des Geschlechtes Null, die neben S^9 noch folgende Substitutionen zu Erzeugenden hat:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \omega' &= \frac{(3\nu + 1)\omega - 3\nu^2}{3\omega - (3\nu - 1)}, \quad \nu = 1, 2, 4, 5, 7, 8; \\ \omega' &= \frac{(3\nu + 8)\omega - (3\nu^2 + 9\nu + 3)}{3\omega - (3\nu + 1)}, \quad \nu = 0, 3, 6. \end{aligned}$$

Mit $\sqrt[3]{\xi - 1}$ sind gleichberechtigt die beiden Hauptmoduln $\sqrt[3]{\xi - \varrho}$ und $\sqrt[3]{\xi - \varrho^2}$; die zu den bezüglichen Untergruppen gehörenden Erzeugenden entspringen aus (5) durch Transformation vermöge S^2 bez. S.

§ 3. Aufzählung aller unter den Grössen $\sqrt[n]{\lambda}$ u. s. w. enthaltenen Congruenzmoduln.

Während wir im Laufe unserer gegenwärtigen Untersuchungen für gewöhnlich von etwa vorliegenden Untergruppen Γ_μ der Modulgruppe auf die Existenz zugehöriger Modulfunctionen schliessen, war die Entwicklung des vorigen Paragraphen gerade die umgekehrte. Dort gewannen wir z. B. die eindeutigen Modulfunctionen $\sqrt[n]{\lambda}$ direct durch Wurzelziehung aus dem Galois'schen Hauptmodul zweiter Stufe und haben dann erst hernach für die zugehörige Γ_{6n} wenigstens insofern eine vollständige Definition gewonnen, als wir deren Erzeugende angaben. Aber man weiss, dass hiermit ein vollständiger Einblick in den arithmetischen Charakter dieser Untergruppen Γ_{6n} noch keineswegs erlangt ist. Um so mehr drängt sich jetzt die Frage auf, wie wir die gesamten Substitutionen der einzelnen Γ_{6n} durch ihre zahlentheoretischen Kennzeichen direct erschöpfend zu definieren vermögen.

---

*) Die Verallgemeinerung auf $p > 0$ lassen wir hier der Kürze halber ausser Betracht.

Man wird nach unseren bezüglichen Bemerkungen auf Seite 418 voraussehen, dass wir eine volle Auflösung dieses Problems zur Zeit nicht zu geben vermögen, und in der That müssen wir für die wirklich durchzuführenden Entwicklungen eine sehr viel engere Grenze ziehen: Es soll sich nämlich nur um die Entscheidung der Frage handeln, welche von den im vorigen Paragraphen gewonnenen Untergruppen Congruenzgruppen sind. Wir können das auch dahin ausdrücken, *dass wir die durch Wurzelziehung aus den Galois'schen Hauptmoduln zu gewinnenden Congruenzmoduln namhaft machen wollen.*

Um die Lösung zu vereinfachen, führen wir vorab die folgende Entwicklung durch. Seien n_1 und n_2 irgend zwei relative Primzahlen, so kann man stets zwei der Gleichung $an_1 + bn_2 = 1$ genügende ganze Zahlen a, b finden und hat für dieselben:

$$(1) \qquad \left(\sqrt[n_1]{\lambda}\right)^b \left(\sqrt[n_2]{\lambda}\right)^a = \sqrt[n_1 n_2]{\lambda}.$$

Man ersieht aus dieser Gleichung, dass jede zugleich in den beiden zu $\sqrt[n_1]{\lambda}$ und $\sqrt[n_2]{\lambda}$ gehörenden Untergruppen Γ_{6n_1} und Γ_{6n_2} enthaltene Substitution auch $\sqrt[n_1 n_2]{\lambda}$ in sich transformiert, d. h. der bezüglichen $\Gamma_{6n_1n_2}$ angehört. Umgekehrt wird aber jede Operation der $\Gamma_{6n_1n_2}$ selbstverständlich sowohl der Γ_{6n_1} wie der Γ_{6n_2} angehören, und wir können demnach $\Gamma_{6n_1n_2}$ geradezu als gemeinsame Untergruppe von Γ_{6n_1} und Γ_{6n_2} definieren. Den arithmetischen Charakter der $\Gamma_{6n_1n_2}$ werden wir also vollständig aufgewiesen haben, wenn wir solches für die Untergruppen Γ_{6n_1} und Γ_{6n_2} einzeln abgeleistet haben, und wir brauchen dieserhalb der directen Untersuchung nur diejenigen Untergruppen Γ_{6n} zu unterwerfen, bei denen n eine Primzahlpotenz q^α ist. Bei diesem Unternehmen werden wir übrigens die allgemeinen Entwicklungen p. 416 u. f. heranzuziehen haben.

Für die Rechnung empfiehlt es sich, an Stelle der durch die Operationen (4) p. 658 zu erzeugenden Γ_{6n} die mit ihr gleichberechtigte Untergruppe $\Gamma'_{6n} = TS^{-1}\Gamma_{6n}ST$ zu setzen, welche durch Combination und Wiederholung der Operationen $(TS^{2n}T)$ und

$$(2) \qquad v_\nu(\omega) = \frac{(4\nu+1)\omega - 2}{8\nu^2\omega - (4\nu-1)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$$

entspringt. In Ansehung des allgemeinen Congruenzcharakters gilt von Γ_{6n} genau dasselbe wie von Γ'_{6n}. Ist aber Γ'_{6n} überhaupt eine Congruenzgruppe, so ist deren Stufe $2n$ oder ein Teiler von $2n$, wie p. 417 gezeigt ist. Sei nun $n = q^\alpha$ und q zunächst eine beliebige ungerade Primzahl, so werden wir die Operationen (2) modulo $2q^\alpha$ zu reducieren haben, um zu sehen, was für eine Untergruppe der bezüg-

lichen $G_{\mu(2q^\alpha)}$ durch dieselben erzeugt wird. Da ist es nun ein erstes wichtiges Resultat, *dass die Substitutionen* (2) *modulo 2 genommen alle mit der Identität congruent sind, während sie modulo* q^α *sämtliche* $\mu(q^\alpha)$ *verschiedenen Typen erzeugen.* Jene Behauptung ist selbstverständlich richtig, diese beweisen wir dadurch, dass wir zwei mit S und T modulo q^α congruente Substitutionen aus (2) herstellen (cf. p. 417, unten). Thatsächlich ist, wie man leicht berechnet:

$$v_0^{-\frac{1}{2}} \equiv S, \quad v_0^{\frac{3}{2}} v_{\frac{1}{4}}^{\ 2} v_0^{-\frac{1}{2}} \equiv T, \ (\text{mod. } q^\alpha)^*).$$

Ein Blick auf die p. 402 u. f. gegebenen Entwicklungen überzeugt uns bei dieser Sachlage, dass die aus (2) entspringende Untergruppe der $G_{\mu(2q^\alpha)}$ diejenige $G_{\mu(q^\alpha)}$ ist, welche alle mod. 2 mit der Identität congruenten Operationen der $G_{\mu(2q^\alpha)}$ umfasst. *Die* Γ_{6q^α} *erleidet somit modulo* $2q^\alpha$ *keine andere Einschränkung, als dass ihre Substitutionen nur modulo 2 mit 1 congruent sind.* Die Γ_{6q^α} ist also gewiss keine Congruenzgruppe.

Es bleibt übrig, dass wir noch den Fall $n = 2^\alpha$ untersuchen, wobei wir also die Operationen (2) modulo $2^{\alpha+1}$ zu reducieren haben werden. Sei hier zuvörderst $\alpha > 3$ vorausgesetzt, so erinnern wir daran, dass innerhalb der zur Stufe $2^{\alpha+1}$ gehörenden $\Gamma_{\mu(2^{\alpha+1})}$ im ganzen acht modulo 2^α mit der Identität congruente Substitutionen enthalten sind, nämlich die folgenden:

$$(3) \qquad V \equiv \begin{pmatrix} 1 + e_1 2^\alpha, & e_2 2^\alpha \\ e_3 2^\alpha, & 1 - e_1 2^\alpha \end{pmatrix}, \ e_1, e_2, e_3 = 0, 1,$$

die alsdann innerhalb der $G_{\mu(2^{\alpha+1})}$ eine Untergruppe G_8 bilden (cf. p. 412). Jede Congruenzgruppe der Stufe $2^{\alpha+1}$, welche die G_8 der Substitutionen (3) enthält, lässt sich alsdann bereits durch Congruenzen modulo 2^α vollständig charakterisieren. Thatsächlich aber können wir aus den Operationen (2) leicht die acht Typen (3) modulo $2^{\alpha+1}$ herstellen. Wir berechnen uns zuvörderst:

$$(4) \qquad v_\nu^\tau(\omega) = \frac{(4\nu\tau + 1)\omega - 2\tau}{8\nu^2\tau\omega - (4\nu\tau - 1)}$$

und bewahrheiten dann vermöge dieser Formel nach kürzester Rechnung die Congruenzen modulo $2^{\alpha+1}$

$$v_0^{2^{\alpha-1}} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 2^\alpha \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{2^{\alpha-2}} v_0^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 + 2^\alpha, & 0 \\ 0, & 1 + 2^\alpha \end{pmatrix},$$

$$v_0^{-2^{\alpha-4}} v_2^{-2^{\alpha-4}} v_1^{2^{\alpha-3}} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2^\alpha, & 1 \end{pmatrix}, \ **)$$

*) Hierbei bedeutet wieder $\frac{a}{b}$ diejenige ganze Zahl, welche mit b multipliciert modulo q^α einen mit a congruenten Rest giebt.

**) Auf der rechten Seite der letzten Congruenz tritt jedoch für $\alpha = 4$ der

aus denen nun in der That durch Combination die ganze G_8 der Operationen (3) entspringt. Die $\Gamma_{6 \cdot 2^\alpha}$ unterliegt demgemäss, modulo $2^{\alpha+1}$ reduciert, höchstens derartigen Einschränkungen, die auch bereits modulo 2^α vollständig angegeben werden können. Reducieren wir aber die Erzeugenden der $\Gamma_{6 \cdot 2^\alpha}$ modulo 2^α, so können wir, sofern auch noch $\alpha - 1 > 3$ ist, genau die nämliche Schlussweise wie soeben durchführen und finden, dass sich die etwa modulo 2^α bestehenden Einschränkungen auch schon modulo $2^{\alpha-1}$ erschöpfend ausdrücken lassen. So weiter schliessend setzen wir die Betrachtung fort, bis wir endlich den Zahlmodul $2^{3+1} = 16$ erreicht haben. Hier müssen wir dann wieder directe Betrachtungen anstellen und merken uns vorab den Satz: *Ist die $\Gamma_{6 \cdot 2^\alpha}$ für $\alpha > 3$ überhaupt durch Congruenzen unserer Art eingeschränkt, so ist der zugehörige Zahlmodul* 16.

So haben wir jetzt die Operationen (3) modulo 16 zu reducieren, und hier erzeugen sie die 32 Typen mit willkürlich bleibendem τ:

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 2\tau \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 2\tau \\ 8, & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9, & 2\tau \\ 0, & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13, & 2\tau \\ 8, & 5 \end{pmatrix}, \text{ (mod. 16)},$$

welche innerhalb der bezüglichen G_{1536} eine G_{32} festlegen*) und *demgemäss eine Congruenzgruppe sechzehnter Stufe Γ_{48} definieren.* Diese aber ist, wie man sieht, nicht bereits modulo 8 vollständig darstellbar, sondern vielmehr eine eigentliche Gruppe des Stufe 16. Da nun die Γ_{6n} für $n = 8$ gerade eine Untergruppe des Index 48 ist, *so coincidiert die $\Gamma_{6 \cdot 8}$ direct mit der durch* (5) *definierten Congruenzgruppe sechzehnter Stufe* (vergl. den Hauptsatz p. 417). Nun findet sich sofort weiter: *Die $\Gamma_{6 \cdot 4}$ ist eine Congruenzgruppe achter Stufe, welche alle modulo* 8 *mit*

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 2\tau \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 2\tau \\ 0, & 5 \end{pmatrix}$$

congruenten Substitutionen umfasst. Und weiter: *Die $\Gamma_{6 \cdot 2}$ ist eine Congruenzgruppe vierter Stufe, welche alle modulo* 4 *mit*

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 2\tau \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

congruenten Substitutionen umfasst.

Indem wir aber die Gesamtentwicklungen dieses Paragraphen zusammennehmen, folgt der Hauptsatz: *Unter allen im vorigen Paragraphen definierten Gruppen $\Gamma_{6 \cdot n}$ sind nur die vier für $n = 1, 2, 4, 8$ Congruenz-*

Typus $\begin{pmatrix} 1, & 2^\alpha \\ 2^\alpha, & 1 \end{pmatrix}$ ein; dieser Umstand beeinträchtigt die weiterhin im Texte gezogenen Schlüsse nicht.

*) Man vergl. die Tabelle p. 398.

gruppen; alle übrigen sind nur insofern durch Congruenzen bezüglich fester Moduln eingeschränkt, als die einzelne unter ihnen in einer bestimmten der soeben namhaft gemachten Congruenzgruppen $\Gamma_6, \Gamma_{12}, \Gamma_{24}, \Gamma_{48}$ *enthalten ist.* Anders ausgedrückt heisst dies: *Unter den unendlich vielen Modulfunctionen* $\sqrt[n]{\lambda}$ *sind ausser* λ *selbst nur die drei:* $\sqrt{\lambda}, \sqrt[4]{\lambda}, \sqrt[8]{\lambda}$ *Congruenzmoduln; alle übrigen werden wir dagegen als Nichtcongruenzmoduln bezeichnen müssen**). *Die gleichen Sätze gelten für* $\sqrt[n]{1-\lambda}$.

Für die übrigen aus den Galois'schen Hauptmoduln durch Wurzelziehungen entspringenden Modulfunctionen lassen sich sofort die entsprechenden Fragen aufwerfen und mit den nämlichen Hülfsmitteln beantworten. Wir stellen hier sogleich die Resultate der bezüglichen Untersuchungen zusammen: *Unter den aus dem Hauptmodul dritter Stufe entspringenden Modulfunctionen* $\sqrt[n]{\xi-1}$, $\sqrt[n]{\xi-\varrho}$, $\sqrt[n]{\xi-\varrho^2}$ *sind einzig diejenigen für* $n = 3$ *Congruenzmoduln, und zwar solche von der neunten Stufe; die zu* $\sqrt[3]{\xi-1}$ *gehörende* Γ_{36} *besteht aus allen modulo* 9 *mit*

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} 4, & -3\tau \\ 3\tau, & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7, & -3\tau \\ 3\tau, & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & -3\tau \\ 3\tau, & 1 \end{pmatrix}, \tau = 0, 1, 2$$

congruenten Substitutionen. Unter allen Wurzeln aus μ *sind nur die drei gleichberechtigten* $\sqrt{\mu}, \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}, \sqrt{\frac{\mu+i}{\mu-i}}$ *Congruenzmoduln, und zwar solche der achten Stufe; die zu* $\sqrt{\mu}$ *gehörende* Γ_{48} *ist definiert durch:*

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 4, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 4 \\ 4, & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5, & 4 \\ 0, & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \text{(mod. 8)}.$$

Sämtliche auf Grund der p. 659 *entwickelten Regel aus* ζ *herstellbaren Modulfunctionen aber sind Nichtcongruenzmoduln.*

§ 4. Besondere Untersuchung der Congruenzmoduln $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[8]{1-\lambda}$.

Die im vorigen Paragraphen gewonnenen Moduln $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[8]{\lambda}$ sind diejenigen, welche in der überlieferten Theorie der elliptischen Functionen seit lange fast ausschliesslich betrachtet worden sind. Es kann dabei als auffallend bemerkt werden, dass man in der Entwicklung

---

*) Die erste Mitteilung dieses Resultates findet sich (ohne Beweis) in der wiederholt genannten Note von Klein: *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Math. Ann. Bd. 17 (1879). Beweise des fraglichen Satzes wurden späterhin von Hrn. Pick (vergl. dessen für die Darstellung des Textes verwertete Abhandlung: *Über gewisse ganzzahlige lineare Substitutionen, welche sich nicht durch algebraische Congruenzen erklären lassen*, Math. Ann. Bd. 28, 1886), sowie auch vom Herausgeber in der p. 418 gen. Arbeit nachgetragen.

der gedachten Theorie Anlass fand, gerade bei der achten Wurzel aus λ stehen zu bleiben, und nicht auch noch die sechzehnte oder irgend eine andere in Betracht zog, zumal sie doch *alle* eindeutige Functionen des Periodenverhältnisses ω sind. Die Erklärung dieses Umstandes finden wir in den Sätzen des vorigen Paragraphen: *Unter allen Wurzeln aus λ sind nur $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[8]{\lambda}$ Congruenzmoduln;* und in der That darf man den Satz aufstellen, *dass alle diejenigen eindeutigen Functionen des Periodenverhältnisses ω, welche sich in der überlieferten Theorie als notwendige Glieder der Entwicklungen vorfinden, Congruenzmoduln sind und sein müssen.*

Eine besonders eingehende Untersuchung haben die in Rede stehenden Moduln als eindeutige Functionen von ω zuerst durch Hrn. Hermite erfahren*). In der Absicht, auf die hiermit gemeinten Entwicklungen vom Standpunkte unserer Theorie ein wenig näher einzugehen, wollen wir vorab die Hermite'sche, sowie die auch sonst gebräuchliche Bezeichnungsweise mit der unsrigen in Beziehung setzen. Es ist übrigens für die Rechnung eine Erleichterung, wenn wir an Stelle von $\sqrt[8]{\lambda}$ lieber $\sqrt[8]{-\lambda}$ setzen, welchen Modul wir dadurch endgültig fixieren, dass wir auf der imaginären ω-Axe für denselben reelle positive Werte vorschreiben. Mit λ gleichberechtigt sind z. B. auch $1-\lambda$, sowie $\frac{\lambda}{1-\lambda}$, und wir müssen, was wir noch bald einsehen werden, neben $\sqrt[8]{\lambda}$ auch noch $\sqrt[8]{1-\lambda}$ und $\sqrt[8]{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$ setzen, um unserer Betrachtung die richtige Symmetrie zu geben. Auch die beiden letztgenannten

*) In der Abhandlung: *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré,* Comptes rendus, Bd. 46, p. 508—515 (1858). Unter den hauptsächlichsten an die Hermite'schen Resultate anknüpfenden Arbeiten steht denselben der Zeit nach am nächsten die Abhandlung von Stephen Smith, *Report on the theory of numbers,* Part. VI, Reports of the British Association for the advancement of sciences 1865. In derselben werden die Substitutionen, welche $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, u. s. w. in sich überführen, modulo 16, 8 u. s. w. charakterisiert, und St. Smith erkannte, was für uns interessant ist, auch bereits umgekehrt, dass zwei Zahlwerte ω mit positivem imaginären Bestandteil, die gleiche $\sqrt[8]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ u. s. w. besitzen, notwendig durch eine der modulo 16 bez. 8, u. s. w. charakterisierten Substitutionen verknüpft sind. Wie man sieht, ist damit ein charakteristisches Merkmal der Grössen $\sqrt[8]{\lambda}$ u. s. w. in ihrer Eigenschaft als *Hauptmoduln* ihrer Untergruppe ausgesprochen. Dass übrigens dieser Satz für die Vorstellungsweisen der überlieferten Theorie der elliptischen Functionen nicht hinreichend vermittelt und demnach überraschend auftritt, darf man aus gelegentlichen Ausserungen Hermite's schliessen [vergl. dessen Anmerkung zu einer Abhandlung von Fuchs in Crelle's Journal Bd. 83, p. 229 (1877), sowie die bez. Erläuterungen von Dedekind ebenda].

Moduln wollen wir durch die Bestimmung fixieren, dass sie auf der imaginären ω-Axe reell und positiv sein sollen. Insbesondere haben wir also als Grenze bei $\omega = i\infty$ (cf. 5 p. 614):

$$(1) \qquad \sqrt[8]{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} r^{-\frac{1}{16}}, \quad \sqrt[8]{1-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} r^{-\frac{1}{16}}, \quad \sqrt[8]{\frac{\lambda}{\lambda-1}} = 1.$$

Jetzt schreiben wir:

$$(2) \qquad \varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt[8]{1-\lambda}}, \quad \psi(\omega) = \sqrt[8]{\frac{\lambda}{\lambda-1}}, \quad \chi(\omega) = \sqrt[8]{-\lambda}$$

und haben dann in φ und ψ direct die Bezeichnung Hermite's wiedergegeben*), während wir, wie schon gesagt, $\chi(\omega)$ der Symmetrie halber hinzuzusetzen haben. Die Grössen φ und ψ sind aber keine anderen als die sonst durch $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ bezeichneten Moduln, unter k^2 den sogenannten Legendre'schen Integralmodul, unter k'^2 aber den complementären Modul $k'^2 = 1 - k^2$ verstanden**). Merken wir uns also für gelegentliche Verwendung die Formeln:

$$(3) \qquad \sqrt[4]{k} = \frac{1}{\sqrt[8]{1-\lambda}}, \quad \sqrt[4]{k'} = \sqrt[8]{\frac{\lambda}{\lambda-1}}, \quad \sqrt[4]{\frac{k'}{k}} = \sqrt[8]{-\lambda}.$$

Eine eingehende Untersuchung der Moduln φ, ψ, χ werden wir jedenfalls damit beginnen müssen, dass wir auf die zu ihnen gehörenden Congruenzgruppen sechzehnter Stufe vom Index 48 zurückgehen; mögen wir diese Gruppen bez. Γ_{48}, Γ'_{48}, Γ''_{48} benennen. Da erinnere man sich nun, dass λ durch die Operation T in $\frac{1}{\lambda}$, durch S aber in $(1-\lambda)$ transformiert wird. Bis auf eine Einheitswurzel

---

**) Vergl. auch Königsberger, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen* (Leipzig, 1874) Bd. II Vorl. 27, sowie eine bezügliche frühere Abhandlung in Band 3 der Mathem. Annalen (1871). Es muss hierbei ausdrücklich bemerkt werden, dass die Bezeichnung χ, die sich im Texte wie von selbst aufdrängt, in den soeben namhaft gemachten Arbeiten in mehrfach wechselnder Bedeutung gebraucht wird. Hermite versteht unter χ die dritte Wurzel $\sqrt[3]{\varphi\psi}$, eine Grösse, auf die wir bald ausführlich zurückkommen; Königsberger nennt das Product $\varphi\psi$ direct χ. Will man aber in φ, ψ, χ drei in unserem Sinne gleichberechtigte Moduln haben, so muss man unter χ wie im Texte den Quotienten $\frac{\psi}{\varphi}$ verstehen. — Man vergl. übrigens auch die im folgenden Paragraphen noch ausführlich zu nennende Arbeit von Schläfli in Bd. 72 von Crelle's Journ., wo die Bezeichnung wieder die Hermite'sche ist.

**) Man vergl. die bezüglichen Bemerkungen p. 26.

geht also φ durch T in ψ, durch S aber in $\frac{1}{\chi}$ über, woraus wir denn schliessen, dass zwischen unseren drei Gruppen die Beziehungen bestehen:

$$\Gamma'_{48} = T^{-1}\Gamma_{48}T, \quad \Gamma''_{48} = S^{-1}\Gamma_{48}S. \tag{4}$$

Γ''_{48} ist direct die Untergruppe von $\sqrt[3]{\lambda}$, an deren Stelle wir doch im vorigen Paragraphen die Untergruppe $TS^{-1}\Gamma''_{48}ST$ setzten. Was wir also unter (5) p. 662 kennen lernten, ist unsere jetzige Γ'_{48}; die anderen beiden Gruppen stellen wir daraus vermöge der jetzigen Gleichung (4) her. Es ist übrigens besonders folgenreich, dass wir die Substitutionen unserer Untergruppen unter Gebrauch des Legendre'schen Zeichen $\left(\frac{2}{a}\right)$ in einer einfachen Form zusammenfassen können. Wir haben nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_{48}:\ v_{a,b} &\equiv \begin{pmatrix} a, & 4-4\left(\frac{2}{a}\right) \\ 2b, & a+4-4\left(\frac{2}{a}\right) \end{pmatrix}, \\
\Gamma'_{48}:\ v'_{a,b} &\equiv \begin{pmatrix} a, & 2b \\ 4-4\left(\frac{2}{a}\right), & a+4-4\left(\frac{2}{a}\right) \end{pmatrix}, \\
\Gamma''_{48}:\ v''_{a,b} &\equiv \begin{pmatrix} a+2b, & -2b \\ 2b, & a-2b+4-4\left(\frac{2}{a}\right) \end{pmatrix},
\end{aligned}\right\} \text{(mod. 16)}, \tag{5}$$

wobei von den beiden Zahlen a, b die erste ungerade sein soll, während die andere beliebig ist. In der That wolle man sich überzeugen, dass die 32 modulo 16 unterschiedenen Substitutionen $v'_{a,b}$ gerade die unter (5) p. 662 gegebenen sind; die Operationen $v_{a,b}$ und $v''_{a,b}$ entspringen dann durch Transformation vermöge T und S.

Jetzt bestätige man durch directe Rechnung den Satz: Die drei Gruppen (5) werden sowohl durch S als durch T in einander transformiert und bilden dieserhalb ein System von drei (und nicht mehr) mit einander gleichberechtigten Untergruppen. Hierin hat man den Grund zu sehen, warum wir neben die Hauptmoduln φ und ψ als dritten noch χ setzen mussten. Jede unserer Gruppen (4) muss hiernach relativ ausgezeichnet in einer Untergruppe des Index drei enthalten sein, und man erkennt in den solchergestalt entspringenden Γ_3, Γ'_3, Γ''_3 unschwer diejenigen drei gleichberechtigten Untergruppen zweiter Stufe, welche den drei cyclischen G_2 innerhalb der Diedergruppe G_6 entsprechen. Die drei fraglichen Gruppen findet man definiert durch:

$$(6)\qquad \left.\begin{array}{lll} \Gamma_3: & \begin{pmatrix}1,&0\\1,&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1,&0\\0,&1\end{pmatrix}, \\ \Gamma_3': & \begin{pmatrix}1,&1\\0,&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1,&0\\0,&1\end{pmatrix}, \\ \Gamma_3'': & \begin{pmatrix}0,&-1\\1,&0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1,&0\\0,&1\end{pmatrix}, \end{array}\right\} \text{(mod. 2)}.$$

Man bestätigt in der That auch durch directe Rechnung leicht, dass Γ_{48} mit den Operationen von Γ_3 vertauschbar ist u. s. w.

Zufolge unserer allgemeinen Erörterungen p. 603 (unten) wird sich die Γ_3, bezüglich der Γ_{48} reduciert, auf eine endliche G_{16} zusammenziehen, und wir erhalten so insgesamt von den Gruppen (5) aus drei Gruppen G_{16}, G_{16}', G_{16}'' von gleichem Typus. Da es sich hier übrigens um Γ_{48} des Geschlechtes $p = 0$ handelt, so muss dieser Typus zu denjenigen gehören, welche in der Theorie der regulären Körper auftreten. Wir haben es dieserhalb entweder mit cyclischen oder diedrischen G_{16} zu thun. Man wird sofort sehen, dass die letztere Alternative zutrifft, und dass sich z. B. für φ die in Rede stehende G_{16} durch die Substitutionen:

$$(7)\qquad \varphi' = e^{\frac{\nu\pi i}{4}}\varphi, \quad \varphi' = \frac{e^{\frac{\nu\pi i}{4}}}{\varphi}$$

darstellt. Zu diesem Ende müssen wir indessen eingehender auf das Verhalten unserer Moduln gegenüber beliebigen Modulsubstitutionen Bezug nehmen, was im folgenden Paragraphen geschehen soll.

§ 5. Verhalten von φ, ψ, χ gegenüber beliebigen Modulsubstitutionen.

Es ist zunächst ganz leicht, das Verhalten unserer oft genannten drei Moduln bei Ausübung der erzeugenden Substitutionen S und T in Erfahrung zu bringen; wir brauchen zu dem Ende nur unter Benutzung der Angaben des vorigen Paragraphen auf das Verhalten von λ selbst zurückzugehen. Um hier ein einzelnes Beispiel wirklich durchzurechnen, so haben wir nach (7) p. 615 die Formel $-\lambda(\omega+1) = -(1-\lambda(\omega))$ und also durch Ausziehen der achten Wurzel unter Benutzung von (2) p. 665:

$$\chi(\omega+1) = \frac{\sqrt[8]{-1}}{\varphi(\omega)}.$$

Um hier den noch unbekannten Wert der 16ten Einheitswurzel $\sqrt[8]{-1}$ zu bestimmen, berechnen wir auf Grund von (1) p. 665 für die linke und rechte Seite der letzten Gleichung den Näherungswert bei $\omega = i\infty$

und finden dann durch Vergleich $\sqrt[8]{-1} = e^{-\frac{\pi i}{8}}$. Insgesamt folgen durch derartige Überlegungen die sechs Formeln:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\varphi(\omega+1) = \frac{e^{\frac{\pi i}{8}}}{\chi(\omega)}, \quad \psi(\omega+1) = \frac{1}{\psi(\omega)}, \quad \chi(\omega+1) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{8}}}{\varphi(\omega)}, \\ &\varphi\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \psi(\omega), \quad \psi\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \varphi(\omega), \quad \chi\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \frac{1}{\chi(\omega)}, \end{aligned}$$

sowie dann weiter durch Wiederholung von S:

$$(2)\quad \begin{aligned} \varphi(\omega+2b) &= e^{\frac{b\pi i}{4}}\varphi(\omega), \quad \psi(\omega+2b) = \psi(\omega), \\ \chi(\omega+2b) &= e^{-\frac{b\pi i}{4}}\chi(\omega). \end{aligned}$$

Hiermit ergiebt sich bereits die Richtigkeit der Angaben am Schlusse des vorigen Paragraphen, sowie insbesondere der Formeln (7) dortselbst.

Um unsere Entwicklung jetzt noch allgemeiner zu gestalten, verstehen wir unter $V = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ eine mit der Identität modulo 2 congruente Substitution und haben dann (um mit φ zu beginnen):

$$(3)\quad \varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = e^{\frac{\nu\pi i}{4}}\varphi(\omega).$$

Hierbei bedeutet ν eine von den Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ eindeutig abhängige ganze Zahl. Wir werfen die Frage auf, wie sich diese Abhängigkeit des ν darstellen lässt, und ob vielleicht insbesondere ähnlich wie bei $\sqrt[8]{\Delta}$ und $\sqrt[4]{\Delta}$ die Zahl ν als eine ganze rationale Function der α, β, γ, δ geschrieben werden kann. Hierzu bemerken wir vorab: *Wäre φ Nichtcongruenzmodul, so wäre diese einfachste Abhängigkeit des ν von α, β, γ, δ jedenfalls ausgeschlossen; dieselbe erscheint also als ein charakteristisches Merkmal für einen Congruenzmodul.* Ist nämlich ν ganze rationale Function der Coefficienten, so werden modulo 16 congruente Substitutionen offenbar dasselbe $e^{\frac{\nu\pi i}{4}}$ liefern, womit denn unsere Behauptung bestätigt ist.

Nun ist es aber sehr leicht, eine gewünschte Darstellung für ν thatsächlich zu liefern. Schreiben wir Formel (3) etwa noch kürzer $\varphi(V(\omega)) = \varkappa\varphi(\omega)$ und üben hier auf ω diejenige besondere Operation der Γ_{48} aus, die wir im Anschluss an (5) p. 666 durch $v_{\delta, -\frac{1}{2}\gamma}$ bezeichnen. Rechter Hand wird dabei $\varphi(\omega)$ direct in sich transformiert, während wir die links entspringende Substitution $Vv_{\delta, -\frac{1}{2}\gamma}$ sogleich modulo 16 reducieren. Es folgt solchergestalt:

$$\varphi\left(\omega + \beta\delta + 4\left[1 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right]\right) = \varkappa\varphi(\omega).$$

Aber der Wert der linken Seite entspringt direct aus (2), und wir erhalten so durch Vergleich ohne weiteres die Bedeutung von $\varkappa$:

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{8}\beta\delta}\varphi(\omega).$$

Um directen Anschluss an die Hermite'sche Formel zu erhalten, üben wir hier noch auf ω die zu V inverse Operation V^{-1} aus und schreiben alsdann statt $-\delta$ und $-\alpha$ wieder α und δ. So kommt

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\varphi(\omega), \tag{4}$$

womit die gewünschte Formel gegeben ist.

Wir wiederholen, dass die Richtigkeit der Formel (4) die Bedingungen $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, (mod. 2) voraussetzt; aber es ist sehr leicht, auch für die übrigen fünf Typen modulo 2 incongruenter Substitutionen durch zweckmässige Combination von (1) und (4) entsprechende Formeln zu entwickeln. Man übe z. B. in (4) auf ω die Operation T aus und findet unter Benutzung von (1)

$$\varphi\left(\frac{\beta\omega - \alpha}{\delta\omega - \gamma}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\psi(\omega),$$

woraus unter Wechsel der Bezeichnung der Substitutionscoefficienten sofort

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \left(\frac{2}{\beta}\right) e^{-\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\psi(\omega)$$

entspringt. Diese Formel gilt dann ersichtlich unter der Bedingung $\alpha \equiv \delta \equiv 0$, $\beta \equiv \gamma \equiv 1$, (mod. 2). Oder, um ein anderes Beispiel beizubringen, man übe auf (4) die Substitution S aus. Dieselbe giebt

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega + \alpha + \beta}{\gamma\omega + \gamma + \delta}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{\frac{\pi i}{8}(\alpha\beta+1)}\frac{1}{\chi(\omega)},$$

woraus wieder unter Wechsel der Bezeichnungsweise und Benutzung von

$$\left(\frac{2}{\alpha}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}(1-\alpha^2)}$$

die Formel entspringt:

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\frac{1}{\chi(\omega)};$$

dieselbe gilt nun offenbar für $\alpha \equiv \beta \equiv \delta \equiv 1$, $\gamma \equiv 0$, (mod. 2). Ebenso mühelos ergeben sich die drei noch rückständigen Typen, und wir stellen die Resultate hier insgesamt gleich tabellarisch zusammen:

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0; & \varphi' = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\varphi, \\ \alpha \equiv \gamma \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv 0; & \varphi' = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{-\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\frac{1}{\varphi}, \\ \alpha \equiv \delta \equiv 0, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 1; & \varphi' = \left(\frac{2}{\beta}\right) e^{-\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\psi, \\ \alpha \equiv 0, \quad \beta \equiv \gamma \equiv \delta \equiv 1; & \varphi' = \left(\frac{2}{\beta}\right) e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\frac{1}{\psi}, \\ \alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 1, \quad \delta \equiv 0; & \varphi' = e^{-\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\chi, \\ \alpha \equiv \beta \equiv \delta \equiv 1, \quad \gamma \equiv 0; & \varphi' = e^{\frac{\pi i}{8}\alpha\beta}\frac{1}{\chi}, \end{cases}$$

wobei sich die Congruenzen sämtlich auf den Zahlmodul 2 beziehen. Durch Benutzung von $\varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \psi\left(\frac{\gamma\omega+\delta}{-\alpha\omega-\beta}\right)$ entnehmen wir aus (5) sofort entsprechende Formeln für ψ; es sind dies unter Festhaltung der soeben eingehaltenen Reihenfolge für die Typen modulo 2 incongruenter Substitutionen die sechs Formeln:

$$(6)\quad \begin{cases} \psi' = \left(\frac{2}{\delta}\right) e^{-\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\psi, & \psi' = e^{-\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\chi, & \psi' = \left(\frac{2}{\gamma}\right) e^{\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\varphi, \\ \psi' = e^{\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\frac{1}{\chi}, & \psi' = \left(\frac{2}{\gamma}\right) e^{-\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\frac{1}{\varphi}, & \psi' = \left(\frac{2}{\delta}\right) e^{\frac{\pi i}{8}\gamma\delta}\frac{1}{\psi}. \end{cases}$$

Wir unterlassen, auch noch eine entsprechende Tabelle für χ zu entwerfen, die man sich ja auf Grund von $\chi = \frac{\psi}{\varphi}$ aus (5) und (6) sofort herstellt*).

§. 6. Zusammenstellung weiterer Congruenzmoduln.

Entwicklungen, wie wir sie hier im Anschluss an den Hauptmodul λ durchgeführt haben, lassen sich in ganz analoger Weise auch an die Hauptmoduln ξ und μ knüpfen; denn auch bei den letzteren waren einige unter den bezüglichen Wurzeln Congruenzmoduln. So erkannten wir, um dies hier noch ein wenig näher zu skizzieren, in

*) Die unter (5) und (6) aufgestellten Formelsysteme sind zuerst von Hermite in der p. 664 gen. Abhandlung mitgeteilt worden; eine eigenartige Ableitung derselben ist späterhin durch Schläfli gegeben in der Abh.: *Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen*, Crelle's Journ. Bd. 72 (1870); man vergl. auch die p. 665 cit. Abhandlungen Königsberger's. Über die Möglichkeit, die Formeln des Textes aus dem Verhalten von $\sqrt[24]{\Delta}$ bez. von $\log \Delta$ abzuleiten, sehe man Dedekind in Riemann's Werken p. 439.

$\sqrt[3]{\xi - 1}$ einen zur neunten Stufe gehörenden Modul, und die Erzeugenden der zugehörigen Γ_{36} waren die unter (8) p. 663 gegebenen Operationen. Durch Combination derselben finden wir, dass Γ_{36} modulo 9 reduciert die neun Typen:

$$(1) \qquad v_{a,b}(\omega) \equiv \frac{a\omega + 3b}{-3b\omega + \left(\frac{a}{3}\right)a^2}, \pmod 9$$

liefert. Diese Gruppe ist nun eine unter sechs gleichberechtigten, und als zugehörige Hauptmoduln können wir $\sqrt[3]{\xi - 1}$, $\sqrt[3]{\xi - \varrho}$, $\sqrt[3]{\xi - \varrho^2}$, sowie die Quotienten der ersten und zweiten, ersten und dritten, sowie zweiten und dritten dieser drei Wurzeln brauchen. Bei dieser Sachlage ist Γ_{36} relativ ausgezeichnet in einer Γ_6; aber hier finden wir nicht sechs solche Γ_6, sondern nur drei, die der dritten Stufe angehören und den drei cyclischen G_2 der Tetraedergruppe entsprechen. Es wird sonach die einzelne Γ_6 immer zwei von unseren sechs gleichberechtigten Γ_{36} ausgezeichnet enthalten. Γ_6 giebt übrigens, bezüglich einer zugehörigen Γ_{36} reduciert, eine endliche G_6, an der man sofort den Diedertypus erkennt.

Da können wir denn auch sofort weiter die dritte Einheitswurzel angeben, welche z. B. $\sqrt[3]{\xi - 1}$ bei Ausübung einer Operation der zugehörigen Γ_6 als Factor annimmt. Wir werden z. B. für eine der Identität modulo 3 congruente Substitution ansetzen können:

$$\sqrt[3]{\xi - 1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = \varkappa \cdot \sqrt[3]{\xi - 1}\,(\omega),$$

wo $\varkappa$ die zu bestimmende dritte Einheitswurzel ist. Hier übe man auf ω die unter (1) gegebene Substitution $v_{\delta, \frac{1}{3}\gamma}$ aus und findet:

$$\sqrt[3]{\xi - 1}\,(\omega + \alpha\gamma + \beta\delta) = \varkappa \cdot \sqrt[3]{\xi - 1}\,(\omega).$$

Indem man dann noch direct das Verhalten unseres Moduls bei Anwendung von S^3 feststellt, kommt sofort:

$$(2) \qquad \sqrt[3]{\xi - 1}\left(\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right) = e^{-\frac{2\pi i}{9}(\alpha\gamma + \beta\delta)} \cdot \sqrt[3]{\xi - 1}\,(\omega),$$

eine Formel, die sich der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen direct an die Seite stellt.

Ganz entsprechende Überlegungen gelten für μ. Da haben wir, um auch das noch kurz zusammenzufassen, in $\sqrt{\mu}$ einen Congruenzmodul achter Stufe, dessen Γ_{48} sich zufolge (9) p. 663 aus allen mit

$$(3) \qquad v_{a,b}(\omega) \equiv \frac{a\omega + 2 - 2\left(\frac{2}{a}\right)}{4b\omega + a}, \pmod 8$$

congruenten Operationen zusammensetzt. In gewohnter Weise schliessen wir daraus weiter, dass $\sqrt{\mu}$ bei einer beliebigen Substitution mit $\gamma \equiv 0$ (mod. 4) die Änderung erleidet:

$$\sqrt{\mu}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{-\frac{\pi i}{4}\alpha\beta}\sqrt{\mu}. \tag{4}$$

Besonders interessant aber dürfte sein, dass wir in $\sqrt[8]{1-\mu^4}$ einen Congruenzmodul der 32sten Stufe haben. Dies würden wir ganz wohl in unserer bisher üblichen Art beweisen können; inzwischen gewinnen wir hier durch Gebrauch der sogenannten Transformation zweiten Grades eine derartige Erleichterung des Verfahrens, dass wir nicht umhin können, dieselbe heranzuziehen, wenn auch ihre ausführliche Besprechung an eine andere Stelle unseres Werkes gehört. Man bilde sich, indem man $\frac{\omega}{2}$ an Stelle von ω setzt, die eindeutige Function $\mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$ von ω und übe auf dieselbe eine beliebige mit der Identität modulo 2 congruente Substitution aus. Es kommt:

$$\mu^4\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = \mu^4\left(\frac{\alpha\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\gamma\left(\frac{\omega}{2}\right)+\delta}\right) = \mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right);$$

denn es ist offenbar

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \frac{\beta}{2} \\ 2\gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & \pm\frac{\beta}{2} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \text{ (mod. 4)}.$$

Wir schliessen ohne weiteres auf die Existenz einer Gleichung $\mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right) = R(\lambda(\omega))$ und merken uns sogleich, dass die linke Seite dieser Gleichung in $i\infty$, 0, 1 des Polygons zweiter Stufe (Fig. 68, p. 279) gleich ∞ bez. 1, 0 wird, während im Innern des Polygons jedenfalls Null- oder Unstetigkeitsstellen nicht mehr auftreten. Bei der Werteverteilung des λ folgt sogleich, dass $1-\mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right)$ mit einer ganzen positiven Potenz von λ proportional ist:

$$1-\mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right) = c\,\lambda^a,$$

wo wir nun zur Auswertung von a und c die Annäherung bei $\omega = i\infty$ für die rechte und linke Seite dieser Gleichung nach (5) und (6) p. 614 berechnen. Durch Vergleich findet sich aufs leichteste:

$$1-\mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right) = \lambda(\omega). \tag{5}$$

Üben wir gleich noch auf ω die Operation $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$ aus, so kommt bei der bekannten Wirkung derselben auf μ und λ die Gleichung:

$$1 - \frac{1}{\mu^4\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\lambda(\omega)}{\lambda(\omega) - 1}. \tag{6}$$

Nunmehr ziehe man aus (5) rechter und linker Hand die achte Wurzel und schreibe 2ω für ω:

$$\sqrt[8]{1 - \mu^4(\omega)} = \sqrt[8]{\lambda(2\omega)}.$$

Wird auf ω eine mit 1 mod. 32 congruente Substitution ausgeübt, so erfährt dabei, wie man leicht berechnet, 2ω eine mod. 16 mit 1 congruente Substitution. Die rechte Seite der letzten Gleichung bleibt bei dieser Substitution unverändert und also auch die linke, *welche demgemäss einen Congruenzmodul* 32ster *Stufe darstellt.*

Zur genaueren Betrachtung ist es zweckmässiger, aus (6) die achte Wurzel zu ziehen, wobei wir rechts direct die Function $\psi(\omega)$ erhalten (cf. (2) p. 665). Dieselbe bleibt bis auf eine vortretende Einheitswurzel bei jeder mod. 2 mit 1 congruenten Substitution unverändert. Wir sahen aber schon, dass die Ausführung einer derartigen Operation für $\frac{\omega}{2}$ eine solche Modulsubstitution nach sich zieht, die einen durch 4 teilbaren dritten Coefficienten hat. Des näheren ist jene Einheitswurzel $\left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{-\frac{\pi i}{8}\alpha\gamma}$, während die letztgemeinte Substitution $\begin{pmatrix} \alpha, & \frac{\beta}{2} \\ 2\gamma, & \delta \end{pmatrix}$ wird. Indem wir hier sogleich statt ω, β, γ bez. 2ω, 2β, $\frac{1}{2}\gamma$ schreiben, folgt aus alledem offenbar der Satz: *Übt man auf* ω *eine beliebige Substitution mit* $\gamma \equiv 0$, (mod. 4) *aus, so erfährt* $\frac{\sqrt[8]{\mu^4 - 1}}{\sqrt{\mu}}$ *die Änderung*:

$$\left[\frac{\sqrt[8]{\mu^4 - 1}}{\sqrt{\mu}}\right]' = \left(\frac{2}{\alpha}\right) e^{-\frac{\pi i}{16}\alpha\gamma} \cdot \frac{\sqrt[8]{\mu^4 - 1}}{\sqrt{\mu}}, \tag{7}$$

woraus denn noch durch Multiplication mit (4) entspringt:

$$\left(\sqrt[8]{\mu^4 - 1}\right)' = e^{-\frac{\pi i}{16}\alpha(\gamma + 4\beta)} \cdot \sqrt[8]{\mu^4 - 1}. \tag{8}$$

Als unmittelbare Folgerungen ziehen wir noch: *Die Bedingung* $4\beta + \gamma \equiv 0$, (mod. 32) *definiert eine Gruppe* Γ_{48} *der Stufe* 32 *vom Geschlechte* $p = 0$, die übrigens, wie wir nebenbei bemerken, eine von sechs gleichberechtigten Untergruppen Γ_{48} ist.

Einen wichtigen Gebrauch machen wir noch von den Formeln

$$\lambda_3\lambda_4(\lambda_3-\lambda_4)=-\frac{2}{\Delta},\quad \xi_3^{\,3}\xi_4-\xi_4^{\,4}=3\sqrt[3]{\Delta},$$

die im vorigen Kapitel (p. 629 u. f.) abgeleitet wurden. Wir entnehmen aus ihnen ohne weiteres:

$$(9)\qquad \sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}=-\frac{2}{\lambda_4\sqrt[3]{4\Delta}},\quad \sqrt{\xi^3-1}=\frac{\sqrt{3\Delta}}{\xi_4^{\,2}\sqrt[3]{\Delta}},$$

und also folgt aus den bezüglichen Angaben des vorigen Kapitels, *dass* $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$ *und* $\sqrt{\xi^3-1}$ *Congruenzmoduln der sechsten Stufe sind.* Ihr Verhalten gegenüber der Ausübung von Modulsubstitutionen entspringt ohne weiteres aus den Formeln (14) und (17) p. 627:

$$(10)\qquad \begin{aligned}\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}' &= \varrho^{-(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha\beta+\gamma\delta)}\cdot\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)};\quad \gamma\equiv 0,\ (\text{mod. } 2),\\ \sqrt{\xi^3-1}' &= (-1)^{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta}\cdot\sqrt{\xi^3-1};\quad \gamma\equiv 0,\ (\text{mod. } 3),\end{aligned}$$

wobei diese Formeln indessen nur für die rechts angehängten Congruenzbedingungen gelten. Ziehen wir noch aus den Tabellen p. 670 die unter der Bedingung $\gamma\equiv 0$, (mod. 2) gültige Formel heran:

$$(11)\qquad \sqrt[8]{\lambda(\lambda-1)}'=\left(\frac{2}{\alpha}\right)e^{-\frac{\pi i}{8}\alpha(2\beta+\gamma)}\cdot\sqrt[8]{\lambda(\lambda-1)},$$

so entspringt damit zugleich durch zweckmässige Combination von (10) und (11) das Verhalten *des Congruenzmoduls achtundvierzigster Stufe* $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$, der natürlich wieder Hauptmodul ist*). Hat man übrigens einmal den Congruenzcharakter der Wurzeln aus λ erkannt, so ist es nun ein Leichtes nachträglich zu zeigen, *dass unter allen Wurzeln* $\sqrt[n]{\lambda(\lambda-1)}$ *nur* $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ *und die aus ihr durch Erheben zu ganzen Potenzen entspringenden Wurzeln Congruenzmoduln sind* (vergl. Math. Ann. Bd. 28, p. 123 oder p. 117)**). Aus (9) sieht man übrigens,

*) Die Modulfunction $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ ist übrigens mit derjenigen Grösse gleichberechtigt, welche Hermite durch χ bezeichnet; vergleiche dessen Abhandlung: *Sur la résolution de l'équation du quatrième degré,* Comptes Rendus Bd. 46 (1858), woselbst auch eine Tabelle für das Verhalten von χ gegenüber linearen Substitutionen des ω berechnet wird.

**) Dieses Resultat ist um so wichtiger, als dadurch die frühere, durch Hermite vertretene Auffassung des Wesens der Wurzeln $\sqrt[n]{\lambda(\lambda-1)}$ eine grundsätzliche Modification erfährt. Hermite betont nämlich (in der eben genannten Abhandlung), dass man aus dem Producte der beiden Functionen $\varphi(\omega)$ und $\psi(\omega)$ auch noch durch Ausziehen der dritten Wurzel zu einer *eindeutigen* Function von ω gelange. Wie im Texte entwickelt, ist indessen die Hauptbedeutung gerade der *dritten* Wurzel $\sqrt[3]{\varphi\psi}$ nicht in deren Eindeutigkeit in ω zu suchen (denn diese kommt, wie wir wissen, allen Wurzeln aus $\varphi\psi$ zu), vielmehr ist $\sqrt[3]{\varphi\psi}$ durch ihre Eigenschaft als *Congruenzmodul* vor allen übrigen Grössen $\sqrt[n]{\varphi\psi}$ ausgezeichnet.

dass auch noch $\sqrt[4]{\xi^3 - 1}$ Congruenzmodul ist, und zwar der zwölften Stufe. Holen wir dann auch noch $\sqrt[3]{\xi - 1}$, $\sqrt[3]{\xi - \varrho}$ etc. heran, so können wir als zur 36sten Stufe gehörig den Hauptmodul $\sqrt[12]{\xi^3 - 1}$ aufstellen. — Ähnliche Entwicklungen könnten wir auch an μ und ζ knüpfen.

Es wurde schon gelegentlich betont, dass die in der überlieferten Theorie der elliptischen Functionen vorkommenden Moduln durchgehends Congruenzmoduln sind, und zwar gehören dieselben fast ausschliesslich den Stufen 2, 4, 8, d. i. allgemein 2^ν an, wie denn im Mittelpunkt dieser Entwicklungen die Moduln sechzehnter Stufe $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ stehen. Übrigens ist bei der nahen Verwandtschaft von λ und μ die Kenntnis der aus μ entspringenden Congruenzmoduln seit lange vorhanden, nur dass dieselben nicht aus dem μ als solchem, sondern vielmehr auf complicierterem Wege aus k, k' hergestellt werden. Wir wollen zur näheren Erläuterung dieser Beziehung hier noch einige von den aus μ herzustellenden Congruenzmoduln in k, k' umschreiben. Erstlich entspringt aus (2) p. 656 im Verein mit (3) p. 665:

$$\frac{\mu^2 + 1}{2\mu} = \frac{1}{k}, \quad \frac{\mu^2 - 1}{2\mu} = \frac{k'}{k};$$

durch Addition und Wurzelziehung folgt also:

$$\mu = \frac{1 + k'}{k}, \quad \sqrt{\mu} = \frac{\sqrt{1 + k'}}{\sqrt{k}}, \tag{12}$$

so dass wir in $\sqrt{1 + k'}$ einen Modul achter Stufe erkennen. Weiter folgt aus der ersten Formel (12) nach leichter Zwischenrechnung:

$$k' \left(\frac{1 + k'}{2}\right)^2 = \frac{(\mu^4 - 1)k^4}{16}.$$

Durch Ausziehen der achten Wurzel entspringt rechts ein Congruenzmodul 32ster Stufe; also gehört auch

$$\sqrt[4]{\frac{1 + k'}{2}\sqrt{k'}} \tag{13}$$

als Congruenzmodul der Stufe 32 an. Dass übrigens $\sqrt[12]{kk'}$ Congruenzmodul 48ster Stufe ist, wird man aus (9) und (11) sofort entnehmen*).

*) Irrationalitäten der hier besprochenen Art finden sich zahlreich in der Abhandlung von Hrn. Schröter: *De aequationibus modularibus*, Regiomonti, 1854; im übrigen sehe man die sachlichen und litterarischen Zusammenstellungen in Enneper, *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, 2te Aufl. bearbeitet von Felix Müller (Halle, 1890) p. 471 u. f.

§ 7. Die aus den betrachteten Moduln zu bildenden Galois'schen Systeme.

In unseren voraufgehenden Entwicklungen sind wir insofern von unserem allgemeinen Programm abgewichen, als wir immer die einzelnen Hauptmoduln, nicht aber die von ihnen aus zu gewinnenden ausgezeichneten Untergruppen der Betrachtung unterwarfen. Es wird jetzt ein Leichtes sein, dass wir die so gemeinten ausgezeichneten Untergruppen noch nachträglich namhaft machen. Inzwischen lassen wir uns auf eingehendere Untersuchung derselben keineswegs ein, beziehen uns vielmehr in dieser Beziehung auf die in Betracht kommenden Originalarbeiten.

Indem wir hier die Stufen in natürlicher Folge anreihen, haben wir erstlich von den beiden Moduln sechster Stufe $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$ und $\sqrt{\xi^3-1}$ zu handeln. Für den ersten gehen wir auf die Darstellung (9) p. 674 zurück, wo man direct sieht*), dass er einer ist unter den drei gleichberechtigten Moduln:

$$(1) \qquad \frac{2}{\lambda_3\sqrt[3]{4\Delta}}, \quad \frac{2}{\lambda_4\sqrt[3]{4\Delta}}, \quad \frac{2}{(\lambda_3-\lambda_4)\sqrt[3]{4\Delta}}.$$

Wir schliessen sofort: Alle Modulsubstitutionen, welche die drei Moduln (1) in sich transformieren, bilden eine ausgezeichnete Γ_μ der Stufe 6 und eben deswegen des Geschlechtes $p = 1$. An Stelle von (1) können wir übrigens die beiden Moduln

$$(2) \qquad \lambda, \quad \sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$$

als Galois'sches System dieser Γ_μ brauchen, die dann durch die Relation vom Geschlechte 1:

$$[\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}]^3 - [\lambda]^2 + [\lambda] = 0$$

verknüpft sind. In der That lässt sich sofort jeder der Moduln (1) rational in λ, $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$ darstellen, wie auch umgekehrt λ rational in den Moduln (1). Zufolge (10) p. 674 enthält übrigens unsere Γ_μ alle den Bedingungen

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0, \ (\text{mod. } 2), \quad \alpha\beta + \gamma\delta \equiv 0, \ (\text{mod. } 3)$$

genügenden Substitutionen. Das sind mod. 6 genommen gerade vier, welche in dem p. 408 gegebenen Schema in der ersten Verticalreihe stehen. Merken wir uns also den Satz: *Das Modulsystem* λ, $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$ *definiert eine ausgezeichnete Congruenzgruppe sechster Stufe* Γ_{18}, *die alle mit*

*) Vergl. das Verhalten von λ_4, wie es durch Formel (2) p. 628 gegeben ist.

(3) $$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 2\\ 2, & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 4\\ 4, & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3, & 2\\ 4, & 3\end{pmatrix}, \text{ (mod. 6)}$$

congruenten Substitutionen umfasst.

Eine ganz ähnliche Entwicklung knüpft sich an $\sqrt{\xi^3 - 1}$. Wir haben da zufolge (9) p. 674 und (6) p. 630 das Galois'sche System

(4) $$\frac{\sqrt{3\Delta}}{\xi_4^2\sqrt[3]{\Delta}}, \quad \frac{\sqrt{3\Delta}}{(\xi_3 - \xi_4)^2\sqrt[3]{\Delta}}, \quad \frac{\sqrt{3\Delta}}{(\xi_3 - \varrho\xi_4)^2\sqrt[3]{\Delta}}, \quad \frac{\sqrt{3\Delta}}{(\xi_3 - \varrho^2\xi_4)^2\sqrt[3]{\Delta}};$$

aber dasselbe lässt sich durch

(5) $$\xi, \quad \sqrt{\xi^3 - 1}$$

ersetzen, für welche beiden Moduln alsdann die Relation

$$[\sqrt{\xi^3 - 1}]^2 - [\xi]^3 + 1 = 0$$

besteht. In der That sieht man zuvörderst leicht, dass sich die Moduln (4) mit Hülfe von ξ im ersten unter ihnen, d. i. in $\sqrt{\xi^3 - 1}$, rational darstellen. Umgekehrt haben wir durch Quotientenbildung aus (4) sofort die drei Moduln $(\xi - 1)^3$, $(\xi - \varrho)^3$, $(\xi - \varrho^2)^3$ und damit

$$-\frac{1}{6}\left\{(\xi - 1)^3 + \varrho^2(\xi - \varrho)^3 + \varrho(\xi - \varrho^2)^3\right\} = \xi.$$

Zufolge (10) p. 674 bleiben die Moduln (5) bei allen die Congruenzen

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0, \text{ (mod. 3)}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0 \text{ (mod. 2)}$$

befriedigenden Substitutionen ungeändert. Es sind dies, mod. 6 genommen, die drei als G_3 zusammengefassten Operationen in der ersten Horizontalreihe des Schemas p. 408. Also der Satz: *Die beiden Grössen* ξ *und* $\sqrt{\xi^3 - 1}$ *definieren eine ausgezeichnete Congruenzgruppe sechster Stufe* Γ_{24}, *die alle mit*

(6) $$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 3\\ 3, & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2, & 3\\ 3, & 5\end{pmatrix}, \text{ (mod. 6)}$$

congruenten Substitutionen enthält.

Fundamentalpolygone F_{18} und F_{24} für unsere Untergruppen sondern wir innerhalb der Fig. 84 p. 365 aufs leichteste ab. Dieselben haben in einfachster Weise die Gestalt regulärer Sechsecke, wo wir dann jedesmal je zwei gegenüberliegende Seiten einander zuzuweisen haben*).

Weiter verweilen wir einen Augenblick bei den drei gleichberechtigten Moduln achter Stufe $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{1 - \lambda}$, $\sqrt[4]{\frac{\lambda}{\lambda - 1}}$. Da der dritte rational in den beiden ersten ist, so haben wir bereits in

*) Man vergleiche die Arbeit des Herausgebers: *Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe,* Math. Ann. Bd. 28 (1886), insbesondere p. 103 und 118.

$$\sqrt[4]{\lambda},\ \sqrt[4]{1-\lambda} \tag{7}$$

ein Galois'sches System für eine ausgezeichnete Γ_μ der achten Stufe. Die zu dem einen unserer drei Moduln gehörende Γ_{24} ist in (6) p. 662 definiert. Bilden wir dann $\Gamma_{24'} = T\Gamma_{24}T$ und sammeln die gemeinsamen Substitutionen von Γ_{24} und $\Gamma_{24'}$, so erhalten wir für die ausgezeichnete Γ_μ insgesamt die beiden Typen:

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5, & 0\\ 0, & 5\end{pmatrix},\ (\text{mod. } 8). \tag{8}$$

Da aber mod. 8 im ganzen 192 incongruente Substitutionen existieren, so haben wir den Satz: *Zum Modulsystem* (7) *gehört eine ausgezeichnete* Γ_{96} *der Stufe* 8, *die durch* (8) *direct definiert ist und deren Geschlecht sich als* $p = 3$ *findet.* Die Grössen (7) sind an einander geheftet durch die Relation:

$$[\sqrt[4]{\lambda}]^4 + [\sqrt[4]{1-\lambda}]^4 = 1,$$

die wir im Sinne unserer allgemeinen Theorie (p. 559 u. f.) als Gleichung einer ebenen Curve vierter Ordnung deuten werden. Da haben wir also direct die für unser Gebilde $p = 3$ existierende Normalcurve der φ*).

Ganz kurz erwähnen wir noch, dass die drei Moduln

$$\sqrt{\mu},\ \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}},\ \sqrt{\frac{\mu+i}{\mu-i}} \tag{9}$$

ein Galois'sches System für die Hauptcongruenzgruppe Γ_{192} achter Stufe abgeben, und dass das System

$$\sqrt[3]{\xi-1},\ \sqrt[3]{\xi-\varrho},\ \sqrt[3]{\xi-\varrho^2} \tag{10}$$

in demselben Sinne zur neunten Stufe gehört. Endlich geben

$$\sqrt[8]{\lambda},\ \sqrt[8]{1-\lambda} \tag{11}$$

ein volles Modulsystem für eine ausgezeichnete Γ_{384} der Stufe 16, die durch die Congruenzen

---

*) Man vergleiche hierzu zwei Arbeiten von Hrn. Dyck im 17ten Bande der Math. Ann. (1880). In der ersten (*Über Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen*, l. c. p. 473) wird das Polygon F_{96} mitgeteilt und die Zerlegung der G_{96} geleistet; in der zweiten Arbeit (*Notis über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige Normalcurve vierter Ordnung*, l. c. p. 510) untersucht Hr. Dyck die im Texte gerade erwähnte C_4 und zieht insbesondere eine Reihe invariantentheoretischer Folgerungen aus dem Umstande, dass diese C_4 eine Gruppe von 96 *Collineationen* in sich zulässt.

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5, & 8\\ 8, & 13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9, & 0\\ 0, & 9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}13, & 8\\ 8, & 5\end{pmatrix}, \text{ (mod. 16)}$$

definiert ist. Man entnimmt alle diese Angaben ohne besondere Mühe aus den bezüglichen Entwicklungen des § 3*).

§ 8. Aufstellung einiger Congruenzgruppen sechster Stufe**).

Nachdem wir bereits im Voraufgehenden mehrfach die sechste Stufe gestreift haben, schreiten wir jetzt zu einer mehr systematischen Betrachtung derselben und wollen zu dem Ende vorab einige wichtige Congruenzgruppen sechster Stufe namhaft machen. Wir gehen zuvörderst auf die beiden soeben schon betrachteten Γ_{18} und Γ_{24} zurück, die, modulo 6 reduciert, zwei Gruppen vierter bez. dritter Ordnung liefern, welche wir kurz g_4 und g_3 nennen wollen. Dieselben umfassen bez. die Substitutionen:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} g_4&: \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 2\\ 2, & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 4\\ 4, & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3, & 2\\ 4, & 3\end{pmatrix}\\ g_3&: \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 3\\ 3, & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2, & 3\\ 3, & 5\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}, \text{ (mod. 6).}$$

Demnächst ziehen wir die Substitution S heran und legen zur Untersuchung derselben das in Fig. 84, p. 365 gegebene Polygon F_{72} der Γ_{72} heran. S bedeutet eine Drehung von F_{72} um den Mittelpunkt des Sechsecks durch den Winkel $\frac{\pi}{3}$. Man wolle sich da erinnern, wie sich die auf dem Rande des Sechsecks gelegenen Dreiecksecken zu Punkten c zusammenlegen (p. 366) und wird dann leicht bemerken, dass bei Ausübung von S unter den zwölf Punkten c der geschlossenen F_{12} nur der *eine* der Stelle $\omega = i\infty$ entsprechende Punkt c fest bleibt. Da S modulo 6 die Periode 6 hat, so folgt sofort: *Die aus S zu erzeugende cyclische G_6 ist eine unter zwölf gleichberechtigten Untergruppen der G_{72}.*

In dieser aus S entspringenden Gruppe G_6 bilden die drei Ope-

*) Für die in diesem Paragraphen zur Betrachtung gekommenen Stufen findet man eine Reihe von Resolventen in Hrn. Gierster's Arbeit: *Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad*, Math. Annalen Bd. 14 (1878).

**) Für die den Abschluss des gegenwärtigen Kapitels bildenden Paragraphen vergleiche man die Arbeit des Herausgebers: *Die Congruenzgruppen sechster Stufe*, Math. Ann. Bd. 29 (1886), sowie namentlich die dort beigegebene Figurentafel. Übrigens wurde die hier zur Darstellung kommende Behandlung der sechsten Stufe erst neuerdings vom Herausgeber durchgeführt.

rationen 1, S^2, S^4 eine cyclische G_3, bei der ausser dem Mittelpunkte der Fig. 84 noch die beiden weiteren Punkte c in sich übergehen, die sich aus den sechs Ecken des Sechsecks zusammensetzen. Indem also G_3, wie wir kurz sagen, um drei unter den zwölf Punkten c dreht, wird G_3 eine unter vier gleichberechtigten Untergruppen der G_{72} sein. *Ihnen entsprechend haben wir vier gleichberechtigte Congruenzgruppen* Γ_{24}, *deren einzelne demgemäss in einer* Γ_4 *relativ ausgezeichnet ist.* Die einzelne dieser Γ_4 reduciert sich aber, bezüglich ihrer Γ_{24} genommen, auf eine endliche G_6, deren Typus wir sogleich feststellen wollen.

Zu solchem Ende schneiden wir uns aus Fig. 84 ein Polygon F_{24} für unsere Γ_{24} aus, indem wir vom Mittelpunkt der Figur nach den beiden Ecken c_6 und c_7 zwei geradlinig verlaufende Schnitte führen. Der damit entspringende rautenförmige Dreieckscomplex ist dann dadurch zum Polygon F_{24} auszugestalten, dass wir einerseits die beiden eben entspringenden Schnittränder, fürs zweite aber die beiden in Fig. 84 durch 1 und 6 bezeichneten Sechseckseiten einander zuordnen. Wir sehen sofort: Γ_{24} *ist vom Geschlechte* $p = 0$ *und also* G_6 *entweder cyclisch oder diedrisch.* Indem wir aber F_{24} auf Grund der Kantenzuordnung zur vollständig bedeckten Ebene auseinander biegen, entspringt Fig. 101. Da liefert die in Fig. 84 unser F_{24} vom Mittelpunkt nach c_5 durchziehende Symmetrielinie das mittlere Stück der Fig. 101 vertical teilenden Symmetrielinie. Die Fortsetzungen der letzteren Linie nach oben und unten werden alsdann durch diejenigen beiden Paare von Randcurven gebildet, die wir im Polygon F_{24} soeben einander zuordneten. Mit diesen Angaben wird es leicht gelingen, in die gegenseitige Beziehung unserer beiden Figuren klaren Einblick zu gewinnen. Hier sehen wir nun in Fig. 101 die vier Symmetriekreise der Diederteilung (Fig. 12, p. 70) direct vor Augen: *Die zur* Γ_{24} *im obigen Sinne gehörende* G_6 *ist also eine Diedergruppe,* ein Umstand, den wir baldigst functionentheoretisch zu verwerten haben.

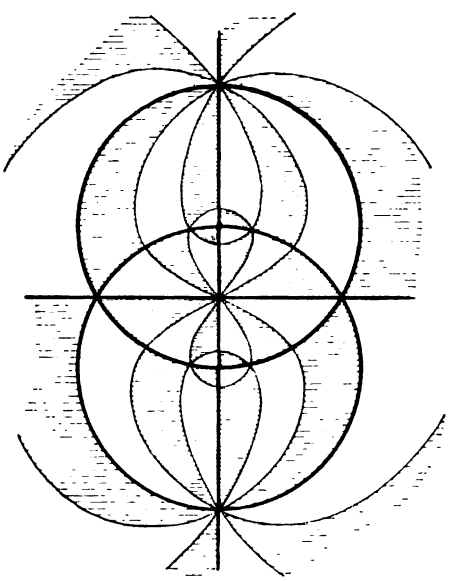


Fig. 101.

Merken wir uns sogleich noch, dass wir als Repräsentantensystem

der zur Γ_{24} gehörenden Γ_4 die vier unter (1) gegebenen Operationen der g_4 ansehen können*). Wenn wir also durch Γ_{24}, Γ'_{24}, Γ''_{24}, Γ'''_{24} unsere vier gleichberechtigten Untergruppen bezeichnen, *entspringen sie alle aus der ersten unter ihnen durch die vier Operationen der* g_4.

Indem wir auf die anfänglich aus S hergestellte G_6 zurückgehen, verfolgen wir nun in ähnlicher Weise deren aus 1, S^3 bestehende Untergruppe G_2. Bei Ausübung von S^3 bleiben aber ausser dem Mittelpunkte in Fig. 84 noch die weiteren drei Punkte c an Ort und Stelle, welche aus den Mittelpunkten der Sechseckseiten hervorgehen. Indem wir also insgesamt vier Fixpunkte haben, *entspringen drei gleichberechtigte* G_2 *und demnach ebensoviele gleichberechtigte Congruenzgruppen* Γ_{36}. Die einzelne Γ_{36} ist bei dieser Sachlage innerhalb einer Γ_3 ausgezeichnet, welch' letztere sich bezüglich der Γ_{36} auf eine endliche G_{12} reduciert. Es liegt uns wieder die Aufgabe ob, die Structur derselben in Erfahrung zu bringen.

Indem wir Fig. 84 längs der horizontal durch ihre Mitte ziehenden Symmetrielinie zerschneiden, können wir etwa aus der unteren Hälfte durch geeignete Zusammenordnung der Randlinien ein Polygon F_{36} für unsere Γ_{36} herstellen. Wir müssen da, wie man durch leichte Betrachtung findet, die rechte Hälfte des eben geführten Schnittes der linken zuordnen, sodann bei den Sechseckseiten 1 und 6 jeweils gleichfalls die eine Hälfte der einzelnen Seite der anderen; endlich aber bleiben noch die beiden verticalen nach rechts und links unser Polygon F_{36} begrenzenden Geraden einander zuzuordnen. Wir folgern vor allen Dingen wieder: *Unsere* Γ_{36} *gehört zum Geschlechte* $p = 0$, *und also ist* G_{12} *eine in der Theorie der regulären Körper auftretende Gruppe.*

Die Zusammenlegung des Polygons F_{36} zur geschlossenen Fläche gestaltet sich hier in besonders übersichtlicher Weise. Indem wir diejenigen Punkte c der Fig. 84, bei denen die Nummern 1, 2, 5, 6 geschrieben sind, kurz als Punkte 1, 2, 5, 6 benennen, den Mittelpunkt der Fig. 84 aber kurz als Punkt 0 bezeichnen, fixiere man die fünf geraden Verbindungslinien der folgenden, jedesmal in eine Klammer neben einander gestellten Punkte: (0, 1), (0, 6), (5, 6), (6, 1), (1, 2). Längs dieser Linien denke man das Polygon F_{36} eingeknickt, wobei es nun gelingt, ohne weitere Formänderungen aus F_{36} ein gewöhnliches reguläres Tetraeder herzustellen. Indem wir dasselbe aus seinem Mittelpunkt auf eine concentrische Kugeloberfläche projicieren, diese dann aber stereographisch in geeigneter Weise auf eine Ebene be-

*) Man zeigt nämlich sofort, dass Γ_{24} unter den Operationen der g_4 nur durch die erste in sich transformiert wird.

ziehen, entspringt Fig. 102. In derselben sehen wir sofort die Symmetriekreise der *Tetraederteilung* vor Augen, *und also ist unsere* G_{12} *eine Tetraedergruppe.*

Wir haben solchergestalt zwei interessante Beispiele für unsere allgemeinen Erörterungen über relativ ausgezeichnete Untergruppen

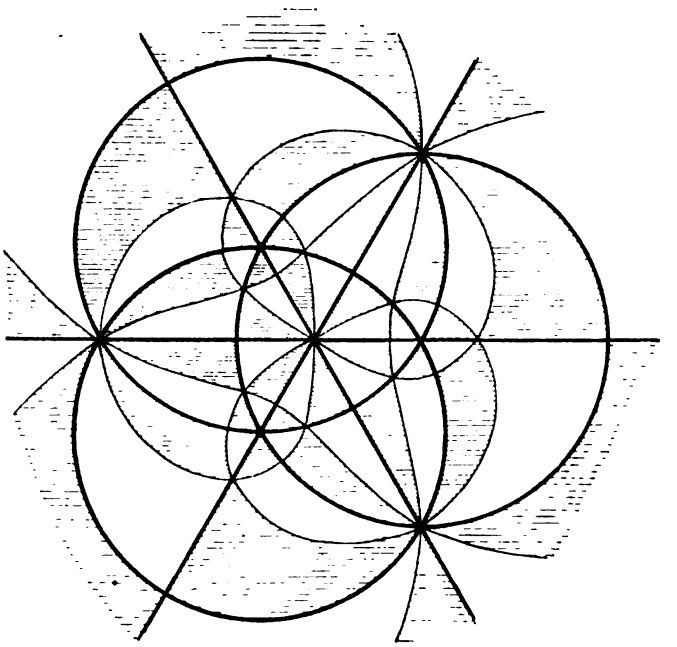


Fig. 102.

vom Geschlechte $p = 0$ erhalten, die wir nun sogleich noch für die functionentheoretische Behandlung der sechsten Stufe specificieren. Merken wir uns vorab noch, *dass die mit* Γ_{36} *gleichberechtigten Untergruppen aus ihr durch Transformation vermöge der unter* (1) *gegebenen Operationen der ausgezeichneten* g_3 *entspringen.*

§ 9. Die Congruenzmoduln sechster Stufe $y(\omega)$ und $x(\omega)$.

Die Untergruppen Γ_{24} des vorigen Paragraphen waren vom Geschlechte Null; es gehört also zu der einzelnen unter ihnen, z. B. zu der soeben besonders betrachteten Γ_{24}, ein Hauptmodul, den wir wegen seiner durch Fig. 101 begründeten Verwandtschaft mit der Diederirrationalität λ durch $l(\omega)$ bezeichnen. Für die Fixierung von $l(\omega)$ halten wir an den Vorschriften der Fig. 12, p. 70 fest, wobei wir dann noch zu bestimmen haben, dass der obere Teil der verticalen Symmetrielinie der Fig. 101 die positive reelle l-Axe sein soll. Gehen

wir auf dieser Symmetrielinie von oben nach unten, so durchschneidet sie die übrigen Symmetriekreise der Fig. 101 der Reihe nach in den Punkten $l = \infty, 2, 1, \frac{1}{2}, 0, -1$. Indem wir diese Punkte rückwärts im Polygon F_{24} verfolgen und von da ab in die ω-Halbebene zurückverlegen, finden sich als zugehörige Werte von ω bez. $\pm\frac{2}{3}$, $\pm 1, i\infty, 0, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}$.

Unter den 24 mit l gleichberechtigten Moduln sind sechs lineare Functionen von l, deren Gestalt man auf p. 15 unten angegeben findet. Diese sechs Substitutionen des l bilden eine Diedergruppe G_6, und es wird insbesondere den drei unter (1) p. 679 gegebenen Operationen der ausgezeichneten g_3 die in dieser Diedergruppe enthaltene ausgezeichnete G_3 entsprechen. Thatsächlich wird ja, wie man noch nachträglich bestätigen wolle, unsere Γ_{24} durch die Operationen der g_3 in sich transformiert, und wir finden leicht:

$$(1) \qquad l\left(\frac{\omega+3}{3\omega+10}\right) = \frac{l(\omega)-1}{l(\omega)}, \quad l\left(\frac{2\omega+3}{3\omega+5}\right) = \frac{1}{1-l(\omega)}.$$

Andrerseits haben wir für die Operation S:

$$(2) \qquad l(\omega+1) = \frac{1}{l(\omega)}.$$

Für einige noch durchzuführende Rechnungen setzen wir jetzt an Stelle von $l(\omega)$ zweckmässig

$$(3) \qquad y(\omega) = \frac{1+l(\omega)}{1-l(\omega)}$$

als Hauptmodul der Γ_{24} an. Aus den für l gemachten Angaben findet sich dann für $y(\omega)$ ohne weiteres die Werteverteilung:

$$(4) \qquad \begin{gathered} y(i\infty) = \infty, \quad y(0) = 3, \quad y\left(\pm\tfrac{1}{2}\right) = 0, \\ y(\pm 1) = -3, \quad y\left(\pm\tfrac{1}{3}\right) = 1, \quad y\left(\pm\tfrac{2}{3}\right) = -1. \end{gathered}$$

Die sechs linearen Substitutionen des y aber werden:

$$y' = \pm y, \quad y' = \pm\frac{y+3}{y-1}, \quad y' = \pm\frac{y-3}{y+1};$$

insbesondere haben wir den Formeln (1) und (2) entsprechend:

$$(5) \qquad \begin{gathered} y\left(\frac{\omega+3}{3\omega+10}\right) = \frac{y(\omega)-3}{y(\omega)+1}, \quad y\left(\frac{2\omega+3}{3\omega+5}\right) = -\frac{y(\omega)+3}{y(\omega)-1}, \\ y(\omega+1) = -y(\omega). \end{gathered}$$

Den Hauptmodul der vorhin besonders betrachteten Γ_{36} benennen wir wegen seiner Verwandtschaft zur Tetraederirrationalität ξ durch

$x(\omega)$ und halten an der üblichen Werteverteilung fest, nach welcher die vier Tetraederecken die Werte $x = \infty$, 1, ϱ, ϱ^2 bekommen. Indem wir wieder die Schnittpunkte der Symmetriekreise von Fig. 102 rückwärts in die ω-Halbebene verlegen, findet sich als Werteverteilung für $x(\omega)$ die folgende:

$$\begin{aligned} &x(i\infty) = \infty, \quad x\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \varrho^2, \quad x\left(\tfrac{1}{2}\right) = \varrho, \quad x\left(\tfrac{3}{2}\right) = 1, \\ &x\left(\tfrac{1}{3}\right) = 0, \quad x(0) = -2, \quad x(-1) = -2\varrho, \quad x(1) = -2\varrho^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Die zwölf Substitutionen des x sind nach p. 615 durch:

$$x' = \varrho^\alpha x, \quad x' = \varrho^\alpha \frac{x + 2\varrho^\beta}{x - \varrho^\beta}$$

gegeben, und es liefert uns insbesondere die in (1) p. 679 geschriebene g_4 die ausgezeichnete Vierergruppe innerhalb der Tetraedergruppe:

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\omega+2}{2\omega+5}\right) &= \frac{\varrho\, x(\omega) + 2\varrho^2}{x(\omega) - \varrho}, \quad x\left(\frac{\omega+4}{4\omega+17}\right) = \frac{\varrho^2 x(\omega) + 2\varrho}{x(\omega) - \varrho^2}, \\ x\left(\frac{3\omega+2}{4\omega+3}\right) &= \frac{x(\omega)+2}{x(\omega)-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

während wir andererseits für S leicht berechnen:

$$x(\omega + 1) = \varrho^2 \cdot x(\omega). \tag{8}$$

Auf der geschlossenen Fläche F_{72} ist y eine dreiwertige, x aber eine zweiwertige Function; beide Functionen zusammengenommen werden sonach genügen, den einzelnen Punkt der Fläche zu definieren: *Die beiden Moduln $x(\omega)$, $y(\omega)$ bilden ein Galois'sches System für die Hauptcongruenzgruppe sechster Stufe* Γ_{72}. Um die zwischen ihnen bestehende Relation in Erfahrung zu bringen, bemerke man, dass y^2 und x^3 zwei auf dem Gesamtpolygon F_{72} sechswertige Functionen sind, die zufolge (5) und (8) bei Ausübung der Substitution S unverändert bleiben. Sie sind demnach *ein*wertige Functionen auf dem Polygon Γ_{12} der aus S entspringenden G_6 des Geschlechtes $p = 0$, und also wird z. B. y^2 eine lineare Function von x^3 sein*). Setzen wir sogleich hinzu, dass diese lineare Function eine ganze Function ist, da y^2 und x^3 bei $\omega = i\infty$ zugleich unendlich werden. Man schreibe demnach vorläufig:

$$y^2 = ax^3 + b$$

und substituiere zur Bestimmung von a und b für ω in diese Glei-

*) Die Wurzel τ der von Hrn. Gierster l. c. (Math. Ann. Bd. 14) p. 541 unter No. 2 berechneten Resolvente zwölften Grades ist:

$$\tau = \frac{36}{y^2 - 9} = -\frac{36}{x^3 + 8}.$$

chung nach einander die beiden Werte $0, \frac{1}{2}$. Indem wir für x und y die bezüglichen unter (4) und (6) gegebenen Werte eintragen, kommen zwei lineare Gleichungen für a und b, aus denen wir $a = -b = -1$ berechnen. *Die zwischen x und y bestehende Relation ist also:*

$$x^3 + y^2 = 1. \tag{9}$$

Als mit y gleichberechtigte Moduln haben wir nach den Mitteilungen des vorigen Paragraphen die folgenden:

$$y_1(\omega) = y\left(\frac{\omega+2}{2\omega+5}\right), \quad y_2(\omega) = y\left(\frac{\omega+4}{4\omega+17}\right), \quad y_3(\omega) = y\left(\frac{3\omega+2}{4\omega+3}\right).$$

Dieselben werden im Modulsystem der x, y rationale Functionen sein, und wir nehmen uns vor, die Gestalt dieser Functionen $y_i = R_i(x, y)$ in Erfahrung zu bringen. Da unabhängig von ω stets $y^2 = 1 - x^3$ ist, so folgt aus Formel (7) für y_1 zunächst

$$y_1^2 = 1 - \left(\frac{\varrho x + 2\varrho^2}{x - \varrho}\right)^3 = \frac{-9(x^2\varrho + x\varrho^2 + 1)}{(x-\varrho)^3}.$$

Hier muss es nun möglich sein, die rechte Seite mit Hülfe von y derart umzugestalten, dass das Quadrat einer rationalen Function von x und y dasteht. Thatsächlich folgt durch Erweiterung mit $(x - \varrho)$ nach elementarer Zwischenrechnung:

$$y_1^2 = \frac{9(1-x^3)}{(\varrho^2 x - 1)^4} = \left\{\frac{3y}{(\varrho^2 x - 1)^2}\right\}^2.$$

Beim Ausziehen der Quadratwurzel setzen wir behufs Bestimmung des Vorzeichens etwa den Specialwert $\omega = -1$ ein und finden:

$$y_1 = -\frac{3y}{(\varrho^2 x - 1)^2}.$$

Indem wir auch noch die beiden andern Formeln (7) verwerten, *findet sich insgesamt für die Moduln y_1, y_2, y_3 die Darstellung:*

$$y_1 = \frac{-3y}{(\varrho^2 x - 1)^2}, \quad y_2 = \frac{-3y}{(\varrho x - 1)^2}, \quad y_3 = \frac{-3y}{(x-1)^2}. \tag{10}$$

Wiederum in völlig analoger Weise erledigt sich x. Da haben wir für die drei gleichberechtigten Γ_{36} als Hauptmoduln neben x:

$$x_1(\omega) = x\left(\frac{\omega+3}{3\omega+10}\right), \quad x_2(\omega) = \left(\frac{2\omega+3}{3\omega+5}\right),$$

deren Ausdrücke in x, y wir von den Formeln (5) aus leicht berechnen. In der That ist z. B.

$$x_1^3 = 1 - \left(\frac{y-3}{y+1}\right)^2 = \frac{8(y-1)}{(y+1)^2}.$$

Hier folgt durch Erweiterung mit $(y + 1)$:

$$x_1^3 = \frac{8(y^2-1)}{(y+1)^3} = \left(\frac{-2x}{y+1}\right)^3,$$

wo wir nun beim Ausziehen der dritten Wurzel die vortretende Einheitswurzel durch den Specialwert $\omega = -4$ bestimmen. *Wir finden auf solche Weise für die Moduln x_1, x_2 die Darstellungen in x, y:*

$$x_1 = \frac{-2x}{y+1}, \quad x_2 = \frac{2x}{y-1}. \tag{11}$$

Wir werden diese Formeln sogleich zu einer weiteren Anwendung benutzen.

§ 10. Die 72 Transformationen der C_3 in sich. Geometrische Sätze.

Vermöge des Modulsystems x, y haben wir im vorigen Paragraphen das Polygon F_{72} eindeutig auf die durch

$$y^2 = -x^3 + 1 \tag{1}$$

dargestellte ebene Curve dritter Ordnung bezogen. Indem wir Gleichung (1) mit der allgemeinen Gleichung (1) p. 539 vergleichen, sehen wir, dass für unser algebraisches Gebilde des Geschlechtes 1 die rationale Invariante g_2 verschwindet. Wir haben es also hier mit dem *äquianharmonischen* Falle eines elliptischen Gebildes zu thun (cf. p. 13 oben). Der G_{72} entsprechend wird unsere C_3 *eine Gruppe von 72 eindeutigen Transformationen* in sich zulassen, als deren Erzeugende wir

$$\begin{aligned} S\colon\ & x' = \varrho^2 x, && y' = -y, \\ T\colon\ & x' = \frac{2x+2y-1}{2x-y+1}, && y' = \frac{3(x-1)^2+3y}{(x-1)^2-3y} \end{aligned} \tag{2}$$

berechnen*).

Hier tritt nun die Frage ein, wie viele unter diesen 72 Transformationen in einfachster Weise Collineationen sind, und wir teilen in diesem Betracht vorerst den Satz mit, dass eine elliptische C_3 im äquianharmonischen Falle insgesamt 54 Collineationen in sich gestattet. Im allgemeinen Falle haben wir deren freilich nur 18; hier aber tritt zu der sogemeinten G_{18} als neue Collineation noch die Operation $x' = \varrho x$ der Periode drei, woraus die G_{54} entspringt.

Bilden wir uns sogleich die transcendente Darstellung dieser Collineationsgruppen vermöge des zu unserem elliptischen Gebilde gehörenden Integrals erster Gattung u. Schon wiederholt bemerkten wir, dass dieses Integral nichts anderes als die s-Function ist, in

*) Die beiden letzteren Formeln stellt man sofort durch Combination von $\binom{3,2}{4,3}$ und $\binom{2,3}{3,5}$ unter nachheriger Anwendung von S^3 her; die Wirkung letzterer Substitutionen aber auf x und y ist im vorigen Paragraphen angegeben.

deren Ebene Fig. 84, p. 365 wir unser Polygon F_{72} einlagerten. Dieses Sechseck müssen wir sonach durch erlaubte Abänderung in das bezügliche Periodenparallelogramm umwandeln können, was man in der That aufs leichteste ausführen wird. Insbesondere kann man solches in der Weise thun, dass den Erzeugenden S und T die Substitutionen:

$$(3) \qquad S\colon u' = -\rho^2 u, \quad T\colon u' = -u + \frac{\omega_1 + \omega_2}{6}$$

von u entsprechen, unter ω_1, ω_2 die Perioden unseres elliptischen Gebildes verstanden. Unter Gebrauch der damit in Vorbereitung gebrachten Bezeichnungsweise stellt sich die im allgemeinen Falle für eine ebene elliptische C_3 existierende Collineationsgruppe transcendent in der Form:

$$(4) \qquad u' = \pm u + \frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{3}$$

dar, womit im äquianharmonischen Falle noch $u' = \rho u$ zu combinieren ist*).

Indem wir zu unserer speciellen C_3 und zu ihrer G_{72} zurückkehren, wird die letztere Gruppe mit der jetzt wiederholt genannten Collineationsgruppe G_{54} höchstens eine Untergruppe G_{18} gemein haben. In der That aber findet man der Operation $\begin{pmatrix} 1, & 3 \\ 3, & 10 \end{pmatrix}$ der Periode drei entsprechend:

$$(5) \qquad x' : y' : 1 = -2x : (y-3) : (y+1),$$

woraus denn durch Combination mit der unter (2) *für S angegebenen Collineation wirklich eine in der G_{72} enthaltene G_{18} von Collineationen der C_3 in sich entspringt.* Nebenher führen wir noch an, dass diese G_{18} keineswegs die auch im allgemeinen Falle für eine C_3 existierende Collineationsgruppe ist, dass unsere G_{18} vielmehr mit dieser letztgemeinten Gruppe nur eine diedrische G_6 gemeinsam hat.

Wir bringen hier endlich noch eine interessante Anwendung derjenigen Sätze, welche die Theorie der elliptischen Functionen für die Betrachtung der ebenen Curven dritter Ordnung geliefert hat; es handelt sich dabei in erster Linie um Tangentenconstructionen an der C_3**), ohne dass wir indessen bei der elementaren Ableitung unserer mitzuteilenden Sätze ausführlich verweilen. Wir wollen die Lagerungs-

*) Man vergl. hier überall die Abhandlung von Klein, *Über die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung u. s. w.*, Abh. der Math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften, Bd. 13, insbesondere p. 357; wir kommen auf diese Theorie später noch zurück.

**) Vergl. die von Lindemann bearbeiteten Vorlesungen von Clebsch über Geometrie (Leipzig, 1876) p. 602 u. f.

verhältnisse derjenigen Punkte unserer C_3 charakterisieren, welche den Ecken a, b, c der Dreiecke des Polygons F_{72} entsprechen und stellen in diesem Betracht vorab den Satz auf, der unmittelbar aus der Gestalt des Polygons folgt: J, als rationale Function auf der C_3 gedeutet, nimmt den einzelnen complexen Wert in 72, im allgemeinen getrennt liegenden Punkten an; *nur für* $J = 1$ *fallen diese Punkte zu Paaren in die 36 Punkte a zusammen, für* $J = 0$ *zu dreien in die 24 Punkte b, für* $J = \infty$ *zu je sechs in die zwölf Punkte c.* Um mit diesen letzteren zwölf Punkten c zu beginnen, so besitzen, wie man leicht findet, drei unter ihnen die Argumente $u = 0$, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$, $\frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3}$. Nach bekannten Sätzen haben wir also in ihnen *Wendepunkte* der C_3 (1), und zwar sind dies die drei reellen Wendepunkte derselben, für welche die Wendetangenten durch die beiden Linien $y \pm 1 = 0$ und die unendlich ferne Gerade der xy-Ebene geliefert werden.

Von einem Wendepunkte aus kann man noch drei von der Wendetangente verschiedene Tangenten an die C_3 legen. Führen wir das von unseren drei reellen Wendepunkten aus, so entspringen neun fernere Punkte in den Berührungspunkten dieser Tangenten; *es sind damit die neun noch fehlenden Punkte c auf unserer* C_3 *markiert.*

Von jedem der eben gewonnenen neun Punkte lassen sich vier Tangenten an die C_3 legen, die Tangente in dem betreffenden Punkte selbst nicht mitgezählt. *In den 36 dabei entspringenden Berührungspunkten besitzen wir die 36 Punkte a der* C_3.

Endlich besitzen wir in den sechs imaginären Wendepunkten 6 unter den 24 Punkten b der C_3. *Die Berührungspunkte der* $3 \cdot 6$ *von ihnen aus noch möglichen Tangenten liefern den Rest der Punkte b.*

§ 11. Die Moduln $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$, $\sqrt{\xi^3-1}$. Die ausgezeichnete Γ_6.

Der Vollständigkeit halber fügen wir hier noch einige kurze Entwicklungen an, welche erstlich die Darstellung der Moduln sechster Stufe $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$, $\sqrt{\xi^3-1}$ im vollen Modulsystem x, y bezwecken, fürs zweite aber eine bislang noch nicht explicite genannte ausgezeichnete Congruenzgruppe vom Index 6 berücksichtigen sollen.

Wir knüpfen an den Umstand, dass die zum Modul $x(\omega)$ gehörende Γ_{36} Untergruppe der Hauptcongruenzgruppe Γ_{12} dritter Stufe ist, woraus wir umgekehrt entnehmen, dass ξ eine rationale Function dritten Grades von x ist: $\xi = R(x)$. Aber bei $\omega = i\infty$ werden ξ und x in gleichem Grade unendlich, so dass offenbar die im Zähler von R stehende ganze Function von x auf den dritten, die im Nenner stehende aber bis auf den zweiten Grad steigen wird. Sonach ist auch

noch $\frac{\xi}{x}$ vom dritten Grade in x, und da dieser Quotient sich gegenüber der Substitution S invariant verhält, so muss er linear in x^3 sein. So haben wir den Ansatz

$$\xi = \frac{ax^3 + b}{x^2}.$$

Hier tragen wir die Specialwerte $\omega = 0, \frac{1}{2}$ ein und finden auf solche Weise zwei Gleichungen für a und b, die zur Bestimmung dieser Coefficienten ausreichen. Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet λ, und wir finden solcherart für λ und ξ:

$$(1) \qquad \lambda = \frac{(3-y)^3(1+y)}{16y^3}, \quad \xi = \frac{x^3-4}{-3x^2}.$$

Von hier aus schliessen wir nun in folgender Weise weiter: Der Modul $\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)}$ bleibt bei der zu x gehörenden Γ_{36} invariant, $\sqrt{\xi^3-1}$ desgleichen bei der zu y gehörenden Γ_{24}. Indem wir also aus (1) den rationalen Ausdruck für $\lambda(\lambda-1)$ berechnen und an Stelle von y den Modul x einführen, muss die dritte Potenz einer rationalen Function von x entspringen. In gleicher Weise wird sich für (ξ^3-1) das Quadrat einer rationalen Function von y zeigen. Die Rechnung bestätigt das wirklich, indem sie nämlich auf die nachfolgenden Darstellungen der beiden in Rede stehenden Functionen führt:

$$(2) \qquad \sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)} = \frac{x(8+x^3)}{2^{\frac{8}{3}}(1-x^3)}, \quad \sqrt{\xi^3-1} = \frac{(y^3-9)y}{3^{\frac{3}{2}}(y^3-1)}.$$

Die noch zu besprechende Γ_6 gewinnen wir sehr leicht von $\sqrt[6]{\Delta}$ aus. Wir sahen schon früher, dass diese Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension zu einer ausgezeichneten homogenen Untergruppe sechster Stufe vom Index 6 gehört. Aber infolge der geraden Dimension von $\sqrt[6]{\Delta}$ in ω_1, ω_2 wird in dieser Untergruppe sicher auch die Operation T^2 enthalten sein, *so dass ihr beim Fortgang zu den nicht-homogenen Substitutionen eine ausgezeichnete nicht-homogene Γ_6 der sechsten Stufe entspricht.* Dieses ist die Gruppe, welche wir hier noch erwähnen mussten. Auf Grund von (14) und (17) p. 627 werden ihre Substitutionen durch die Congruenzen $\alpha\beta + \gamma\delta \equiv 0$, (mod. 3), $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0$, (mod. 2) charakterisiert sein, die sich übrigens mod. 6 genommen in die eine zusammenziehen lassen:

$$(3) \qquad \alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0, \text{ (mod. 6)}.$$

Nebenher bemerken wir, dass sich die Γ_6, modulo 6 genommen, auf eine ausgezeichnete G_{12} reduciert, welche den in der Note p. 476 erwähnten Typus zeigt. Die zu Anfang in § 8, p. 679 aufgestellten g_4 und g_3 sind Untergruppen der hier in Rede stehenden G_{12}.

Ein Galois'sches Modulsystem für unsere Γ_6 verschaffen wir uns aufs leichteste. Mit $\sqrt[6]{\Delta}$ werden zur Γ_6 offenbar auch die beiden Grössen:

$$\sqrt{J-1} = \frac{3\sqrt{3}\, g_3}{\sqrt{\Delta}}, \quad \sqrt[3]{J} = \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} \tag{4}$$

gehören, deren erste auf dem Polygon F_6 der Γ_6 dreiwertig, deren andere zweiwertig ist. *Zusammengenommen bilden sie also gerade das gesuchte Modulsystem und erscheinen an einander gebunden durch die Relation des Geschlechtes* $p = 1$:

$$(\sqrt{J-1})^2 = (\sqrt[3]{J})^3 - 1. \tag{5}$$

Von hier aus gewinnen wir eine sehr elegante Darstellung für das Integral erster Gattung sechster Stufe. Wir schreiben dasselbe unter Aufnahme eines numerischen Factors $\varkappa$ im Anschluss an (5):

$$u = \varkappa \int \frac{d\sqrt[3]{J}}{\sqrt{J-1}} = \frac{\varkappa i}{3} \int \frac{dJ}{J^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-J}}.$$

Nun aber entspringt durch Ausziehen der 6ten Wurzel aus der dritten Relation (5) p. 118 nach leichter Umgestaltung:

$$\sqrt[6]{\Delta}\,(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{dJ}{J^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-J}}.$$

Setzen wir also $\varkappa = -\pi i\sqrt{3}$, *so gelangen wir für* u *zur Darstellung*

$$u = \int \sqrt[6]{\Delta}\,(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_2), \tag{6}$$

womit sich umgekehrt $\sqrt[6]{\Delta}$ als eindeutige Modulform sechster Stufe direct in der Gestalt:

$$\sqrt[6]{\Delta} = \frac{du}{\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1} \tag{7}$$

darstellt. Auf Formel (6) werden wir noch gelegentlich zurückkommen müssen.

Dass wir übrigens für die ausgezeichneten Untergruppen Γ_{18}, Γ_{24}, Γ_{72} als zugehörige Integrale erster Gattung bis auf numerische Factoren gerade wieder die in (6) gegebene Function u gewinnen (was wir schon gelegentlich bemerkten), lässt sich nun hinterher leicht auch direct bestätigen. Erstlich nämlich kommt unter Gebrauch der Formeln (5) p. 15 und (1) p. 104 vermöge einer elementaren Zwischenrechnung die Identität:

$$\int \frac{d\sqrt[3]{J}}{\sqrt{J-1}} = \frac{-2}{\sqrt[6]{108}} \int \frac{d\lambda}{\sqrt[3]{\lambda^2(1-\lambda)^2}} = 2\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}},$$

wo wir nun rechts thatsächlich die zur Γ_{18} bez. Γ_{24} gehörenden Inte-

grale haben. Endlich stellt man unter Gebrauch der Formeln (1) und (2) von hier aus mühelos die Gleichung her:

$$\int \frac{d\sqrt[3]{J}}{\sqrt{J-1}} = 2\sqrt{3}\int \frac{dx}{y},$$

wo nun rechter Hand wirklich das zur Γ_{72} gehörende Integral erster Gattung steht.

Zum Schluss möge noch bemerkt sein, dass die hier gegebene Behandlung der Hauptcongruenzgruppe sechster Stufe Γ_{72} auch für die übrigen in der Modulgruppe enthaltenen ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechts $p = 1$ Anwendung gestatten. Inzwischen würde es zu weit führen, wenn wir auf dieselben hier noch ausführlich eingehen wollten*).

*) Man vergl. in diesem Betracht die Arbeit des Herausgebers: *Über die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind,* Math. Ann. Bd. 30 (1887).

Sechstes Kapitel.

Die Modulsysteme z_α und A_γ der siebenten Stufe*).

Um unseren p. 609 aufgestellten Plan der Untersuchung völlig zu erschöpfen, bleibt uns jetzt noch übrig, die zur Hauptcongruenzgruppe siebenter Stufe Γ_{168} gehörenden Modulfunctionen ausführlich zu betrachten. Diese Γ_{168} ist vom Geschlechte $p = 3$, und zwar gehört sie, wie wir wissen, zum allgemeinen (nicht hyperelliptischen) Falle, so dass wir von drei linear-unabhängigen Functionen φ aus ein zur Γ_{168} gehörendes volles Modulsystem gewinnen. Wir werden diese Functionen φ sogleich in zweckmässiger Weise zu drei Modulformen siebenter Stufe z_α ausgestalten und gewinnen in ihnen ein Grössensystem, dessen nähere Untersuchung zu den interessantesten Entwicklungen gehört, denen wir hier überhaupt begegnen. Von diesen Modulformen z_α aus definieren wir alsdann ein neues System von Moduln siebenter Stufe A_γ, dessen nähere Betrachtung das gegenwärtige Kapitel abschliesst. Wie sich das Galois'sche Problem 168ten Grades auf Grund dieser verschiedenen Modulformen darstellt, und welche Gestalt die niederen Resolventen dieses Problems besitzen, wird Gegenstand der Untersuchung für das nächste Kapitel sein.

§ 1. Einführung der Modulformen z_α und der Curve C_4.

Sind j_1, j_2, j_4 drei zur Γ_{168} gehörende linear-unabhängige Integrale erster Gattung**), so wollen wir die Differentiale dj_α derselben durch das gegenüber allen homogenen Modulsubstitutionen invariante Differential $(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1) = -\omega_2^2 d\omega$ dividieren, um uns auf diesem Wege die drei *Modulformen siebenter Stufe* (-2ter) *Dimension*:

*) Inhaltlich ist dieses und das folgende Kapitel zumeist eine Reproduction der oft genannten Abhandlung von Klein: *Über Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*, Math. Ann. Bd. 14 (1878). Die über die Curve sechster Ordnung der A_γ gegebenen Entwicklungen wurden von Hrn. Klein in der Arbeit *„Über Auflösung gewisser Gleichungen vom 7ten und 8ten Grade"*, Math. Ann. Bd. 15 (1879) hinzugefügt. Die formentheoretische Durchbildung ist überall erst vom Herausgeber gemacht worden.

**) Es ist zweckmässig, als untere Indices der j die 3 quadratischen Reste von 7 zu gebrauchen.

$$(1) \qquad z_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \frac{dj_\alpha}{\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1}$$

zu verschaffen. Statt derselben könnten wir natürlich auch jedes linearunabhängige System dreier linearer homogener Verbindungen der z_α zu Grunde legen, und es wird bald unsere Aufgabe sein, aus der Gesamtheit dieser Systeme ein besonderes auszuwählen.

Eine ganze Reihe von Sätzen betreffs unserer Formen (1) gehen aus den bezüglichen allgemeinen Erörterungen des dritten Kapitels (p. 604 u. f.) ohne weiteres hervor. Vor allem werden wir sagen: *Der Quotient*

$$(2) \qquad \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_4 z_4}{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_4 z_4}$$

irgend zweier linearen Verbindungen unserer Moduln ist, wofern er nicht überhaupt constant ist, entweder eine vierwertige oder eine dreiwertige Function auf der Fläche F_{168}, letzteres in dem Falle, dass unter den vier beweglichen Nullpunkten des Zählers von (2) ein einzelner mit einem der vier beweglichen Nullpunkte des Nenners coincidiert. Wir werden uns aber hier sogleich auf einen noch allgemeineren Standpunkt stellen und nach den Null- und Unstetigkeitspunkten der *Formen* z_α im Polygon F_{168} fragen*). Wir schreiben zu dem Ende Formel (1) in die Gestalt um

$$z_\alpha = -\frac{dj_\alpha}{dJ} \cdot \frac{dJ}{\omega_2^2 d\omega},$$

woraus unter Benutzung von (3) p. 118 für unsere Formen z_α die Darstellung:

$$(3) \qquad z_\alpha = -\frac{dj_\alpha}{dJ} \cdot \frac{9 g_2^2 g_3}{\pi i \Delta}$$

entspringt. Nun wird auf der F_{168} in einem Punkte a der erste Factor rechter Hand einfach unendlich, aber in demselben Grade verschwindet dortselbst g_3 bei endlichen g_2 und Δ (cf. p. 128), so dass z_α selbst endlich bleibt. In gleicher Weise zeigt sich, dass auch in den Punkten b die Formen z_α endlich und von Null verschieden sind. In einem Punkte c ist $\frac{dj_\alpha}{dJ}$ im Grade 8 Null**), während auf der F_{168} gemessen

*) Wir halten hierbei, wie überhaupt stets beim Gebrauch der Modulformen, an der Vorstellung der ω_1, ω_2 als durchaus stetiger, und also überall endlicher, niemals zugleich verschwindender Variabelen fest, deren Quotient ω auf die Halbebene bez. auf das Polygon F_{168} eingeschränkt ist; den Rechnungen des Textes liegen im übrigen die allgemeinen Erörterungen p. 586 u. f. zu Grunde.

**) Hier ist in erster Annäherung $(j - j_0) = cJ^{-\frac{1}{7}}$, woraus man die im Text gemachte Angabe sofort bestätigt.

Δ im Grade sieben verschwindet und g_2, g_3 endlich bleiben. Fassen wir also zusammen: *Ausser den vier beweglichen Nullpunkten des einzelnen z_α verschwindet dasselbe in jedem Punkte c der F_{168} einfach und ist übrigens auf der F_{168} endlich und von Null verschieden**).

Bei der Ausübung homogener Modulsubstitutionen erfahren unsere z_α notwendig insgesamt 168 verschiedene ternäre Substitutionen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} z_1' &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{14}z_4, \\ z_2' &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{24}z_4, \\ z_4' &= a_{41}z_1 + a_{42}z_2 + a_{44}z_4, \end{aligned}$$

welche eine mit der nicht-homogenen G_{168} *holoedrisch* isomorphe ternäre Gruppe ergeben. Hierbei zeigt sich ein wichtiger Unterschied zwischen dem System z_1, z_2, z_4 und z. B. dem Modulsystem fünfter Stufe ζ_1, ζ_2; es bildete nämlich das letztere eine homogene G_{120}, welche zur nicht-homogenen Ikosaedergruppe nur erst *hemiedrisch* isomorph war. — Nun sogleich die ferneren Resultate: Die ternäre G_{168} lässt sich aus den beiden besonderen Operationen erzeugen, die den Modulsubstitutionen S und T entsprechen. Diese beiden ternären Operationen müssen offenbar die Perioden sieben bez. zwei haben, und deshalb werden ihre bezüglichen Substitutionsdeterminanten $|a_{ik}|$ eine siebente resp. zweite Einheitswurzel sein. Seien diese Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i\alpha}{7}}$ und $e^{\pi i\beta}$, so ist die Determinante der ternären Substitution ST offenbar $e^{\frac{(2\alpha+7\beta)\pi i}{7}}$. Aber ST ist von der Periode drei und also die letztgeschriebene Einheitswurzel eine dritte. Die beiden Zahlen α, β genügen demnach der Congruenz

$$6\alpha + 21\beta \equiv 0, \pmod{14},$$

woraus man ohne weiteres $\alpha \equiv 0$, (mod. 7), $\beta \equiv 0$, (mod. 2) schliesst. Daher der Satz: *Die 168 ternären Substitutionen* (4) *sind ausnahmslos solche von der Determinante 1.*

---

*) Diese Angaben gelten, strenge genommen, nicht von z_α, sondern nur erst von der eindeutigen Function $\omega_2^3 z_\alpha$ von ω allein. Man wolle z. B. bemerken, dass man gemäss unserer Vorschrift zum Punkte $\omega = i\infty$ nur dadurch gelangen kann, dass man ω_2 zu Null werden lässt. Aber von diesem Verschwinden des ω_2 ist bei den Angaben des Textes nicht weiter Notiz genommen, und zwar deshalb, weil es gleichmässig für alle Modulformen derselben Dimension in der nämlichen Weise eintritt. — Noch directer lässt sich der in Rede stehende Einwurf durch eine entsprechend modificierte Festsetzung über die Veränderlichkeit der ω_1, ω_2 zur Erledigung bringen. Halten wir nämlich im übrigen an unseren bezüglichen eben geschehenen Angaben fest, nur dass (in Anlehnung an p. 55) der Punkt $\omega = i\infty$ dadurch erreicht wird, dass wir ω_1 in $i \log 1728 J$, ω_2 aber in 2π über-

Alle Modulfunctionen siebenter Stufe sind homogene rationale Functionen nullter Dimension der drei Grössen z_1, z_2, z_4. Diese drei Grössen aber sind an einander geknüpft durch *eine homogene biquadratische Relation*, die wir durch

$$f(z_1, z_2, z_4) = 0 \tag{5}$$

gegeben denken. Es ist die wichtigste Eigenschaft dieser Relation, *dass ihre linke Seite durch die 168 verschiedenen ternären Substitutionen* (4) *in sich transformiert wird.* Indem wir die z_α als homogene Coordinaten einer Ebene deuten, stellt uns Gleichung (5) *eine Curve vierter Ordnung* C_4 dar, welche wechselweise eindeutig auf das Fundamentalpolygon F_{168} bezogen ist. *Diese ebene* C_4 *gestattet eine Gruppe von 168 Collineationen in sich, welche in* (4) *ihren Ausdruck finden.* Die damit gefundene Thatsache eröffnet uns die Möglichkeit, Hülfsmittel der ternären Invariantentheorie auf unsere C_4 in Anwendung zu bringen, was uns alsbald zur Aufstellung der wichtigsten Folgerungen Anlass bietet. Merken wir uns vorab noch, dass die Auswahl eines speciellen Modulsystems z_α jetzt auf die Fixierung eines besonderen Coordinatendreiecks für unsere C_4 hinauskommt; unter diesem Gesichtspunkt werden wir ein System z_1, z_2, z_4 denn auch baldigst einzuführen haben.

§ 2. Geometrische Bedeutung der Punkte a, b, c auf der C_4.

Um eine erste Anwendung invariantentheoretischer Überlegungen auf unsere Curve C_4 durchzuführen, erinnern wir daran, dass J selbst auf der C_4 eine 168-wertige Function ist. Den Einzelwert nimmt dieselbe in 168 im allgemeinen getrennt liegenden Punkten an; nur für $J = 1$ fallen diese 168 Punkte zu je zweien an 84 Stellen zusammen, welche wir nun auch auf der C_4 als die 84 Punkte a bezeichnen; weiter fallen für $J = 0$ die zugehörigen 168 Punkte der C_4 zu je dreien in die 56 Punkte b, und endlich coincidieren für $J = \infty$ die 168 Punkte zu je sieben in den 24 Punkten c der C_4. Da wolle man nun bemerken, dass allgemein 168 Punkte der C_4 mit gleichem J sich bei den Collineationen der C_4 in sich als geschlossenes System permutieren. Insbesondere aber folgern wir: *Die 84 Punkte a permutieren sich bei den 168 Collineationen nur unter einander, und ein*

führen (was dann für die rationalen reellen Punkte ω eine entsprechende Festsetzung nach sich zieht), so werden ersichtlich die Angaben des Textes ohne weiteren Zusatz gelten.

Gleiches gilt vom System der 56 Punkte b, sowie endlich auch von den 24 Punkten c.

Einer sogleich durchzuführenden Anwendung halber stellen wir uns auf Grund dieser Überlegungen das allgemeinste Punktsystem der C_4 auf, das die Eigenschaft hat, sich gegenüber den 168 Collineationen geschlossen zu permutieren. Indem wir gar nicht ausschliessen, dass die Punkte dieses Systems in irgend welchen Multiplicitäten coincidieren, bemerke man hier nur soviel, *dass die Punktanzahl eines derartigen Systems notwendig in der Gestalt*

$$(1) \qquad 168\alpha + 84\beta + 56\gamma + 24\delta$$

muss geschrieben werden können, wobei α, β, γ, δ ganze, nicht negative Zahlen sind. In der That muss sich ja ein System fraglicher Art aus den vorhin besonders charakterisierten Systemen zusammensetzen, und da bemerkt man sofort, dass wir auf die Anzahl (1) geführt werden, wofern im einzelnen Punkte a je β, im einzelnen Punkte b je γ etc. Punkte des Systems vereint liegen.

Nun ist es besonders interessant, dass man aus der Theorie der Curven auf einer ebenen C_4 verschiedene derartige Punktsysteme bereits kennt, welche sich ganz allgemein gegenüber Collineationen der C_4 in sich geschlossen permutieren müssen. Man bemerke z. B., dass bei Ausführung linearer Transformation ein Wendepunkt einer C_4 auf der transformierten Curve notwendig wieder ein Wendepunkt wird. Nun giebt es auf jeder Curve vierter Ordnung 24 Wendepunkte, die entweder getrennt liegen, oder auch irgendwie teilweise coincidieren mögen. Immer haben wir auf unserer C_4 in deren Wendepunkten ein System von 24 Punkten, wie wir solche Systeme unter (1) allgemein betrachteten. Indem wir aber die Anzahl (1) mit 24 identificieren, folgt $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1$, womit denn sofort der Satz bewiesen ist: *Die 24 Punkte c sind die Wendepunkte unserer Curve C_4, die eben dieserhalb auf der C_4 durchgehends getrennt liegen.*

Man kennt ferner in den Berührungspunkten einer Doppeltangente der C_4 ein Punktepaar, das bei linearer Transformation stets wieder in das Paar von Berührungspunkten einer Doppeltangente der transformierten C_4 übergeht. Eine Curve vierter Ordnung aber hat 28 Doppeltangenten, und also besitzen wir in den bezüglichen 56 Berührungspunkten ein zweites Punktsystem unserer Art auf der C_4 der s_α. Indem wir aber die Anzahl (1) mit 56 gleichsetzen, ist die einzige Lösung der so entspringenden diophantischen Gleichung in nicht negativen ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \cdots$ durch $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\gamma = 1$ gegeben. Damit haben wir den Satz bewiesen: *Die 56 Punkte b der C_4 sind die*

Berührungspunkte ihrer 28 Doppeltangenten; diese Berührungspunkte liegen also (als Punkte b) wiederum durchgängig von einander getrennt.

Etwas weniger bekannt dürfte ein drittes System von Punkten unserer Art sein, die wir nach Cayley als die sextactischen Punkte der C_4 bezeichnen. Ihr Charakter ist der, dass in einem einzelnen solchen Punkte ein Kegelschnitt mit der C_4 sechs consecutive Schnittpunkte gemein haben kann, womit von selbst gesagt ist, dass die sextactischen Punkte ihren Charakter gegenüber linearer Transformation bewahren. Man kann zeigen, dass auf einer C_4 im ganzen 84 Punkte dieser Art existieren*), und die 84 Punkte müssen also auf unserer C_4 wieder ein System von Punkten darstellen, die sich bei den 168 Collineationen unter sich permutieren. Setzen wir aber die Anzahl (1) mit 84 identisch, so ist die einzige Lösung $\beta = 1$, $\alpha = \gamma = \delta = 0$, und damit haben wir den Satz erhärtet: *Die 84 Punkte a unserer Curve vierter Ordnung sind die sextactischen Punkte derselben; letztere liegen also durchgängig von einander, sowie auch von den Wendepunkten und Berührungspunkten der Doppeltangenten getrennt.*

Nach diesen ersten Resultaten gehen wir auf die Structur der G_{168} zurück, wie sie oben p. 374 u. f. entwickelt wurde. Allen dort aufgestellten Gruppen werden wir jetzt die entsprechenden Collineationsgruppen der C_4 in sich gegenüber zu stellen haben und gewinnen durch ausführliche Betrachtung derselben eine Fülle interessanter geometrischer Sätze über die C_4.

§ 3. Die acht Wendedreiecke und die acht G_{21}. Auswahl besonderer z_α.

In der G_{168} fanden wir seinerzeit acht gleichberechtigte G_7, deren einzelne auf der Fläche F_{168} jeweils drei Punkte c zu Fixpunkten hatte. In diesem Sinne gehörten zu der aus S entspringenden G_7 die drei Fixpunkte, welche bei der ursprünglichen Lage des Polygons F_{168} in der ω-Halbebene die Spitzen $\omega = i\infty$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ abgaben (cf. Fig. 88, p. 373). Diese drei Fixpunkte wurden cyclisch permutiert bei derjenigen G_3, die durch Wiederholung der fortan durch U zu bezeichnenden Operation

$$U \equiv \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 4 \end{pmatrix}, \pmod 7 \tag{1}$$

*) Man vergl. betreffs der obigen Angaben Cayley, Philosophical Transactions 155 (1854) p. 545. Die Anzahl der sextactischen Punkte auf der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung ist $n(12n - 27)$.

entspringt. Als Ganzes betrachtet, wird demgemäss das fragliche Tripel von Punkten c durch diejenige halbmetacyclische G_{24} in sich übergeführt, welche aus S und U zu erzeugen ist und also die Operationen

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\delta}, \text{ (mod. 7)}$$

umfasst. Die acht Tripel der Punkte c auf F_{168} entsprechen solchergestalt den acht halbmetacyclischen G_{21}, die wir in der G_{168} vorfanden.

Indem wir nun diese Verhältnisse in geometrischem Gewande als Sätze über unsere C_4 verfolgen wollen, knüpfen wir an den Umstand, dass jede Wendetangente die C_4 noch in *einem* weiteren Punkte schneidet. So gewinnen wir in diesen weiteren Punkten von den Wendetangenten aus insgesamt wieder ein System von 24 Punkten auf der C_4, und man bemerkt ohne weiteres, dass auch dieses System die im vorigen Paragraphen oft genannte Eigenschaft hat, sich gegenüber der G_{168} geschlossen zu permutieren. Inzwischen sahen wir schon vorhin, dass es nur *ein* System zu 24 Punkten dieser Art giebt, nämlich das System der Punkte c, d. h. die 24 Wendepunkte selbst. Wir folgern also aus dieser Überlegung den Satz: *Jede der 24 Wendetangenten schneidet unsere C_4 in einem weiteren Wendepunkte.*

Auf Grund dieser Verhältnisse lassen sich die Wendetangenten in eigentümlicher Weise zu geschlossenen Ketten anordnen. Mag man nämlich von einem einzelnen Wendepunkte aus die zugehörige Wendetangente ziehen; sie schneidet einen weiteren Wendepunkt auf der C_4 aus, und wir ziehen nun sogleich die zu diesem Punkte gehörende Wendetangente. Da finden wir als weiteren Schnittpunkt der letzteren mit der C_4 einen neuen Wendepunkt, dessen Tangente wir nun gleichfalls den vorhergehenden beiden anhängen. Da alle Punkte c, d. h. alle Wendepunkte, gleichberechtigt sind, werden wir auf diesem Wege nach einer endlichen Zahl von Schnitten zum ersten Wendepunkte zurückgelangen, wobei wir dann eine ganze geschlossene Kette von Wendetangenten gezogen haben. Wie gross wird vor allen Dingen die Anzahl der Tangenten sein, welche diese Kette zusammensetzen? Bemerke man, um hierüber zu entscheiden, dass es in der G_{168} sieben Collineationen giebt, welche die C_4 derart in sich überführen, dass der zum Ausgangspunkte unserer Kette gewählte Wendepunkt dabei erhalten bleibt. Damit wird auch die betreffende Wendetangente bei den fraglichen Collineationen erhalten bleiben, und es müssen also, wie man sofort überblickt, auch alle übrigen unsere Kette zusammensetzenden Tangenten resp. Wendepunkte durch die fragliche G_7 in sich übergehen. Nun aber hat eine G_7 drei Fixpunkte c, und also

besteht die in Rede stehende Kette von Wendetangenten (da sie unmöglich nur eine oder zwei Wendetangenten enthalten kann) gerade aus *drei* solchen. Wir werden sagen, dass diese Tangenten ein *Wendedreieck* bilden, und haben nun der Anordnung der 24 Punkte c in die acht Tripel entsprechend folgenden wichtigen Satz über unsere C_4 aufzustellen: *Die 24 Wendetangenten ordnen sich in der gekennzeichneten Weise in acht Wendedreiecke an, deren einzelnes, als Ganzes betrachtet, bei den Collineationen einer bestimmten unter den acht gleichberechtigten G_{21} erhalten bleibt.*

Wir bringen jetzt dadurch ein neues Element in die Entwicklung hinein, dass wir eines unter diesen acht Wendedreiecken zum Coordinatendreieck in der Ebene der C_4 zu Grunde legen. Mögen wir etwa zuvörderst in demjenigen Punkte c, welcher der Stelle $\omega = i\infty$ entspricht, die Wendetangente an die C_4 legen und selbige als Seite $z_1 = 0$ des Coordinatendreiecks ansetzen. Die beiden anderen Punkte des zu $\omega = i\infty$ gehörenden Tripels sind diejenigen, welche den Spitzen $\omega = \frac{2}{7}$ und $\omega = \frac{3}{7}$ entsprechen, und es handelt sich hier um Entscheidung der Frage, welcher von diesen beiden Punkten von $z_1 = 0$ auf der C_4 ausgeschnitten wird. Wir sagen, dass es der der Spitze $\omega = \frac{2}{7}$ entsprechende ist, und werden im folgenden Paragraphen die Richtigkeit dieser Behauptung erkennen. Ziehen wir nun in dem so erreichten Punkte die Tangente, die wir $z_2 = 0$ nennen, und vervollständigen endlich das Coordinatendreieck durch die dritte Tangente $z_4 = 0$.

Durch diese Bestimmungen sind die Modulformen z_α als solche erst bis auf numerische Factoren bestimmt; doch wollen wir hier gleich solche Verabredungen treffen, dass auch diese letzteren als endgültig fixiert anzusehen sind. Bemerken wir zu diesem Ende, dass die „beweglichen" Nullpunkte unserer Moduln z_α in den vier Schnittpunkten der Geraden $z_\alpha = 0$ und der C_4 unmittelbar vor Augen liegen. So sehen wir denn, dass von den vier „beweglichen" Nullpunkten von z_1 drei bei $\omega = i\infty$ im Polygon vereint liegen, und da ohnedies ein einfacher „fester" Nullpunkt für z_1 an der betrachteten Stelle gelegen ist, so wird, wie man sofort überblickt, $\omega_2^3 z_1$ bei $\omega = i\infty$ in erster Annäherung mit $r^{\frac{4}{7}}$ proportional sein. *Wir fixieren jetzt unsere Modulform dadurch endgültig, dass wir für sie an der betrachteten Stelle die Annäherung vorschreiben:*

$$z_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{4}{7}}. \tag{2}$$

Etwas anders verfahren wir bei z_2 und z_4. Hier gehe man davon

aus, dass bei Anwendung der unter (1) gegebenen Substitution U die Seiten unseres Coordinatendreiecks in leicht ersichtlicher Folge cyclisch permutiert werden. Für unsere Modulformen haben wir dementsprechend bei Ausübung von U die Substitution:

$$z_1' = c_4 z_4, \quad z_4' = c_2 z_2, \quad z_2' = c_1 z_1,$$

wobei die c drei der Bedingung $c_1 c_2 c_4 = 1$ genügende Zahlen sind (cf. p. 694), im übrigen aber davon abhängen, wie wir die noch ausstehenden numerischen Factoren für z_2, z_4 fixieren. *Letzterem Umstande zufolge werden* z_2, z_4 *sich endgültig dadurch bestimmen lassen, dass wir* $c_4 = c_2 = 1$ *setzen, worauf wir als Definition der Modulformen* z_2, z_4 *diese haben*:

$$z_4(\omega_1, \omega_2) = z_1(2\omega_1 + 7\omega_2, 7\omega_1 + 25\omega_2),$$
$$z_2(\omega_1, \omega_2) = z_4(2\omega_1 + 7\omega_2, 7\omega_1 + 25\omega_2).$$

Die dritte Constante c_2 ist damit von selbst gleich 1, und wir haben also der Operation U entsprechend die Substitution:

$$(3) \qquad z_1' = z_4, \quad z_4' = z_2, \quad z_2' = z_1.$$

Die nämliche Überlegung, die uns soeben zu Formel (2) führte, ergiebt ohne Mühe allgemein:

$$(4) \qquad z_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{4}{7}}, \quad z_2 = \varkappa_2\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{7}}, \quad z_4 = \varkappa_4\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{2}{7}}$$

als Näherungswerte bei $\omega = i\infty$. Welche Werte indessen die hier aufgenommenen numerischen Factoren $\varkappa$ besitzen, können wir an gegenwärtiger Stelle noch nicht entscheiden.

Die Operation S transformiert jede unserer drei Wendetangenten $z_\alpha = 0$ einzeln in sich; bei Ausübung von S wird sich also z_α bis auf einen numerischen Factor reproducieren. Wie dieser letztere heisst, ist aus den Formeln (4) ohne weiteres evident. Indem wir für $e^{\frac{2i\pi}{7}}$ abkürzend ε schreiben, haben wir offenbar zusammenfassend:

$$z_\alpha(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \varepsilon^{4\alpha} z_\alpha(\omega_1, \omega_2).$$

Durch Combination dieser Formel mit (3) finden wir mühelos die Gestalt derjenigen ternären G_{21}, welche der im Anfang des Paragraphen besonders namhaft gemachten halbmetacyclischen G_{21} entspricht. In der That ist die Operation $S^\mu U^\nu$ als ternäre Substitution gegeben durch:

$$(5) \qquad S^\mu U^\nu: \quad z_\alpha' = \varepsilon^{4\mu\alpha} z_{4^\nu\alpha}, \qquad \begin{matrix}\mu = 0, 1, \cdots, 7, \\ \nu = 0, 1, 2.\end{matrix}$$

Hiermit haben wir dann zugleich alle Substitutionen der G_{168} aufgeschrieben, welche das Coordinatendreieck in sich transformieren.

§ 4. Aufstellung der Gleichung der C_4. Der reelle Curvenzug.

Ohne sogleich die geometrische Bedeutung auch der übrigen Collineationen der G_{168} zu verfolgen, wollen wir vorab die Ergebnisse des vorigen Paragraphen zur weiteren Verwendung bringen. Es gelingt vermöge derselben zunächst ausserordentlich einfach, die Gleichung $f(z_1, z_2, z_4) = 0$ der C_4 explicite aufzustellen. Von den Schnittpunkten der C_4 mit $z_2 = 0$ lagen drei auf $z_1 = 0$, einer auf $z_4 = 0$, und also wird $f(z_1, z_2, z_4)$ für $z_2 = 0$ in $az_1^3 z_4$ übergehen, unter a eine nicht verschwindende Constante verstanden. In entsprechender Weise wird für $z_1 = 0$ die ganze homogene Function vierten Grades f in $bz_4^3 z_2$ sowie endlich für $z_4 = 0$ in $cz_2^3 z_1$ übergehen. Wir dürfen also für f die Gestalt ansetzen:

$$f = az_1^3 z_4 + bz_4^3 z_2 + cz_2^3 z_1 + (dz_1 + ez_2 + fz_4) z_1 z_2 z_4.$$

Aber $f = 0$ soll durch U, d. h. bei cyclischer Permutation der z_α, in sich übergehen, und also ist des genaueren

$$f = z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 + dz_1 z_2 z_4 (z_1 + z_2 + z_4),$$

wobei wir den sicher von Null verschiedenen Coefficienten a sogleich mit der Einheit identisch setzten. Jetzt übe man S aus, wobei f bis auf einen Factor in sich übergehen muss. Aber dieser Factor ist einfach gleich 1, da die drei ersten Glieder von f bei Anwendung von S durchaus unverändert bleiben. Somit ist

$$f = z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 + dz_1 z_2 z_4 (\varepsilon^4 z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^3 z_4),$$

und wir erblicken ohne weiteres, dass d gleich Null sein muss. *Die Gleichung unserer Curve vierter Ordnung mit 168 Collineationen in sich ist hiernach, auf ein Wendedreieck bezogen, vermöge der Verabredungen* (3) *des vorigen Paragraphen explicite durch*

$$f(z_1, z_2, z_4) = z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 = 0 \tag{1}$$

gegeben.

Die so gewonnene Formel (1) wollen wir jetzt zunächst benutzen, um die unter (4) des vorigen Paragraphen gemachten Angaben um einen weiteren Schritt zu vervollständigen. Man berechnet aus den eben gemeinten Formeln, dass $f(z_1, z_2, z_4)$ bei $\omega = i\infty$ näherungsweise durch

$$f(z_1, z_2, z_4) = (\varkappa_4^3 \varkappa_2 - \varkappa_2^3) \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^8 r$$

gegeben ist. Nun soll $f = 0$ identisch d. h. unabhängig von ω bestehen, und das ist, da $\varkappa_2 \gtrless 0$ sein muss, nur möglich, falls $\varkappa_4^3 - \varkappa_2^2 = 0$

ist. Indem wir fortan kurz $\varkappa$ statt $\varkappa_2$ schreiben, ersetzen wir also die Formeln (4) des vorigen Paragraphen durch die anderen:

$$(2) \qquad \varepsilon_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{4}{7}}, \quad \varepsilon_2 = \varkappa\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{7}}, \quad \varepsilon_4 = \varkappa^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{2}{7}}.$$

Die linke Seite der Gleichung (1) ist eine biquadratische ternäre Form der ε_α, welche, wie wir schon sagten, bei Ausübung der Operation S absolut unverändert bleibt. Gegenüber der Operation T bleibt sie entweder auch unverändert, oder sie erleidet einen Zeichenwechsel. Aber man bedenke doch, dass im letzteren Falle auch bei ST, mithin auch bei $(ST)^3$ Zeichenwechsel von f eintritt, während doch $(ST)^3 = 1$ ist. Somit wird auch T die Form f direct in sich transformieren, und wir folgern den späterhin zur Verwendung kommenden Satz: *Die biquadratische ternäre Form f wird durch alle 168 ternären ε_α-Substitutionen unverändert in sich transformiert.*

Die weiter in diesem Paragraphen angehängte Besprechung hat wesentlich den Zweck, an unsere allgemeinen Erörterungen über Symmetrie der Flächen F_μ Anschluss zu bekommen, sowie auch eine gelegentlich im vorigen Paragraphen aufgestellte Behauptung zu beweisen. Die durch

$$\varepsilon_1^3\varepsilon_4 + \varepsilon_4^3\varepsilon_2 + \varepsilon_2^3\varepsilon_1 = 0$$

dargestellte ebene Curve vierter Ordnung besitzt einen reellen Curvenzug, für welchen eine elementare Untersuchung im wesentlichen die hierneben in Fig. 103 angedeutete Gestalt giebt*). Man bemerkt, dass dieser reelle Zug bei cyclischer Permutation der ε_α in sich übergeführt wird. Aber durch die entsprechende Operation U wurde diejenige Symmetrielinie der Fläche F_{168} in sich übergeführt, die in Fig. 86, p. 370 vertical durch die Mitte der Figur zog, und die wir

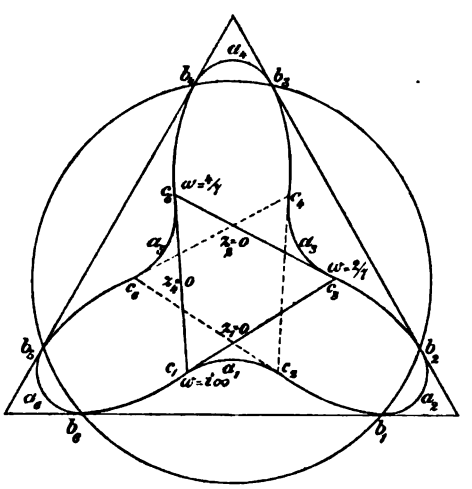


Fig. 103.

*) Vergl. den zweiten Abschnitt in der bereits p. 374 genannten, kürzlich (Juli 1890) erschienenen Dissertation von Hrn. Haskell, in welcher die zur C_4 des Textes „im projectiven Sinne gehörende" mehrfache Überdeckung der Ebene untersucht wird. (Es handelt sich dabei um die „neue Art von Riemann'schen Flächen", welche Hr. Klein in Bd. 7 der Math. Ann. (1874) eingeführt hat, Betrachtungen, die wir leider im Text nicht weiter verfolgen können.)

dann in Fig. 89, p. 377 noch gesondert darstellten. So haben wir in Übereinstimmung mit den allgemeinen Erörterungen (p. 598) den bemerkenswerten Satz gewonnen, *dass die in Rede stehende Symmetrielinie sich in der Ebene der z_α auf den in Fig.* 103 *abgebildeten Curvenzug überträgt.* Wir verfolgen dies nun noch weiter ins einzelne.

Auf der fraglichen Symmetrielinie sind insgesamt je sechs Punkte a, b, c gelegen, die wir in Fig. 89 durch Nummern unterschieden haben. Wir folgern: *Unsere C_4 besitzt an sextactischen Punkten, Berührungspunkten von Doppeltangenten, endlich Wendepunkten jedesmal sechs reelle, die auf dem in Fig.* 103 *dargestellten Zuge gelegen sind.* Thatsächlich sehen wir diese dreimal sechs Punkte in Fig. 103 direct vor Augen und haben sie dortselbst in derselben Weise wie in Fig. 89 bezeichnet. Ausser dem Coordinatendreieck, von dem wir ausgingen, besitzt die C_4 sonach noch ein zweites reelles Wendedreieck, das in Fig. 103 punktiert angedeutet ist. Vor allem aber übersehen wir jetzt den Beweis des Satzes, dass die Wendetangente $z_1 = 0$ denjenigen Wendepunkt auf der C_4 ausschneidet, welcher der Spitze $\omega = \frac{1}{7}$ zugeordnet ist. Thatsächlich ist ja nur unter dieser Annahme die Abfolge der Punkte a, b, c auf dem reellen Zug der C_4 die nämliche, wie auf der Symmetrielinie in Fig. 89, p. 377*).

§ 5. Aufstellung der 168 ternären Substitutionen. Zusätzliche Bemerkungen.

Es ist nun auch ein Leichtes alle 168 ternären Substitutionen der z_α explicite aufzustellen, nachdem wir die z_α einmal endgültig fixiert haben, sowie bereits die Gestalt der Operationen S und U als z_α-Substitutionen kennen lernten. Alles wird hier darauf ankommen, die ternäre Substitution T:

$$(1) \qquad \begin{cases} z_1' = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_4 z_4, \\ z_2' = b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_4 z_4, \\ z_4' = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_4 z_4 \end{cases}$$

in Erfahrung zu bringen, die übrigens, wie wir uns durch blossen Anblick der Fig. 103 überzeugen, neun durchgehends von Null verschiedene Coefficienten besitzt. Es sind drei Schritte, die uns zur expliciten Kenntnis der Substitutionscoefficienten in (1) führen.

Erstlich beweisen wir durch einfache Rechnung die Richtigkeit

*) Wir machen noch besonders darauf aufmerksam, dass die Aufstellung der Gleichung der C_4 unabhängig ist von der Annahme, dass die Wendetangente $z_1 = 0$ zur Spitze $\omega = \frac{1}{7}$ führt (so dass also in der Schlussweise des Textes nicht etwa ein Zirkel vorliegt).

der Congruenz $UT \equiv TU^2$, (mod. 7). Indem wir aber nach einander die Wirkung der beiden Operationen UT und TU^2 auf die z_α ausüben, erhalten wir die beiden folgenden ternären Substitutionen, die wir kurz durch das Schema ihrer Coefficienten angeben:

$$\begin{pmatrix} c_1, & c_2, & c_4 \\ a_1, & a_2, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_4, & a_1, & a_2 \\ b_4, & b_1, & b_2 \\ c_4, & c_1, & c_2 \end{pmatrix}.$$

Da haben wir nun, weil wir doch mit einer und derselben Substitution zu thun haben, die Coefficienten des ersten Schemas einzeln mit den entsprechenden des zweiten identisch zu setzen. Hierdurch drücken sich ohne weiteres sechs unserer Coefficienten in den drei übrigen aus, womit denn für T die bereits mehr specificierte Gestalt gewonnen ist:

$$(2) \qquad \begin{cases} z_1' = az_1 + bz_2 + cz_4, \\ z_2' = bz_1 + cz_2 + az_4, \\ z_4' = cz_1 + az_2 + bz_4. \end{cases}$$

Fürs zweite benutzen wir den Umstand, dass sowohl TS, wie auch TS^{-1} die Periode drei besitzt, und beweisen vorab noch auf völlig elementarem Wege, dass für eine ternäre Substitution der Periode drei die Summe der Diagonalglieder mit Null identisch ist. Indem wir also die Substitution (2) einmal mit S, sodann mit S^{-1} combinieren, entspringen für die Mittelglieder a, c, b die beiden linearen Gleichungen:

$$\varepsilon^4 a + \varepsilon c + \varepsilon^2 b = 0,$$
$$\varepsilon^3 a + \varepsilon^6 c + \varepsilon^5 b = 0.$$

Wir finden daraus für a, c und b die Werte:

$$(3) \qquad a = k(\varepsilon - \varepsilon^6), \quad c = k(\varepsilon^2 - \varepsilon^5), \quad b = k(\varepsilon^4 - \varepsilon^3),$$

wobei wir unter k eine noch nicht näher bekannte endliche und von Null verschiedene Zahl verstehen.

Der dritte Schritt gilt endlich der Bestimmung von k. Zu dem Zwecke verwerten wir den Umstand, dass T die Periode zwei besitzt. Die Substitution (2) muss also mit ihrer Inversen identisch sein, und wir haben dementsprechend z. B. die Gleichung $a = bc - a^2$. Setzen wir hier die Werte (3) ein, so kommt unter Benutzung von

$$(4) \qquad \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 - \varepsilon^3 - \varepsilon^5 - \varepsilon^6 = i\sqrt{7}$$

nach kurzer Zwischenrechnung $k = \dfrac{1}{-i\sqrt{7}}$. *Die fertige Gestalt der ternären Substitution T ist sonach gegeben durch:*

$$(5)\quad T:\begin{cases} -i\sqrt{7}\,z_1' = (\varepsilon - \varepsilon^6)z_1 + (\varepsilon^4 - \varepsilon^3)z_2 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^5)z_4, \\ -i\sqrt{7}\,z_2' = (\varepsilon^4 - \varepsilon^3)z_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^5)z_2 + (\varepsilon - \varepsilon^6)z_4, \\ -i\sqrt{7}\,z_4' = (\varepsilon^2 - \varepsilon^5)z_1 + (\varepsilon - \varepsilon^6)z_2 + (\varepsilon^4 - \varepsilon^3)z_4, \end{cases}$$

drei Formeln, die wir auch in die eine zusammenfassen können:

$$(6)\qquad -i\sqrt{7}\,z_\alpha' = \sum_{\beta=1,2,4}\left(\varepsilon^{(\alpha\beta)^2} - \varepsilon^{-(\alpha\beta)^2}\right)z_\beta .$$

Jetzt ist es ein Leichtes, durch Combination von (6) mit (5) p. 700 die gesamten 168 ternären Substitutionen in übersichtlicher Form hinzuschreiben. Wir finden:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &S^\mu U^\nu, \qquad z_\alpha' = \varepsilon^{4\mu\alpha} z_{4^\nu \cdot \alpha}, \\ &S^\lambda T S^\mu U^\nu, \quad -i\sqrt{7}\,z_\alpha' = \sum_{\beta=1,2,4}\left(\varepsilon^{(\alpha\beta)^2} - \varepsilon^{-(\alpha\beta)^2}\right)\varepsilon^{4(\lambda\alpha+\mu\beta)} z_{4^\nu \cdot \beta}. \end{aligned}$$

Wir benutzen diese Gelegenheit, um hier noch ein paar zusätzliche Bemerkungen anzuschliessen. Erstlich schreiben wir

$$y_\alpha = -z_\alpha \frac{\omega_2^2\, d\omega}{dJ},$$

sowie allgemein:

$$y = \frac{dj}{dJ},$$

unter j ein beliebiges Integral erster Gattung der F_{168} verstanden. Es ist alsdann

$$(8)\qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_4 y_4$$

mit von ω unabhängigen Coefficienten c. Die y_α reproducieren sich bei Anwendung irgend einer Modulsubstitution linear mit der Determinante 1, und ein Gleiches gilt, wie man sofort bemerkt, von den drei Moduln $\frac{dy_\alpha}{dJ}$, sowie auch von $\frac{d^2y_\alpha}{dJ^2}$ u. s. w., welche Systeme in der That die nämliche Substitution erfahren, wie die y_α selbst. Jetzt bilde man aus (8) durch Differentiation die vier Gleichungen:

$$\frac{d^\nu y}{dJ^\nu} = c_1\frac{d^\nu y_1}{dJ^\nu} + c_2\frac{d^\nu y_2}{dJ^\nu} + c_4\frac{d^\nu y_4}{dJ^\nu}$$

für $\nu = 0, 1, 2, 3$, und eliminiere aus denselben die drei Grössen c_1, c_2, c_4. Die entspringende viergliedrige Determinante ordne man nach $\frac{d^3y}{dJ^3}, \frac{d^2y}{dJ^2}, \cdots$ und findet dabei solche Coefficienten, die zufolge ihrer Determinantenform leicht ersichtlich gegenüber allen Modulsubstitutionen invariant sind. Da sich aber diese Coefficienten aus algebraischen Functionen von J, nämlich den Ableitungen der y_α aufbauen, so werden sie selbst rational in J sein, *und also genügen die y einer*

homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten:

$$\frac{d^3y}{dJ^3} + R_1(J)\frac{d^2y}{dJ^2} + R_2(J)\frac{dy}{dJ} + R_3(J)\,y = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist von Halphen*) und Hurwitz**) betrachtet worden, auf deren bezügliche Abhandlungen wir demnach behufs ausführlicherer Entwicklung verweisen. Mag es genügen, wenn wir die explicite Gestalt der fraglichen Gleichung hier noch ohne Beweis mitteilen; sie ist gegeben durch***):

$$J^2(J-1)^2\frac{d^3y}{dJ^3} + J(J-1)(7J-4)\frac{d^2y}{dJ^2} + \left\{\frac{72}{7}J(J-1) - \frac{20}{9}(J-1) + \frac{3}{4}J\right\}\frac{dy}{dJ} + \left\{\frac{72\cdot 11}{7^3}(J-1) + \frac{5}{8} + \frac{2}{63}\right\}y = 0. \tag{9}$$

Die Normalintegrale erster Gattung der F_{168} sind von Hurwitz und Poincaré†) betreffs ihrer Periodeneigenschaften untersucht worden. Wir wollen auch in diesem Betracht das Hauptresultat kurz historisch mitteilen, weil es nicht ohne Interesse ist, benutzen dasselbe jedoch weiterhin in keiner Weise. Als Periodenschema (cf. p. 530) für die betreffenden Normalintegrale findet sich bei geeigneter Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche:

$$\left.\begin{array}{llll} 1, & 0, & 0, & \tau, \quad \tau-1, \quad -\tau \\ 0, & 1, & 0, & \tau-1, \quad -\tau, \quad \tau \\ 0, & 0, & 1, & -\tau, \quad \tau, \quad \tau-1 \end{array}\right\}, \quad \left(\tau = \frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right).$$

Darin liegt, wie man sieht, der interessante Satz, dass jedes dieser drei Normalintegrale, für sich genommen, ein elliptisches ist. Denn seine sämtlichen Perioden setzen sich aus nur zwei Grössen ganzzahlig zusammen.

§ 6. Die in der G_{168} enthaltenen Collineationen der Perioden drei und zwei.

Da wir nunmehr über ausreichende analytische Hülfsmittel verfügen, nehmen wir die geometrischen Überlegungen der §§ 2 und 3 wieder auf und wenden uns zunächst zur ausführlichen Besprechung der cyclischen G_3 und G_2 innerhalb der G_{168}.

---

*) *Sur une équation différentielle du troisième ordre,* Math. Ann. Bd. 24 (1884).

**) *Über eine besondere homogene lineare Differentialgleichung,* Math. Ann. Bd. 26 (1885).

***) Hurwitz, l. c. p. 120 Formel (8).

†) Hurwitz, l. c. p. 123, Poincaré in der p. 583 ausführlich genannten Abhandlung.

Bei Gelegenheit der Betrachtung der 28 Symmetrielinien auf der Fläche F_{168} (p. 377 u. f.) fanden wir in der G_{168} 28 gleichberechtigte cyclische Untergruppen G_3, welche den Symmetrielinien wechselweise eindeutig zugeordnet sind. Bei Ausübung der einzelnen G_3 erschien die zugehörige Symmetrielinie, gesondert betrachtet, in sich verschoben, was wir noch besonders durch Fig. 89, p. 377 veranschaulichten. Zudem hatte die einzelne G_3 zwei Fixpunkte b auf der F_{168}, und in diesem Sinne gehörten z. B. die beiden in Fig. 86, p. 370 mit b_1 und b_2 bezeichneten Punkte zu der aus U zu erzeugenden G_3, welche ihrerseits derjenigen Symmetrielinie zugeordnet war, die vertical durch die Mitte der eben genannten Figur hindurchzog.

Nun aber bemerke man auf der anderen Seite, dass eine Collineation der C_4 in sich, bei der ein Berührungspunkt b einer Doppeltangente in sich übergeht, notwendig diese Doppeltangente selbst in sich überführt. Daher der Satz: *Die 28 Doppeltangenten unserer C_4 sind den 28 G_3 in dem Sinne eindeutig zugeordnet, dass die einzelne Doppeltangente durch die Collineationen der zugehörigen G_3 in sich übergeführt wird.* Ordnen wir aber eine Gerade collinear sich selbst zu, so giebt es wohlbekannter Weise stets zwei sich selbst entsprechende Punkte auf der Geraden. *Auf den Doppeltangenten liefern dann offenbar die so entspringenden $2 \cdot 28$ sich selbst entsprechenden Punkte die 56 Punkte b der C_4.*

Indem aber durch diese Betrachtung zugleich eine eindeutige Zuordnung zwischen den 28 Symmetrielinien der F_{168} und den 28 Doppeltangenten der C_4 begründet ist, wollen wir hier insbesondere diejenige Doppeltangente samt ihren Berührungspunkten ausrechnen, die der zu U gehörenden Symmetrielinie und also dem in § 4 gefundenen reellen Curvenzuge der C_4 (Fig. 103, p. 702) entspricht. Die beiden fraglichen Punkte b müssen sich unter den Fixpunkten der durch $z'_\alpha = z_{4\alpha}$ dargestellten Collineation finden. Setzen wir aber diese z'_α den z_α proportional, so finden sich als solche Fixpunkte ausser dem nicht auf der C_4 gelegenen Punkte $z_1 : z_2 : z_4 = 1 : 1 : 1$ noch die beiden:

$$(1) \qquad z_1 : z_2 : z_4 = 1 : \varrho^{\pm 1} : \varrho^{\mp 1},$$

welche Punkte vermöge der besonderen von uns in Fig. 103 festgehaltenen Maassverhältnisse keine anderen sind, *als die zu unserem Coordinatensystem gehörenden beiden imaginären Kreispunkte auf der unendlich fernen Geraden.* Diese letzteren Punkte liegen denn auch thatsächlich auf der C_4, wie man sofort bestätigt, und liefern *in der unendlich fernen Geraden des Coordinatensystems*

$$(2) \qquad z_1 + z_2 + z_4 = 0$$

(als ihrer Verbindungslinie) die gesuchte zu U gehörende Doppeltangente.

Von hieraus ist es nun ein Leichtes, die Coordinaten der übrigen Punkte b, sowie die Gleichungen der übrigen Doppeltangenten herzustellen. Wir haben zu dem Ende offenbar auf die Coordinaten (1) bez. auf die Gleichung (2) geeignete unter den Substitutionen (7) p. 705 auszuüben. Insbesondere stellen wir zum Zwecke späterer Verwendung die Gleichungen für die drei in Fig. (103) p. 702 sichtbaren Doppeltangenten auf und finden als solche:

$$(3) \qquad \varepsilon_1(\varepsilon^\alpha - \varepsilon^{-\alpha})^2 + \varepsilon_2(\varepsilon^{2\alpha} - \varepsilon^{-2\alpha})^2 + \varepsilon_4(\varepsilon^{4\alpha} - \varepsilon^{-4\alpha})^2 = 0,$$

wo α nach einander die Werte 1, 2, 4 annehmen soll. Wollen wir alsdann noch auf die vier Gleichungen (2) und (3) nach einander die sieben Operationen S^ν anwenden, so haben wir alle 28 Doppeltangenten gewonnen. —

Wir gehen weiter zur Besprechung der 21 gleichberechtigten G_2, die wir p. 381 in der G_{168} vorfanden, und deren einzelne jedesmal vier Punkte a zu Fixpunkten besass. Vorab haben wir ganz allgemein die Eigenart ternärer Collineationen der Periode zwei festzustellen, zu welchem Ende wir die nachfolgende Betrachtung anstellen.

Von einer Collineation, die jede Gerade der Ebene sich selbst zuordnet, erkennt man ohne weiteres, dass sie auch jeden Punkt der Ebene in sich überführt; eine solche muss also die identische Collineation sein. Ist uns also irgend eine Collineation V der Periode zwei vorgelegt, so wird es stets möglich sein, zwei Gerade $a_s = 0$, $b_s = 0$ derart ausfindig zu machen, dass sie durch V in die nicht mit ihnen zusammenfallenden Geraden $a'_s = 0$ und $b'_s = 0$ übergehen, und dass überhaupt von den vier so fixierten Geraden keine zwei über einander fallen. Da nun V die Periode zwei besitzt, so werden umgekehrt bei Ausübung von V die Geraden $a'_s = 0$ und $b'_s = 0$ wiederum in $a_s = 0$ und $b_s = 0$ übergehen, und wir entnehmen daraus das Resultat, dass der Schnittpunkt von $a_s = 0$ und $a'_s = 0$, sowie auch derjenige von $b_s = 0$ und $b'_s = 0$ durch V in sich selbst übergeht.

Auf diese Verhältnisse gründen wir nun eine neue Coordinatenbestimmung in der zu Grunde liegenden Ebene. Die Verbindungslinie der beiden soeben für V gewonnenen Fixpunkte sei $x_1 = 0$, während $a_s = 0$ und $b_s = 0$ bez. die Seiten $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ des neuen Coordinatendreiecks liefern mögen. Die Collineation V dürfen wir dann unter Aufnahme eines Proportionalitätsfactors σ in der Gestalt ansetzen:

$$\sigma x_1' = -x_1, \quad \sigma x_2' = ax_1 + bx_2, \quad \sigma x_3' = cx_1 + dx_3$$

und wollen nun der Forderung Ausdruck geben, dass die so aufgeschriebene Collineation die Periode zwei besitzt. Eine leichte Rechnung

ergiebt, dass dies nur für $b = d = 1$ der Fall ist, womit sich V in der Gestalt darstellt:

$$(4) \qquad \sigma x_1' = -x_1, \quad \sigma x_2' = ax_1 + x_2, \quad \sigma x_3' = cx_1 + x_3.$$

Jetzt schreiben wir unter erneuter Änderung des Coordinatensystems:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = ax_1 + 2x_2, \quad y_3 = cx_1 + 2x_3$$

und transformieren damit die Formeln (4) in

$$(5) \qquad \sigma y_1' = -y_1, \quad \sigma y_2' = y_2, \quad \sigma y_3' = y_3.$$

Auf Grund dieses Resultats ist V eine solche Collineation, die man als eine *Perspectivität**) zu bezeichnen pflegt. Festbleibende Elemente von V sind einerseits alle Punkte der Geraden $y_1 = 0$, der „Axe der Perspectivität", überdies aber noch der ausserhalb der Axe gelegene Punkt $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, das „Centrum der Perspectivität". Alle übrigen Punkte permutieren sich zu Paaren, und zwar so, dass die Verbindungslinie je zweier durch V einander zugeordneter Punkte durch das Centrum $y_2 = y_3 = 0$ geht. Ist hiermit der allgemeine Charakter der Perspectivitäten gekennzeichnet, so kommt für unsere besondere Operation V auf Grund von (5) noch die specielle Eigenschaft hinzu, dass je zwei einander zugeordnete Punkte durch den Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit der Axe einerseits und durch das Centrum der Perspectivität andrerseits von einander harmonisch getrennt sind. In diesem Sinne benennen wir V als harmonische Perspectivität und haben als Resultat unserer nun beendeten Zwischenbetrachtung den Satz: *Jede Collineation der Periode zwei ist eine harmonische Perspectivität.*

Dieser Satz klärt uns zugleich im wesentlichen über die nun zu betrachtende geometrische Bedeutung der 21 gleichberechtigten G_2 auf, welche wir p. 381 in der G_{168} fanden. Wir haben in dieser Hinsicht offenbar den Satz: *Den G_2 entsprechend geht unsere C_4 durch 21 harmonische Perspectivitäten in sich über.* Bei einer Perspectivität der C_4 in sich bleiben notwendig die vier Schnittpunkte der bezüglichen Axe mit der C_4 an ihrer Stelle. Also weiter das Resultat: *Die 84 sextactischen Punkte der C_4 werden von 21 geraden Linien, nämlich von den zu den in Rede stehenden Perspectivitäten gehörenden Axen ausgeschnitten.* Da aber die einzelne G_2 nur vier Fixpunkte auf der Fläche F_{168} hatte, *so werden die 21 Perspectivitätscentren selber nicht auf der Curve vierter Ordnung gelegen sein.*

*) Vergl. z. B. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* (Leipzig, 1876) p. 256.

Hiermit ist die geometrische Bedeutung der in der G_{168} enthaltenen Collineationsgruppen G_3 und G_2 vollständig aufgewiesen*).

§ 7. Die in der G_{168} enthaltenen Collineationsgruppen G_6, G_4 und G_{24}.

In besonders beziehungsreicher Weise gestalten sich die geometrischen Resultate des vorigen Paragraphen aus, wenn wir nun auch noch die 28 Diedergruppen G_6 (cf. p. 377), sowie die $2 \cdot 7$ Vierergruppen G_4 und Oktaedergruppen G_{24} (cf. p. 382) in die Betrachtung hineinziehen.

Die einzelne der 28 gleichberechtigten G_3 erwies sich früher mit drei verschiedenen Operationen V_2 der Periode zwei vertauschbar, was sich uns geometrisch so darstellte, dass die beiden Fixpunkte der G_3 durch die fraglichen drei Operationen V_2 unter einander vertauscht wurden**). Wir werden jetzt folgern: Die einzelne Doppeltangente wird durch drei unter den 21 Perspectivitäten in sich transformiert, wobei dann die beiden Berührungspunkte derselben permutiert werden. *Es liegen sonach auf der einzelnen Doppeltangente stets drei Perspectivitätscentren, und es wird diese Tangente insgesamt gerade durch die Collineationen einer in der G_{168} enthaltenen G_6 in sich übergeführt*, in Übereinstimmung mit den Verhältnissen, die wir früher für die der Doppeltangente zugewiesene Symmetrielinie fanden.

Die einzelne V_2 beteiligte sich aber immer an vier verschiedenen unter den in Rede stehenden 28 gleichberechtigten Diedergruppen G_6. Durch die einzelne harmonische Perspectivität werden also immer zugleich vier Doppeltangenten der C_4 in sich übergeführt, so dass wir jetzt umgekehrt den Satz auszusprechen haben: *Durch das einzelne der 21 Perspectivitätscentren laufen insgesamt je vier Doppeltangenten hindurch.*

Wollen wir beispielsweise auf der zu U gehörenden durch (2) p. 707 gegebenen Doppeltangente die drei Perspectivitätscentren berechnen, die alsdann den Collineationen T, TU, TU^2 angehören werden, so bemerke man, dass dieselben offenbar durch die drei unter (3) p. 708 gegebenen reellen Doppeltangenten ausgeschnitten werden. Durch Auflösung der beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{gathered} s_1(\varepsilon^\alpha - \varepsilon^{-\alpha})^2 + s_2(\varepsilon^{2\alpha} - \varepsilon^{-2\alpha})^2 + s_4(\varepsilon^{4\alpha} - \varepsilon^{-4\alpha})^2 = 0, \\ s_1 + s_2 + s_4 = 0 \end{gathered}$$

*) In ausgiebiger Weise werden übrigens analytisch die Doppeltangenten, Perspectivitätsaxen etc. von Hrn. Haskell in der p. 702 genannten Abhandlung untersucht.

**) Man vergl. die geometrischen Erörterungen p. 378.

finden wir demnach sofort als Coordinaten der fraglichen drei Centren:

$$(2)\quad \begin{aligned} \varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_4 = &(\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{4\alpha} - \varepsilon^{-4\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}) \\ &: (\varepsilon^{2\alpha} - \varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{-\alpha} + \varepsilon^{-2\alpha}) : (\varepsilon^{4\alpha} - \varepsilon^{2\alpha} - \varepsilon^{-2\alpha} + \varepsilon^{-4\alpha}), \end{aligned}$$

wobei α nach einander die drei Zahlwerte 1, 2, 4 annehmen soll. Umgekehrt werden durch das unter (2) geschriebene Perspectivitätscentrum ausser den beiden Doppeltangenten (1) noch zwei weitere hindurchgehen. Wir finden, dass dieselben conjugiert imaginär ausfallen; denn eine elementare Rechnung ergiebt als ihre Gleichungen:

$$(3)\quad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon^{\pm 2\alpha}(\varepsilon^{4\alpha} - \varepsilon^{-4\alpha})^2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon^{\pm 4\alpha}(\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{-\alpha})^2 + \varepsilon_4 \cdot \varepsilon^{\pm \alpha}(\varepsilon^{2\alpha} - \varepsilon^{-2\alpha})^2 = 0.$$

Wir fanden oben (p. 378) für die einzelne G_6 ein System von vier Symmetrielinien, die sich gegenüber den Operationen der G_6 gerade so verhalten, wie die vier Symmetriekreise der Diederteilung $n = 3$ bei den bezüglichen Verschiebungen der Kugel in sich. Gehen wir von den Symmetrielinien der F_{168} zu den ihnen zugeordneten Doppeltangenten der C_4 über, so werden sich dort entsprechende Verhältnisse für die Collineationen der G_6 zeigen. Für dieselbe haben wir erstlich eine ausgezeichnete Doppeltangente, diejenige, welche wir schon bisher der in der G_6 enthaltenen G_3 zugeordnet fanden, sodann aber drei gleichberechtigte Doppeltangenten, deren sechs Berührungspunkte diejenigen Punkte b sind, welche, auf der F_{168} betrachtet, auf der zur eben genannten ausgezeichneten Doppeltangente gehörenden Symmetrielinie gelegen sind. Wir haben alsdann den Satz: *Bei den Collineationen der in Rede stehenden G_6 geht die ausgezeichnete Doppeltangente durchweg in sich selbst über, während sich die drei gleichberechtigten Doppeltangenten auf alle sechs Arten permutieren.*

Um auch hier ein Beispiel anzuführen, so gehört zu der aus T und U entspringenden G_6 als ausgezeichnete Doppeltangente im Falle unserer Figur die unendlich ferne Gerade (2) p. 307, während die drei reellen Doppeltangenten (3) p. 708 die drei gleichberechtigten sind. Man sieht in der That in Fig. 103 p. 702 direct, wie sich dieselben bei den sechs reellen Collineationen der C_4 unter einander permutieren. Multiplicieren wir die linken Seiten der drei Gleichungen (3) p. 708 mit einander, so kommt unter Forthebung des Factors -7:

$$(4)\quad (\varepsilon_1^3 + \cdot\cdot) + 5(\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + \cdot\cdot) + 6(\varepsilon_1^2\varepsilon_4 + \cdot\cdot) + 13\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4 = 0\ ^*).$$

Diese Gleichung wird offenbar bei den Collineationen der G_6 in sich über-

*) Durch die Punkte soll angedeutet werden, dass in der einzelnen Klammer neben jedes thatsächlich aufgeführte Glied noch die beiden anderen zu setzen sind, die aus ihm durch die Operationen U und U^2 entspringen.

gehen, und es wird ein Gleiches auch noch von der Gleichung gelten, die aus (4) *durch Multiplication mit* (2) p. 707 *entspringt:*

$$(5)\ (z_1^4+\cdot\cdot)+6(z_1^3z_2+\cdot\cdot)+11(z_1^2z_2^2+\cdot\cdot)+24z_1z_2z_4(z_1+\cdot\cdot)=0.-$$

An Vierergruppen gab es innerhalb der G_{168} zwei Systeme von je sieben solchen G_4, und es beteiligte sich die einzelne V_2 stets an einer einzelnen G_4 jedes Systems. Insgesamt ist also V_2 mit weiteren vier Operationen der Periode zwei vertauschbar, und das heisst nun offenbar geometrisch: *Auf der einzelnen der 21 Perspectivitätsaxen liegen jedesmal vier Perspectivitätscentra, so dass umgekehrt durch jedes Centrum vier solche Axen gehen müssen.* Greifen wir eine einzelne Vierergruppe auf, so werden sich die drei zugehörigen Axen offenbar zu einem Dreieck zusammenlegen, in dem jede Ecke das zur gegenüberliegenden Seite gehörende Centrum ist. Das Verhalten der Seiten dieses Dreiecks gegenüber den Operationen der G_4 werden wir dem Verhalten der drei Symmetriekreise der Viererteilung (Fig. 22, p. 80) an die Seite zu stellen haben. *Übrigens werden sich die 21 Axen auf zwei Weisen zu je sieben solchen Dreiecken zusammenordnen lassen.* Diese $2\cdot 7$ Dreiecke sind dann ihrerseits den $2\cdot 7$ Oktaedergruppen G_{24}, welche sich innerhalb der G_{168} finden, in dem Sinne eindeutig zugeordnet, dass das einzelne Dreieck, als ganzes betrachtet, bei den Collineationen seiner G_{24} in sich übergeht; die Seiten des Dreiecks werden sich dabei auf alle sechs möglichen Weisen permutieren.

Vor allem aber ist es wichtig, betreffs der zwei Systeme von je sieben Oktaedergruppen G_{24} noch die folgende Betrachtung durchzuführen: Innerhalb der einzelnen G_{24} sind vier gleichberechtigte G_3 enthalten, welche sich bei Transformation durch die Operationen der G_{24} auf alle 24 Weisen permutieren. (Sie entsprechen ja den vier Würfeldiagonalen in der Oktaederconfiguration, und diese werden thatsächlich durch die Oktaederdrehungen auf alle Weisen permutiert.) Den G_3 aber sind die Doppeltangenten der C_4 zugeordnet; also der Satz: *Jeder Oktaedergruppe G_{24} innerhalb der G_{168} ist ein Quadrupel von Doppeltangenten zugeordnet, die sich bei den Collineationen der G_{24} auf alle 24 Weisen permutieren. Die 28 Doppeltangenten aber lassen sich auf zwei verschiedene Arten zu je sieben Quadrupeln dieser Art anordnen, so dass die einzelne Doppeltangente jedesmal an einem Quadrupel der einen und an einem Quadrupel der andern Art teilnimmt.*

Über die gegenseitigen Lagerungsverhältnisse der Doppeltangenten eines einzelnen solchen Quadrupels gewinnen wir nun leicht in folgender Weise Aufschluss: Wir greifen eine einzelne Doppeltangente t auf, welche im Sinne unseres soeben erhaltenen Resultates zur G_{24} gehören.

Die zu t gehörende G_3 wird sich dann in der G_{24} finden; entspringe diese G_3 etwa aus V_3. Auf t liegen insgesamt drei Perspectivitätscentra, und man bemerkt sofort, dass die drei zugehörigen V_2 in G_{24} enthalten sind*). Die einzelne V_2 ist aber infolge der Structur der Oktaedergruppe noch mit *einer* zweiten G_3 innerhalb der G_{24} vertauschbar, so dass durch das fragliche Centrum von V_2 noch *eine* zweite Tangente des Quadrupels hindurchzieht. Jetzt erinnern wir uns, dass durch dieses Centrum ausser t insgesamt noch drei Tangenten t_1, t_2, t_3 hindurchziehen, welch' letztere durch Ausübung von V_3 und V_3^2 in t_1', t_2', t_3' bez. t_1'', t_2'', t_3'' übergehen mögen. Unser Quadrupel ist dann offenbar eines von den dreien:

$$(6) \qquad (t, t_i, t_i', t_i''), \quad i = 1, 2, 3.$$

Aber eines von diesen Quadrupeln wird mit dem unter (5) gegebenen gleichberechtigt sein und gehört wie jenes einem System von 28 gleichberechtigten Quadrupeln an. *Die beiden dann noch bleibenden Quadrupel* (6) *sind nun offenbar gerade diejenigen beiden gesuchten, an denen sich t beteiligt.*

Sollen wir auch hier ein Beispiel durchrechnen, so wählen wir etwa wieder für t die unendlich ferne Doppeltangente unserer Figur und haben derselben dann ersichtlich die beiden unter (3) p. 711 gegebenen Tripel zuzufügen. Sind diese beiden Quadrupel etwa durch $Q_t = 0$ und $Q_t' = 0$ dargestellt, so finden wir nach kurzer Rechnung für Q_t und Q_t' die ausführlichen Gestalten:

$$(7) \quad \begin{cases} Q_t = (z_1^4 + \cdot\cdot) - (1 - i\sqrt{7})(z_1^3 z_2 + \cdot\cdot) + \frac{1-i\sqrt{7}}{2}(z_1^2 z_2^2 + \cdot\cdot) \\ \qquad\qquad - 4 z_1 z_2 z_4 (z_1 + \cdot\cdot), \\ Q_t' = (z_1^4 + \cdot\cdot) - (1 + i\sqrt{7})(z_1^3 z_2 + \cdot\cdot) + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}(z_1^2 z_2^2 + \cdot\cdot) \\ \qquad\qquad - 4 z_1 z_2 z_4 (z_1 + \cdot\cdot). \end{cases}$$

—

Hiermit findet die geometrische Interpretation der Untergruppen der G_{168}, die sich also durch blosse Benutzung der Doppeltangenten und Perspectivitätsaxen formulieren lässt, ihren Abschluss.

§ 8. Die drei Arten von Kegelschnitten durch acht Punkte b.

Die Resultate unserer bisherigen Untersuchungen über die Curve vierter Ordnung der s_α benutzen wir jetzt zu einer Reihe fernerer Entwicklungen, welche uns späterhin namentlich für die Betrachtung der Resolventen des Galois'schen Problems 168ten Grades nützlich sein werden.

---

*) Da die Oktaedergruppe Untergruppen G_6 enthält.

Wir greifen irgend vier Doppeltangenten unserer C_4 auf, multiplicieren die linken Seiten ihrer Gleichungen mit einander und finden so das fragliche Quadrupel durch eine Gleichung vierten Grades dargestellt, die wir abkürzend durch $Q = 0$ bezeichnen. Dem Viereck $Q = 0$ ist alsdann unsere Curve vierter Ordnung $f(z_\alpha) = 0$ in dem Sinne eingeschrieben, dass die C_4 jede Seite des Vierecks in zwei Punkten b berührt. Aber man bemerke, dass in demselben Sinne überhaupt jede C_4 des ganzen Büschels

$$Q + \varkappa f = 0 \tag{1}$$

dem fraglichen Viereck eingeschrieben ist, indem sie gleichzeitig das Viereck $Q = 0$ wieder in den nämlichen acht Punkten b berührt. Die Frage, die wir hier aufwerfen wollen, ist nun die, ob sich vielleicht im Büschel der Curven vierter Ordnung (1) doppelt zählende Kegelschnitte finden. Einfach gezählt würde ein solcher Kegelschnitt auf dem Viereck $Q = 0$ die acht in Rede stehenden Punkte b ausschneiden*).

Nun lernten wir im vorigen Paragraphen drei besondere Systeme von Quadrupeln Q kennen, deren erstes 28 gleichberechtigte, deren letzte je sieben gleichberechtigte Quadrupel umfasste. Als Beispiel für das erste System haben wir für $Q = 0$ die unter (5) p. 712 explicite gegebene Gleichung einzusetzen. Dieses specielle Quadrupel besteht aus den drei in Fig. 103 p. 702 sichtbaren reellen Doppeltangenten im Verein mit der unendlich fernen Geraden der Ebene und ist der G_6 der reellen Collineationen der C_4 in sich zugeordnet. Da haben wir nun in der Figur direct vor Augen, dass im zugehörigen Büschel der C_4 ein doppelt zählender Kegelschnitt enthalten ist. In der That liegen ja die sechs reellen Punkte b, wie in der Figur angedeutet, auf einem Kreise; dieser geht dann von selbst durch die beiden in Betracht kommenden imaginären Punkte b, welche ja durch die beiden imaginären Kreispunkte gebildet werden. Die Rechnung bestätigt dieses Resultat sofort. Die Gleichung des Kegelschnitts werden wir in der Gestalt:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_4^2 + a(z_2 z_4 + z_4 z_1 + z_1 z_2) = 0 \tag{2}$$

anzusetzen haben. Weiter tragen wir in (1) für Q und f ihre Ausdrücke (5) p. 712 und (1) p. 701 ein und haben dann $\varkappa$ in solcher Weise zu bestimmen, dass $(Q + \varkappa f)$ das Quadrat der linken Seite

*) Die allgemeinere Theorie der Curven 4ter Ordnung belehrt uns, dass die Frage des Textes in der That für 315 der aus den Doppeltangenten aufzustellenden Quadrupel zu bejahen ist; vergl. z. B. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, p. 852; wir verfolgen dies indes im Texte nicht weiter.

von (2) wird. Das ist, wie man leicht ausrechnet, nur in einer Weise möglich, nämlich für $\varkappa = 6$, $a = 3$:

$$Q + 6f = (z_1^2 + z_2^2 + z_4^2 + 3z_1z_2 + 3z_2z_4 + 3z_4z_1)^2.$$

Wir erhalten also in

(3) $$z_1^2 + z_2^2 + z_4^2 + 3(z_1z_2 + z_2z_4 + z_4z_1) = 0$$

einen Kegelschnitt durch die fraglichen acht Punkte b, und dieser Kegelschnitt gehört natürlich selbst wieder einem System von 28 bezüglich der G_{168} gleichberechtigten Kegelschnitten an.

Noch sehr viel folgenreicher wird es, wenn wir jetzt die beiden Systeme von je sieben Quadrupeln heranziehen, von denen die in (7) p. 713 gegebenen Q_ι und Q'_ι Beispiele sind. Auch hier findet sich im einzelnen Büschel der C_4 jedesmal *ein* doppelt zählender Kegelschnitt, indem wir z. B.

$$Q_\iota - (1 - i\sqrt{7})f = \left\{z_1^2 + z_2^2 + z_4^2 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}(z_1z_2 + z_2z_4 + z_4z_1)\right\}^2$$

sofort bestätigen. Die sieben gleichberechtigten Kegelschnitte gehen aber aus einem unter ihnen durch wiederholte Anwendung der Operation S hervor*). Also haben wir das nachfolgende wichtige Resultat zu formulieren: *Die 56 Punkte der C_4 lassen sich auf zwei verschiedene Arten zu je acht durch sieben gleichberechtigte Kegelschnitte ausschneiden. Die Kegelschnitte der einen Art sind gegeben durch*:

(4) $$\varepsilon^\nu z_1^2 + \varepsilon^{2\nu} z_2^2 + \varepsilon^{4\nu} z_4^2 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}(\varepsilon^{5\nu} z_1z_2 + \varepsilon^{3\nu} z_2z_4 + \varepsilon^{6\nu} z_4z_1) = 0,$$

diejenigen der anderen Art durch:

(5) $$\varepsilon^\nu z_1^2 + \varepsilon^{2\nu} z_2^2 + \varepsilon^{4\nu} z_4^2 - \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}(\varepsilon^{5\nu} z_1z_2 + \varepsilon^{3\nu} z_2z_4 + \varepsilon^{6\nu} z_4z_1) = 0.$$

Wie die zuletzt betrachteten Doppeltangentenquadrupel, so sind die $2 \cdot 7$ Kegelschnitte (4) und (5) den $2 \cdot 7$ Oktaedergruppen G_{24} eindeutig zugeordnet, und zwar so, *dass der einzelne Kegelschnitt durch die 24 Collineationen seiner G_{24} in sich übergeführt wird.* Wir stellen uns aber hier sogleich auf den noch allgemeineren Standpunkt, dass wir die linken Seiten der Gleichungen (4) und (5) als *Modulformen siebenter Stufe* $(-4)^{\text{ter}}$ *Dimension* auffassen. Merken wir uns sogleich für die spätere Anwendung, dass die einzelne dieser Formen im Polygon erstlich an bestimmten acht mit $\omega = \varrho$ äquivalenten Stellen je einfach, ausserdem aber in allen Spitzen je zweifach verschwindet**), sonst indessen

*) Man bemerke etwa, dass die Operationen 1, S, S^2, ..., S^6 ein Repräsentantensystem für die zugehörige G_{24} abgeben.

**) Infolge der bezüglichen Eigenschaft der z_α.

allenthalben endlich und von Null verschieden ist. Die einzelne unserer $2 \cdot 7$ Modulformen wird sich gegenüber den Operationen ihrer G_{24} je bis auf einen Factor reproducieren. Da indessen die G_{24} aus einer V_4 und einer V_2 zu erzeugen ist, welche in $V_4 V_2$ eine Operation V_3 liefern, so sieht man leicht, *dass sich die fragliche Form bei den 24 Operationen bis auf das Vorzeichen reproduciert.* Wir werden später leicht erkennen, dass sie überhaupt unverändert bleibt.

§ 9. Die Berührungscurven dritter Ordnung der C_4. Ausgezeichnetes System derselben.

Ein besonders interessanter Teil der Theorie der Curven vierter Ordnung handelt von den *Berührungscurven dritter Ordnung* derselben*). In der Absicht, einzelne derselben für unsere besondere C_4 der z_α näher zu betrachten, bringen wir vorab folgende allgemeine Sätze in Erinnerung.

Wird eine durch $f = 0$ dargestellte C_4 von der durch $g = 0$ gegebenen C_3 in sechs Punkten einfach berührt, so nennen wir die C_3 eine Berührungscurve der C_4. Für eine nicht zerfallende C_4 können wir stets Berührungscurven C_3 angeben; jedes beliebig aufgegriffene Tripel von Doppeltangenten bildet eine solche. Aber es gelingt leicht, von der einzelnen durch $g = 0$ dargestellten Berührungs-C_3 aus ein ganzes System von ∞^3 derartigen Curven für die C_4 aufzustellen. Es gehen nämlich durch die sechs Berührungspunkte von $g = 0$ insgesamt noch ∞^3 Curven dritter Ordnung der Ebene, da die einzelne C_3 erst durch neun ihrer Punkte bestimmt ist. Dieses System von ∞^3 Curven dritter Ordnung schneidet ausser den sechs Berührungspunkten von $g = 0$ die C_4 noch in ∞^3 ferneren Punktsextupeln, *und jedes solche Sextupel liefert*, wie wir behaupten, *das System der Berührungspunkte für eine gewisse Berührungs-C_3 der Curve vierter Ordnung.*

Sei nämlich $h = 0$ eine beliebige unter den ∞^3 Curven dritter Ordnung durch die sechs Berührungspunkte von $g = 0$, so geht die durch $h^2 = 0$ dargestellte C_6 durch die sämtlichen zwölf Schnittpunkte von $f = 0$ und $g = 0$. Dieserhalb lässt sich vermöge einer bekannten Schlussweise der Geometrie die linke Seite der Gleichung $h^2 = 0$ in der Gestalt darstellen:

$$h^2 = \mathsf{A}(z) \cdot f + \mathsf{B}(z) \cdot g, \tag{1}$$

wobei A und B ganze homogene Functionen zweiten bez. dritten Grades

*) Man vergl. betreffs derselben etwa Clebsch-Lindemann, *Vorl. über Geometrie* p. 852, sowie die Entwicklungen über Wurzelfunctionen dritter Ordnung in Weber, *Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3* (Berlin, 1876) p. 119.

der drei homogenen Coordinaten sind. Hier erblickt man nun aufs leichteste in $B = 0$ diejenige Berührungs-C_3, welche im Sinne unserer Behauptung zur Curve $h = 0$ gehört.

Nebenher bemerken wir, dass es für eine C_4 insgesamt 64 verschiedene Systeme von je ∞^3 derartigen Berührungscurven C_3 giebt, 36 von gerader, 28 von ungerader Charakteristik, wie man im Anschluss an die Theorie der zugehörigen ϑ-Functionen sagt*). Die 28 Systeme der letzteren Art stehen zu den 28 Doppeltangenten der C_4 in einer charakteristischen Beziehung, worüber man die angegebenen Litteraturnachweise vergleichen wolle. Vor allem aber merken wir uns noch den Satz: *Zwei durch* $B = 0$ *und* $g = 0$ *dargestellte Berührungs-*C_3 *gehören stets und nur dann demselben Systeme an, wenn* B *und* g *einer Gleichung*

$$Bg = h^2 - Af \tag{2}$$

genügen können oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die zwölf Berührungspunkte von $B = 0$ *und* $g = 0$ *auf einer Curve dritter Ordnung* $h = 0$ *liegen.*

Indem wir jetzt zu unserer speciellen C_4 der ε_α zurückkehren, bemerken wir, dass offenbar auch deren acht Wendedreiecke als Berührungscurven C_3 aufgefasst werden können, wobei dann die sechs Berührungspunkte jeder einzelnen dieser Curven noch zu Paaren an drei Stellen c coincidieren. Diesen besonderen Berührungscurven soll nun unsere fernere Betrachtung gelten, und wir versehen uns demnach vor allen Dingen mit den Gleichungen derselben. Als erstes Wendedreieck nehmen wir etwa unser Coordinatendreieck der ε_α, welches also durch $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4 = 0$ dargestellt ist. Ein zweites entspringt aus ihm durch die Operation T, aus dem so gewonnenen die übrigen sechs durch Ausübung der Operationen S, $S^2, \ldots, S^6$. Um die entstehenden Formeln in bequemer Gestalt zu haben, schreiben wir

$$\Delta\, \delta_\infty = 7\, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4,$$

wobei der Factor Δ linker Hand spätèrhin mit der Discriminante der Modulfunctionen identisch gesetzt werden soll und zur Vereinfachung weiterhin auftretender Formeln aufgenommen wurde. Wir schreiben alsdann weiter $\delta_\nu(\omega_1, \omega_2) = \delta_\infty(-\omega_2, \omega_1 + \nu\omega_2)$, wobei ν die Zahlen $0, 1, \ldots, 6$ durchlaufen soll. Eine kurze Rechnung ergiebt:

*) Diese Systeme sind zuerst von Hesse untersucht worden; siehe dessen Abhandlung: *Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung,* Crelle's Journ. Bd. 49 (1855). Wegen der Beziehung zu den Thetafunctionen vergl. Clebsch: *Über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie,* Cr. Journ. Bd. 63 (1864), sowie Clebsch-Lindemann und Weber l. c.

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta\delta_\infty = +7 z_1 z_2 z_4, \\ \Delta\delta_\nu = -z_1 z_2 z_4 + \varepsilon^{5\nu}(z_1^3 - z_4^2 z_2) + \varepsilon^{3\nu}(z_2^3 - z_1^2 z_4) + \varepsilon^{6\nu}(z_4^3 - z_2^2 z_1) \\ \qquad\qquad - 2(\varepsilon^{2\nu} z_1^2 z_2 + \varepsilon^{4\nu} z_2^2 z_4 + \varepsilon^{\nu} z_4^2 z_1); \end{cases}$$

durch Nullsetzen dieser acht Ausdrücke sind dann unsere acht Wendedreiecke dargestellt.

Fügen wir gleich noch an, dass diese acht Dreiecke ohne weiteres den acht gleichberechtigten halbmetacyclischen G_{21} zugeordnet sind, wie wir denn schon wiederholt sahen, dass $\Delta\delta_\infty$, als Modulform 7ter Stufe gedeutet, bei allen Operationen

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\delta}, \text{ (mod. 7)}$$

unverändert bleibt. Bei den 168 Collineationen der z_α bilden die in Rede stehenden 8 Dreiecke eine Permutationsgruppe F_{168}, als deren Erzeugende wir uns merken:

$$(4)\quad \begin{cases} S\colon\ \delta_\infty(\omega_1+\omega_2, \omega_2) = \delta_\infty(\omega_1, \omega_2), \quad \delta_\nu(\omega_1+\omega_2, \omega_2) = \delta_{\nu+1}(\omega_1, \omega_2), \\ T\colon\ \delta_\infty(-\omega_2, \omega_1) = \delta_0(\omega_1, \omega_2), \quad \delta_\nu(-\omega_2, \omega_1) = \delta_{-\frac{1}{\nu}}(\omega_1, \omega_2), \end{cases}$$

wobei in den beiden rechts stehenden Gleichungen die Indices mod. 7 zu nehmen sind.

Es drängt sich nunmehr die Frage auf, zu wieviel verschiedenen unter den 64 Systemen von Berührungs-C_3 die acht Wendedreiecke gehören. *Sie sind, behaupten wir, alle in dem nämlichen Systeme enthalten.* Wir zeigen dies ohne weiteres, indem wir bemerken, dass unsere δ die folgende Identität befriedigen:

$$(5)\quad -\frac{1}{7}\Delta\delta_\infty \cdot \Delta\delta_\nu = h_\nu^2(z_\alpha) - (\varepsilon^{6\nu} z_1 z_4 + \varepsilon^{3\nu} z_4 z_2 + \varepsilon^{5\nu} z_2 z_1) f(z_\alpha),$$

h dabei abkürzend in der Bedeutung gebraucht:

$$(6)\qquad h_\nu(z_\alpha) = z_1 z_2 z_4 + \varepsilon^{3\nu} z_1^2 z_4 + \varepsilon^{5\nu} z_4^2 z_2 + \varepsilon^{6\nu} z_2^2 z_1.$$

Es giebt also für unsere besondere C_4 der z_α ein ausgezeichnetes System von Berührungscurven dritter Ordnung*), dasjenige, welches unsere acht Wendedreiecke in sich enthält. *Ein System von Curven dritter Ordnung $h = 0$, das in seinen beweglichen Schnittpunkten mit der C_4 die Berührungspunktsextupel für unser in Rede stehendes System von Berührungs-C_3 ausschneidet, werden wir im Anschluss an* (5) *darstellen durch:*

$$(7)\qquad h(z_\alpha) = \varkappa_0 z_1 z_2 z_4 + \varkappa_1 z_1 z_2^2 + \varkappa_2 z_2 z_4^2 + \varkappa_4 z_4 z_1^2 = 0.$$

In der That bemerkt man sofort durch directe Rechnung, dass jede

*) und zwar von gerader Charakteristik, weil sonst eine der 28 Doppeltangenten vor den anderen ausgezeichnet sein müsste, was, wie wir wissen, bei unserer Curve nicht der Fall ist.

der durch (7) gegebenen ∞^3 Curven dritter Ordnung mit unserer C_4 in den Ecken des Coordinatendreiecks der z_α, wie es sein muss, je zwei Schnittpunkte gemein hat. *Die zur einzelnen Curve* $h(z_\alpha) = 0$ *gehörende Berührungscurve dritter Ordnung ist dann durch*

$$\Delta g = -\varkappa_0^2 z_1 z_2 z_4 + (\varkappa_1^2 z_1^3 + \cdot\cdot) - 2(\varkappa_1 \varkappa_2 z_2^2 z_4 + \cdot\cdot) - [(2\varkappa_0 \varkappa_1 - \varkappa_4^2) z_1 z_2^2 + \cdot\cdot] = 0 \tag{8}$$

gegeben, wobei wir die für die linke Seite dieser Gleichung eingeführte Abkürzung Δg in Übereinstimmung mit Formel (5) wählten. Wirklich zeigt man ja sofort durch directe Rechnung das identische Bestehen der Gleichung:

$$-\tfrac{1}{7} \Delta \delta_\infty \cdot \Delta g = h^2 - (\varkappa_1^2 z_1 z_2 + \varkappa_2^2 z_2 z_4 + \varkappa_4^2 z_4 z_1) \cdot f. \tag{9}$$

Wie sich hier die Gleichungen (3) und (5) unter (7) und (8) subsumieren, wird man sofort überblicken. — Für Gleichung (7) machen wir endlich noch die zusätzliche Bemerkung, dass wir natürlich an Stelle von $\Delta \delta_\infty = 0$ jedes der sieben anderen Wendedreiecke gerade so gut zum Ausgangspunkte für die Construction eines Netzes von C_3 hätten machen können, das dieselben Punktsextupel auf der C_4 ausschneidet wie (7).

§ 10. Einführung des Modulsystems der A_γ.

Die Entwicklungen des voraufgehenden Paragraphen werden besonders folgenreich, falls wir die z_α nun wieder als Moduln der siebenten Stufe ansehen wollen. Dieser Annahme gemäss werden wir $f(z_\alpha) = 0$ zu setzen haben, und damit entnehmen wir aus den Gleichungen (5) und (9) des vorigen Paragraphen durch Wurzelziehung:

$$\sqrt{\delta_\infty} \cdot \sqrt{\delta_\nu} = i\sqrt{7} \cdot \frac{h_\nu}{\Delta}, \quad \sqrt{\delta_\infty} \cdot \sqrt{g} = i\sqrt{7} \cdot \frac{h}{\Delta}. \tag{1}$$

Es zeigt sich sonach, dass die Producte $\sqrt{\delta_\infty} \cdot \sqrt{\delta_\nu}$, sowie ganz allgemein $\sqrt{\delta_\infty} \cdot \sqrt{g}$ Moduln der siebenten Stufe sind. Da knüpfen wir nun unsere weitere Entwicklung an die Frage, ob vielleicht dasselbe von den Factoren $\sqrt{\delta_\infty}$, $\sqrt{\delta_\nu}$ etc. einzeln gilt. Thatsächlich werden wir diese Frage im bejahenden Sinne zu beantworten haben: *Die fraglichen Factoren sind, auch einzeln genommen, eindeutige Modulformen, und zwar solche der* 7ten *Stufe,* welches letztere wir übrigens erst durch Aufnahme des Bestandteils Δ in die Formeln des vorigen Paragraphen bewirkt haben.

Die geschehene Behauptung brauchen wir ersichtlich nur für eine einzelne unter den Grössen $\sqrt{g}$, etwa für $\sqrt{\delta_\infty}$ zu beweisen; damit

gilt sie dann zugleich für alle. Wir gehen zu dem Ende auf die erste Formel (3) p. 718 zurück und interpretieren im Anschluss an dieselbe $z_1 z_2 z_4 \Delta^{-1}$ als Modulform siebenter Stufe sechster Dimension, um insbesondere die Null- und Unstetigkeitspunkte derselben auf dem Polygon F_{168} aufzuzählen. Aber es ist erstlich jedes z_α im einzelnen Punkte c einfach Null, während Δ dortselbst je siebenfach verschwindet. Überdies kommen noch diejenigen zwölf Nullpunkte hinzu, welche von den Schnittpunkten der C_4 mit $z_1 z_2 z_4 = 0$ herrühren. Bei der bekannten Lage der letzteren ziehen wir sogleich zusammenfassend den Schluss: $z_1 z_2 z_4 \Delta^{-1}$ wird in den 24 Puncten c je vierfach unendlich, ausgenommen die drei Eckpunkte des Wendedreiecks $\Delta \delta_\infty = 0$, in welchen letzteren die in Rede stehende Grösse endlich und nicht-verschwindend bleibt; das letztere gilt dann von $z_1 z_2 z_4 \Delta^{-1}$ zugleich in allen übrigen Punkten des Polygons F_{168}.

Wenn wir nun im Anschluss an diese Überlegung von $z_1 z_2 z_4 \Delta^{-1}$ durch Wurzelziehung zu

$$A_0 = \sqrt{\frac{z_1 z_2 z_4}{-\Delta}} \tag{2}$$

übergehen (welche Bezeichnung wir an Stelle von $\sqrt{\delta_\infty}$ einführen), so haben wir damit nach bekannten Sätzen *eine eindeutige Modulform dritter Dimension* definiert*), welche sich bei Operationen der Hauptcongruenzgruppe siebenter Stufe, vielleicht vom Zeichen abgesehen, reproduciert. Inzwischen werden wir später noch sehen, dass die Modulform A_0 gegenüber den genannten Operationen direct unverändert bleibt, und wir benennen sie in diesem Sinne schon jetzt als *einen Modul der siebenten Stufe.* Unter Vorbehalt dieses letzteren Nachweises hat sich sonach unsere obige Behauptung betreffs der $\sqrt{g}$ bestätigt. — Für die nächsten Entwicklungen ist es übrigens hinreichend, in A_0 und damit in den $\sqrt{g}$ überhaupt (eindeutige) Modulformen erkannt zu haben.

Die Modulform A_0, mit der wir uns jetzt weiter beschäftigen, ist, wie aus der bisherigen Überlegung ohne weiteres hervorgeht, *in den 21 von den Eckpunkten des Coordinatendreiecks der z_α verschiedenen Punkten c je zweifach unendlich, in allen übrigen Punkten der F_{168}, die drei rückständigen Punkte c eingeschlossen, erweist sich A_0 endlich und nicht-verschwindend. Dass A_0 einer von acht gleichberechtigten Moduln ist, welche den acht Wendedreiecken und damit den acht G_{21} eindeutig zugeordnet sind,* wird man sogleich überblicken.

*) Man bemerke z. B., dass $A_0^4 \Delta$ eine Modulfunction 7ter Stufe ist, welche nur in den Spitzen des Polygons 0 oder ∞ wird; demgemäss ist bekanntlich (cf. p. 659) $\sqrt[4]{\Delta A_0^4}$ Modulfunction und also A_0 Modulform.

Weiter wird man es baldigst als fundamental anerkennen, wenn wir unter allen ferneren Moduln $\sqrt{g}$ gewisse drei näher in Betracht ziehen, die wir etwa durch Rückgang auf (8) p. 719 einführen. Indem wir $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ setzen, gewinnen wir in $\sqrt{g}$ wiederum den Modul A_0. Nehmen wir jetzt ein zweites Mal $x_1 = 1$, sodann $x_2 = 1$, endlich $x_4 = 1$ und jeweils die drei anderen Grössen verschwindend, so reihen sich dementsprechend dem A_0 die drei weiteren Moduln an:

$$(3)\quad A_1 = \sqrt{\frac{z_1^3 + z_2 z_4^2}{\Delta}},\quad A_2 = \sqrt{\frac{z_2^3 + z_4 z_1^2}{\Delta}},\quad A_4 = \sqrt{\frac{z_4^3 + z_1 z_2^2}{\Delta}}.$$

Was zunächst die gruppentheoretische Stellung dieser Moduln angeht, so sieht man, dass sie sich von einer Einheitswurzel abgesehen gegenüber der Operation S reproducieren, durch U aber permutiert werden. Wir schliessen sofort: *Unsere Grössen gehören einem System von 24 gleichberechtigten Moduln an, die sich in acht, den G_{21} zugeordnete Tripel zerlegen.* So gehören die drei Moduln (3) mit A_0 zur nämlichen G_{21}.

Die vier Grössen A_γ sind bisher nur erst bis aufs Vorzeichen bestimmt, und um in diesem Betracht eine besondere Auswahl zu treffen, werden wir vorab für A_0 im Anschluss an (2) p. 702 die bei $\omega = i\infty$ gültige Annäherung festsetzen:

$$(4)\qquad A_0 = \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3 \cdot \varkappa^{\frac{5}{6}},$$

wo $\varkappa$ die schon in den eben citierten Formeln (2) p. 702 enthaltene numerische Constante ist. Eine analoge Festsetzung für die drei anderen A_γ aber möge man aus den Formeln:

$$(5)\qquad \frac{A_1}{A_0} = \frac{z_2}{z_4},\quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{z_4}{z_1},\quad \frac{A_4}{A_0} = \frac{z_1}{z_2}$$

entnehmen. Dieselben entspringen aus (2) und (3) unter Rücksicht auf $f(z_\alpha) = 0$ sehr leicht bis auf die Vorzeichen. Indem wir aber die letzteren wie in Formel (5) wählen, sind die A_γ nun in der That endgültig bestimmt.

Ihrerseits benutzen wir jetzt die Formeln (5) weiter, um bei dem bekannten Verhalten von A_0 und z_α die Null- und Unstetigkeitspunkte der drei anderen A_γ auf dem Polygon in Erfahrung zu bringen. Wir finden nach kurzer Betrachtung: *In den Punkten c wird A_γ je doppelt unendlich, ausgenommen allein die drei Eckpunkte c_α des Coordinatendreiecks*); A_γ wird nämlich im Punkte c_γ einfach ∞, im Punkte $c_{4\gamma}$ zweifach ∞, während es im Punkte $c_{2\gamma}$ im Grade drei verschwindet.* In allen übrigen Punkten des Polygons ist aber A_γ endlich und von Null verschieden.

*) c_α soll der Berührungspunkt der Tangente $z_\alpha = 0$ der C_4 sein.

Eine noch gleichmässigere Auffassung dieser Verhältnisse bilden wir uns dadurch, dass wir die vier Moduln A_γ in allen 24 Punkten c je mit einem zweifachen Unstetigkeitspunkte behaftet denken. Man bemerkt sofort, dass bei dieser Auffassung jedes A_γ insgesamt *sechs* Nullpunkte auf dem Polygon besitzt: *und zwar liegen dieselben für* A_0 *zu Paaren in den drei Punkten* c_γ, *während für* A_γ (*mit* $\gamma = 1, 2, 4$) *ein Nullpunkt bei* c_γ, *die übrigen fünf bei* $c_{2\gamma}$ *vereint liegen.* Abgesehen von den damit gekennzeichneten Null- und Unstetigkeitspunkten giebt es aber auf dem Polygon keine weiteren für unsere Modulformen A_γ.

Nunmehr bilde man sich mit beliebigen Constanten $\varkappa$ den Ausdruck

$$\varkappa_0 A_0 + \varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \varkappa_4 A_4 \tag{6}$$

und dividiere selbigen durch A_0. Der Quotient wird eine algebraische Function der F_{168} darstellen, und zwar eine solche mit sechs Unstetigkeitspunkten, sofern $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_4$ von Null verschieden sind. Zugleich bemerkt man, dass die fragliche Function nur dann mit einer Constanten (nämlich 0) identisch sein kann, wenn alle vier $\varkappa = 0$ sind; die vier A_γ sind also, wie wir sagen werden, linear-unabhängig. *In* (6) *haben wir demgemäss ein System von* ∞^3 *Moduln siebenter Stufe mit sechs beweglichen Nullpunkten gewonnen, und letztere Punktsextupel bilden* (um die Bezeichnungsweise von p. 562 u. f. zu brauchen) *eine* ∞^3*-fache Vollschaar.* Diese Schaar ist uns äusserst bekannt; indem wir nämlich auf Grund von (5) in dem mit Null identisch gesetzten Ausdruck (6) die A durch die z_α ersetzen, gelangen wir zu der unter (7) p. 718 gegebenen Gleichung $h(z_\alpha) = 0$ zurück. Bei der Bedeutung dieser letzteren Gleichung folgt ohne weiteres: *Das System der Nullpunkte von* (6) *erscheint, auf der* C_4 *betrachtet, direct mit den Berührungspunktsextupeln unseres ausgezeichneten Systems der Berührungs-*C_3 *identisch.* Man wird es also als Zweck der Einführung des Modulsystems der A_γ bezeichnen dürfen, dass wir vermöge dieser Grössen die oft genannte ∞^3-fache Schaar von Berührungspunktsextupeln in der einfachsten Weise, nämlich durch Nullsetzen des linearen Ausdrucks (6) zur Darstellung bringen können.

Von den mannigfachen, hieran knüpfenden Folgerungen behandeln wir zuvörderst diejenigen, welche uns zu den Formeln des vorigen Paragraphen zurückführen.

§ 11. Beziehungen zwischen $\sqrt{\delta}$ und A_γ. Das Substitutionssystem der A_γ.

Nachdem sich soeben für die Darstellung der ∞^3-fachen Vollschaar der oft genannten Punktsextupel bereits die vier Grössen A_γ als hin-

reichend erwiesen haben, ziehen wir eine beliebige unter den Modulformen $\sqrt{g}$ heran. Die sechs Berührungspunkte der durch $g = 0$ gegebenen Berührungs-C_3 (cf. Formel (1) p. 719) liefern die Nullpunkte der Form $\sqrt{g}$, und letztere bilden also eines der Punktsysteme der gemeinten Schaar. Hieraus entnimmt man mühelos, dass sich $\sqrt{g}$ in der Form (6) darstellen lassen muss, und in der That zieht man aus den Formeln des vorletzten Paragraphen nach kurzer Rechnung:

$$\sqrt{g} = \varkappa_0 A_0 + \varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_3 + \varkappa_4 A_4.$$

Darin sind die speciellen Formeln enthalten

$$(1) \qquad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty} = -i\sqrt{7}\,A_0, \\ \sqrt{\delta_\nu} = A_0 + \varepsilon^{-\nu} A_1 + \varepsilon^{-2\nu} A_2 + \varepsilon^{-4\nu} A_4, \end{cases}$$

die übrigens direct aus (5) p. 718 hervorgehen. *Ihnen zufolge stellen sich die acht Grössen* $\sqrt{\delta}$ *in den vier* A_γ *vermöge eines Jacobi'schen Schemas dar* (cf. p. 645). Wie übrigens beim Übergange von δ zu $\sqrt{\delta}$ die Vorzeichen dieser Moduln siebenter Stufe gewählt sind, geht aus den rechten Seiten der Gleichungen (1) hervor.

Durch zweckmässige Combination der Formeln (1) gelingt es, umgekehrt *die* A_γ *durch die Wurzeln* $\sqrt{\delta}$ *darzustellen*, und zwar in der folgenden Weise:

$$(2) \qquad \begin{cases} 7A_0 = i\sqrt{7}\,\sqrt{\delta_\infty} = \sum \sqrt{\delta_\nu}, \\ 7A_1 = \sum \varepsilon^{\nu} \sqrt{\delta_\nu}, \\ 7A_2 = \sum \varepsilon^{2\nu} \sqrt{\delta_\nu}, \\ 7A_4 = \sum \varepsilon^{4\nu} \sqrt{\delta_\nu}, \end{cases}$$

wobei die Summenzeichen sich auf ν beziehen und über die Werte $0, 1, 2, \cdots, 6$ auszudehnen sind. Andrerseits kommen die folgenden für die $\sqrt{\delta}$ bestehenden Identitäten:

$$(3) \qquad \sum \varepsilon^{-\nu} \sqrt{\delta_\nu} = 0, \quad \sum \varepsilon^{-2\nu} \sqrt{\delta_\nu} = 0, \quad \sum \varepsilon^{-4\nu} \sqrt{\delta_\nu} = 0.$$

Gegenüber den homogenen Modulsubstitutionen bilden die $\sqrt{\delta}$ eine Permutationsgruppe, bei der jedoch auch Zeichenwechsel der einzelnen Grössen eintreten werden. Die Ordnung der so entspringenden Gruppe wird übrigens nicht 168, sondern $2 \cdot 168$ sein. In der That haben wir ja nun mit Modulformen *ungerader* Dimension zu thun, die also bei Ausübung der homogenen Operation T^2 einen Zeichenwechsel erfahren. Hiermit erhalten wir auf Grund der Formeln (2) und (1)

zugleich über das Verhalten der A_γ bei homogenen Modulsubstitutionen Aufschluss. Ein transformiertes A_γ drücken wir linear durch die permutierten $\sqrt{\delta}$, i. e. durch die ursprünglichen $\sqrt{\delta}$ aus; letztere aber ersetzen wir nach (1) durch lineare Combinationen der ursprünglichen A_γ. Also der Satz: *Die vier Moduln* A_γ *reproducieren sich gegenüber homogenen Modulsubstitutionen linear**). *Dabei werden sie aber im Gegensatz zu den* z_α *als Modulformen ungerader Dimension eine quaternäre Substitutionsgruppe der Ordnung* $2 \cdot 168$ *bilden, die mit der homogenen* $G_{2 \cdot 168}$ *holoedrisch isomorph ist***).

Um das Substitutionssystem der A_γ zu berechnen, müssen wir etwa die Wirkung der beiden in (1) und (2) p. 57 fixierten homogenen Substitutionen S und T auf die A_γ bestimmen. Hier bietet zunächst S nicht die geringste Schwierigkeit. Da δ_∞ gegenüber S invariant ist, so kann A_0 höchstens noch einen Zeichenwechsel erfahren; indessen wird, wie man unter Gebrauch der Näherungsformel (4) p. 721 leicht sieht, auch A_0 direct unverändert bleiben. Nun entspringt weiter das Verhalten von A_1, A_2, A_4 aus (5) p. 721 unter Benutzung des entsprechenden Verhaltens der z_α; wir finden zusammenfassend:

$$(4) \qquad S\colon \; A_0' = A_0, \quad A_1' = \varepsilon^{-1} A_1, \quad A_2' = \varepsilon^{-2} A_2, \quad A_4' = \varepsilon^{-4} A_4.$$

Umgekehrt folgt hieraus unter Gebrauch von (1) für die $\sqrt{\delta}$:

$$(5) \qquad S\colon \; \sqrt{\delta_\infty'} = \sqrt{\delta_\infty}, \quad \sqrt{\delta_\nu'} = \sqrt{\delta_{\nu+1}}.$$

Etwas umständlicher ist die Bestimmung der quaternären Substitution T. Wir schreiben uns zuvörderst für die Wirkung von T auf $\sqrt{\delta}$ aus (4) p. 718 die nachfolgenden Ansätze ab:

$$\sqrt{\delta_\infty'} = e\sqrt{\delta_0},$$
$$\sqrt{\delta_1'} = e_1\sqrt{\delta_6}, \quad \sqrt{\delta_2'} = e_2\sqrt{\delta_3}, \quad \sqrt{\delta_4'} = e_4\sqrt{\delta_5},$$

wobei die e_α die Bedeutung von $+1$ oder -1 haben. Hier ist, wie wir zunächst behaupten, $e_1 = e_2 = e_4 = e$. Zum Beweise entnehmen wir aus (1) p. 723 und (5) p. 721:

$$(6) \qquad \frac{\sqrt{\delta_1'}}{\sqrt{\delta_\infty'}} = \frac{-1}{i\sqrt{7}}\left(1 + \varepsilon^{-1}\frac{z_2'}{z_4'} + \varepsilon^{-2}\frac{z_4'}{z_1'} + \varepsilon^{-4}\frac{z_1'}{z_2'}\right),$$

---

*) Die lineare Reproduction der A_γ lässt sich auch aus unseren bezüglichen allgemeinen Erörterungen p. 564 u. f. folgern. Man bemerke, dass die ∞^3-fache Schaar der Nullpunktsysteme von (6) p. 722, als ausgezeichnet, bei den 168 Collineationen der C_4 in sich übergeht.

**) Man beachte hier allenthalben die Analogie der gegenwärtigen Entwicklungen zu denen über die fünfte Stufe (p. 643 u. f.). Wir werden auf diese Gesichtspunkte am Schlusse des folgenden Kapitels im Zusammenhang eingehen.

$$(7)\qquad \frac{\sqrt{\delta_6}}{\sqrt{\delta_0}} = \frac{1+\varepsilon\frac{z_2}{z_4}+\varepsilon^2\frac{z_4}{z_1}+\varepsilon^4\frac{z_1}{z_2}}{1+\frac{z_2}{z_4}+\frac{z_4}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}},$$

während wir auf der anderen Seite identisch

$$(8)\qquad \frac{\sqrt{\delta_1'}}{\sqrt{\delta_\infty'}} = \frac{e_1}{e}\frac{\sqrt{\delta_6}}{\sqrt{\delta_0}}$$

haben. Jetzt setze man in der letzten Gleichung $\omega = i\infty$, wobei von den drei in (7) enthaltenen z_α-Quotienten der zweite, $\frac{z_4}{z_1}$, in der höchsten Ordnung ∞ wird, so dass der Wert des Ausdrucks (7) einfach ε^2 wird. Andrerseits gewinnt man aus (5) p. 705 für die in (6) enthaltenen z_α' die Proportion:

$$z_1' : z_2' : z_4' = (\varepsilon^4-\varepsilon^3):(\varepsilon^2-\varepsilon^5):(\varepsilon-\varepsilon^6),$$

woraus sich sofort berechnet:

$$\frac{z_1'}{z_2'} = \varepsilon^2+\varepsilon^5, \quad \frac{z_2'}{z_4'} = \varepsilon+\varepsilon^6, \quad \frac{z_4'}{z_1'} = \varepsilon^4+\varepsilon^3.$$

Also lautet (8) für $\omega = i\infty$ explicite

$$1+\varepsilon^{-1}(\varepsilon+\varepsilon^6)+\varepsilon^{-2}(\varepsilon^4+\varepsilon^3)+\varepsilon^{-4}(\varepsilon^2+\varepsilon^5) = -\frac{e_1}{e}\cdot\varepsilon^2\cdot i\sqrt{7},$$

wo nun weiter durch Ausrechnung der linken Seite $e_1 = e$ entspringt. In genau analoger Weise findet man $e_2 = e$ und $e_4 = e$. Den Wert von e aber bestimmt man auf Grund einer schon öfter durchgeführten Überlegung durch die Forderung, dass ST erst sechsmal wiederholt die Identität giebt. Es findet sich so $e = +1$ und damit als Permutation T der $\sqrt{\delta}$ in fertiger Form:

$$(9)\qquad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty'} = \sqrt{\delta_0}, & \sqrt{\delta_0'} = -\sqrt{\delta_\infty}, \\ \sqrt{\delta_1'} = \sqrt{\delta_6}, & \sqrt{\delta_2'} = \sqrt{\delta_3}, \quad \sqrt{\delta_4'} = \sqrt{\delta_5}. \end{cases}$$

Nun verfahren wir nach der oben angegebenen Vorschrift. Wir drücken A_γ' vermöge (2) und (9) in den ursprünglichen $\sqrt{\delta}$ aus und sodann diese in den A_γ. Nach kurzer Rechnung finden wir für T:

$$(10)\quad T: \begin{cases} -i\sqrt{7}A_0' = A_0+A_1+A_2+A_4, \\ -i\sqrt{7}A_1' = 2A_0+(\varepsilon^2+\varepsilon^5)A_1+(\varepsilon+\varepsilon^6)A_2+(\varepsilon^4+\varepsilon^3)A_4, \\ -i\sqrt{7}A_2' = 2A_0+(\varepsilon+\varepsilon^6)A_1+(\varepsilon^4+\varepsilon^3)A_2+(\varepsilon^2+\varepsilon^5)A_4, \\ -i\sqrt{7}A_4' = 2A_0+(\varepsilon^4+\varepsilon^3)A_1+(\varepsilon^2+\varepsilon^5)A_2+(\varepsilon+\varepsilon^6)A_4. \end{cases}$$

In (4) und (10) zusammen haben wir jetzt *die Erzeugenden der quaternären Substitutionsgruppe* $G_{2.168}$ *der Modulformen* A_γ. Es würde

keinerlei Schwierigkeit haben, von hieraus die gesamte quaternäre Gruppe in übersichtlicher Form herzustellen.

Hier besitzen wir nun alle Mittel, um in den A_γ thatsächlich Moduln der *siebenten* Stufe zu erkennen. Wir werden die Erzeugenden der homogenen Hauptcongruenzgruppe siebenter Stufe aus S und T aufbauen und vermöge (4) und (10) die Wirkung derselben auf die A_γ berechnen. Die A_γ erweisen sich direct als unverändert, wie man bei zweckmässigen Verfahren ohne viel Rechnung sieht. Immerhin wollen wir doch bemerken, dass uns späterhin andere Mittel zur Verfügung stehen, in den A_γ auf ganz directem Wege Modulformen der siebenten Stufe zu erkennen.

§ 12. Die Raumcurve sechster Ordnung der A_γ.

Unsere Untersuchungen über das Modulsystem der A_γ erscheinen in einer besonders übersichtlichen Gestalt, wenn wir auf die Schlusssätze des vorletzten Paragraphen die allgemeinen Erörterungen über Normalcurven p. 565 u. f. in Anwendung bringen. Im Sinne dieser Erörterungen bilden die Systeme der Nullpunkte der Moduln (6) p. 722, wie wir schon betonten, eine ∞^3-fache Vollschaar von Punktsextupeln, und zwar sind die sechs Punkte dieser Systeme ohne Ausnahme beweglich. Setzen wir also die A_γ als homogene Coordinaten des Raumes R_3, *so erscheint die Riemann'sche Fläche F_{168} auf eine eigentlich in diesem Raume gelegene Curve sechster Ordnung eindeutig bezogen, die wir hinfort als die C_6 der A_γ bezeichnen.*

Über diese Curve ziehen wir aus den voraufgehenden Entwicklungen ohne weiteres die nachfolgenden Sätze: Die C_6 der A_γ ist durch Vermittlung der Riemann'schen Fläche F_{168} eindeutig auf die C_4 der z_α bezogen; ihre rationale Darstellung erfährt diese Beziehung durch die schon unter (5) p. 721 aufgestellten Formeln:

$$(1) \qquad \frac{A_1}{A_0} = \frac{z_2}{z_4}, \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{z_4}{z_1}, \quad \frac{A_4}{A_0} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Eine directe Darstellung der C_6 zu liefern behalten wir uns für den nächsten Paragraphen vor. Die C_6 der A_γ geht durch 168 verschiedene Collineationen des Raumes R_3 in sich über. Die Erzeugenden dieser Collineationsgruppe sind in den Formeln (4) und (10) des vorigen Paragraphen gegeben. Auf die Zahl von 168 Collineationen kommen wir hier übrigens deshalb zurück, weil geometrische Bedeutung bei unserem Ansatze ja nur den Quotienten der A_γ zukommt, und also ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der A_γ jeden Punkt des R_3 an seiner Stelle lässt. Dass endlich die Punktsextupel, in welchen die C_4 der z_α von

den Berührungs-C_8 des ausgezeichneten Systems berührt wird, auf der C_6 diejenigen Punktsysteme werden, welche durch die Ebenen des R_3 der A_γ ausgeschnitten werden, ist bei der Art, wie wir die C_6 eingeführt haben, von vornherein selbstverständlich.

Vor allen Dingen aber gestatten jetzt unsere Sätze über das Verschwinden der Formen A_γ eine elegante Deutung. Die durch $A_0 = 0$ dargestellte Ebene wollen wir eine *Hauptebene* im Raume R_3 der A_γ nennen. Gegenüber den 168 Collineationen giebt es dann insgesamt *acht* gleichberechtigte Hauptebenen, als deren Gleichungen wir aus den Formeln (10) und (4) des vorigen Paragraphen

$$(2) \qquad A_0 = 0, \quad A_0 + \varepsilon^{-\nu} A_1 + \varepsilon^{-2\nu} A_2 + \varepsilon^{-4\nu} A_4 = 0$$

entnehmen. Die sechs Nullpunkte von A_0 lagen zu Paaren vereint an den drei Stellen c_1, c_2, c_4; also der Satz: *Jede der Hauptebenen berührt die C_6 in drei getrennt liegenden Punkten, und die Gesamtheit der so entspringenden* $3 \cdot 8$ *Berührungspunkte liefert uns direct das System der* 24 *Punkte c auf der C_6.*

Die durch $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_4 = 0$ dargestellten Ebenen des R_3 sollen *Nebenebenen* genannt werden. Bei den 168 Collineationen gewinnen wir dann insgesamt 24 Nebenebenen, die mit einander gleichberechtigt sind, und deren Gleichungen wir mühelos aus (10) p. 725 abschreiben könnten. Bei der Lage der Nullpunkte der einzelnen Form A_γ entspringt das Resultat: *Die einzelne Nebenebene hat an einer bestimmten Stelle c fünf consecutive Schnittpunkte mit der C_6 gemein, berührt letztere daselbst also vierfach, und schneidet alsdann noch einen weiteren Punkt c auf der C_6 aus.*

Im Verfolg dieses Satzes kommen wir für die 24 Nebenebenen zu einer ganz analogen Anordnung, wie wir sie für die 24 Wendetangenten der C_4 der s_α kennen lernten. Es zeigt sich, dass dem einzelnen von einer Hauptebene ausgeschnittenen Tripel von Punkten c der C_6 je ein Tripel von Nebenebenen zugeordnet ist. Selbiges bildet mit der bezüglichen Hauptebene ein *Tetraeder, und derartiger Tetraeder haben wir offenbar acht gleichberechtigte, die den acht halbmetacyclischen G_{21} in wohlbekannter Weise zugeordnet sind.* Eines unter diesen Tetraedern ist unser Coordinatentetraeder der A_γ, und letzteres wird in sich übergeführt durch die G_{21} der Operationen

$$(3) \qquad \omega' \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\delta}, \ (\text{mod. } 7).$$

Einer im folgenden Paragraphen durchzuführenden Anwendung wegen benennen wir diejenigen Eckpunkte der in Rede stehenden Tetraeder, die den Hauptebenen gegenüber liegen, als die *acht Hauptpunkte*, während demgegenüber die 24 anderen Eckpunkte als die

24 *Nebenpunkte* zu bezeichnen sein würden. Die Coordinaten des dem Tetraeder der A_γ angehörenden Hauptpunktes sind

$$A_0 : A_1 : A_2 : A_4 = 1 : 0 : 0 : 0, \tag{4}$$

die Coordinaten der sieben übrigen Hauptpunkte berechnen sich von hier aus durch zweckmässigen Gebrauch von (4) und (10) § 11 zu:

$$A_0 : A_1 : A_2 : A_4 = 1 : 2\varepsilon^{-\nu} : 2\varepsilon^{-2\nu} : 2\varepsilon^{-4\nu}. \tag{5}$$

Man bemerkt schliesslich ohne weiteres, dass die 24 Nebenpunkte die Punkte c der Curve sechster Ordnung sind, während die acht Hauptpunkte überhaupt nicht auf der C_6 gelegen sind.

§ 13. Directe Darstellung der C_6 der A_γ. Die C_6 als Kegelspitzencurve eines Bündels von Flächen zweiter Ordnung.

Wir haben bislang die C_6 der A_γ noch nicht direct algebraisch dargestellt und wollen jetzt zum Schluss die Ableistung dieser Aufgabe im Zusammenhang mit einer sehr interessanten geometrischen Entwicklung bringen, welch' letztere uns die eindeutige Beziehung der C_6 der A_γ auf die C_4 der s_α in ganz neuem Lichte erscheinen lässt.

Vorab entwickeln wir uns aus (1) p. 726 im Verein mit $f(s_\alpha) = 0$ die folgenden vier zwischen den Modulformen A_γ identisch bestehenden Relationen:

$$\begin{cases} A_0^3 = A_1 A_2 A_4, \\ A_0 A_1^2 + A_1 A_4^2 + A_2 A_0^2 = 0, \\ A_0 A_2^2 + A_2 A_1^2 + A_4 A_0^2 = 0, \\ A_0 A_4^2 + A_4 A_2^2 + A_1 A_0^2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Die erste unter ihnen entspringt aus (1) p. 726 direct; zur Ableitung der andern drei Relationen dividiere man $f(s_\alpha) = 0$ der Reihe nach durch die drei Glieder von f und ersetze die s_α-Quotienten auf Grund von (1) p. 726 durch die A_γ. Die Gleichungen (1) werden wir als *Flächen dritter Ordnung* im Raume der A_γ interpretieren und bemerken, *dass die C_6 der A_γ auf jeder einzelnen unter diesen Flächen vollständig gelegen ist.* Aber es entspringt hier die Frage, ob die C_6 durch diese vier Flächen *rein* ausgeschnitten wird oder nicht. Ohne hierüber auf directem Wege zu entscheiden, bringen wir hier vielmehr die in Aussicht genommene geometrische Entwicklung, welche uns alsdann die Entscheidung über die aufgeworfene Frage an die Hand giebt*).

*) Die allgemeine Theorie, auf welche wir hier Bezug nehmen, rührt von Hesse her, der sie in den beiden Abhandlungen: *Über Determinanten und ihre*

Wir haben am Schlusse des vorigen Paragraphen die Coordinaten der acht Hauptpunkte im Raume der A_γ angegeben (Formel (4) und (5) § 12) und stellen jetzt die Behauptung auf, *dass diese acht Punkte die Grundpunkte eines Bündels von Flächen zweiter Ordnung sind.* Ohne in diesem Betracht allgemeine Sätze als bekannt vorauszusetzen, geben wir vielmehr direct in:

$$(2) \quad 2A_0A_4 - A_2^2 = 0, \quad 2A_0A_1 - A_4^2 = 0, \quad 2A_0A_2 - A_1^2 = 0$$

drei offenbar nicht demselben Büschel angehörende Flächen zweiter Ordnung, deren jede zufolge leichter Rechnung durch die sämtlichen acht Hauptpunkte hindurchgeht. Indem wir also in den $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_4$ zunächst nichts weiter als beliebig variabele Parameter sehen, haben wir in

$$(3) \quad \varepsilon_1(2A_0A_4 - A_2^2) + \varepsilon_2(2A_0A_1 - A_4^2) + \varepsilon_4(2A_0A_2 - A_1^2) = 0$$

direct das Flächenbündel hingeschrieben, dessen Existenz wir behaupteten.

Was die Gestalt der drei Flächen (2) anlangt, so erkennt man in ihnen leicht Kegel 2ten Grades, welche bez. die drei unter den Ecken des Coordinatentetraeders befindlichen Nebenpunkte zu Spitzen haben, während sie im übrigen jeweils die Hauptebene $A_0 = 0$ und eine der Nebenebenen $A_\gamma = 0$ in charakteristischer Weise berühren. Im Anschluss hieran wollen wir jetzt ganz allgemein die unter den Flächen des Bündels (3) befindlichen Kegel verfolgen. Damit werden wir, wie man gleich sehen wird, für $\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_4$ *eine* Bedingung erhalten, so dass es im Bündel (3) im ganzen ∞^1 Kegel giebt. Was aber das Wichtigste ist, die Spitzen dieser Kegel werden im Raume der A_γ eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit d. i. eine *Curve* bilden. Wir bezeichnen dieselbe als *die zum Bündel* (3) *gehörende Kegelspitzencurve.*

Um die Gleichungen der so gemeinten Curve C zu gewinnen, erinnern wir daran, dass, falls $F(A_\gamma) = 0$ einen Kegel darstellt, für dessen Spitze die vier Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial A_\gamma} = 0$ zu gleicher Zeit verschwinden. Indem wir diese vier Ableitungen für (3) bilden und mit Null identisch setzen, entspringt das System der vier Gleichungen:

Anwendung in der Geometrie, Über Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung, Cr. Journal Bd. 49, 1855 entwickelt hat. Wir kleiden übrigens die Hesse'sche Theorie sogleich in die Bezeichnungsweisen und Voraussetzungen ein, wie sie im Texte vorliegen.

$$(4)\qquad \begin{aligned} z_1A_4 + z_2A_1 + z_4A_2 &= 0,\\ z_2A_0 - z_4A_1 &= 0,\\ -z_1A_2 + z_4A_0 &= 0,\\ z_1A_0 - z_2A_4 &= 0. \end{aligned}$$

Hier erhalten wir nun durch Elimination der A die Discriminante von (3) in der Gestalt:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 0, & z_1, & z_2, & z_4\\ z_1, & -z_2, & 0, & 0\\ z_2, & 0, & -z_4, & 0\\ z_4, & 0, & 0, & -z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir aber jetzt die z_α als homogene Coordinaten einer Ebene deuten, so stellt (5) *eine Curve vierter Ordnung* C_4 in dieser Ebene dar, und wir haben ohne weiteres den Satz: *Jedem Punkte dieser* C_4 *entspricht eindeutig ein Kegel* (3) *und damit ein Punkt der Kegelspitzencurve* C *und umgekehrt.* Die Gleichungen dieser letzteren Curve C aber entspringen einfach durch Elimination der z_α aus (4) in Gestalt der mit Null identisch gesetzten Matrix:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} A_4, & A_1, & A_2\\ 0, & A_0, & -A_1\\ -A_2, & 0, & A_0\\ A_0, & -A_4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die wir also, ausführlich geschrieben, in die vier Gleichungen zu spalten haben:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 0, & A_0, & -A_1\\ -A_2, & 0, & A_0\\ A_0, & -A_4, & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_4, & A_1, & A_2\\ 0, & A_0, & -A_1\\ A_0, & -A_4, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} A_4, & A_1, & A_2\\ 0, & A_0, & -A_1\\ -A_2, & 0, & A_0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_4, & A_1, & A_2\\ -A_2, & 0, & A_0\\ A_0, & -A_4, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Um jetzt zum Schluss zu kommen, rechnen wir uns die Determinanten (5) bez. (7) explicite aus. An Stelle von (5) erhalten wir:

$$(8)\qquad z_1^3z_4 + z_4^3z_2 + z_2^3z_1 = 0.$$

Also das Resultat: *Die auf die Kegelspitzencurve wechselweise eindeutig bezogene ebene* C_4 *ist unsere wohlbekannte* C_4 *der* z_α. Berechnen wir andrerseits die vier Gleichungen (7), welche die Kegelspitzencurve rein darstellen, ausführlich, so kommen wir gerade auf die vier Relationen (1)

zurück. Also das fernere Resultat: *Die C_6 der A_γ ist entweder ein Bestandteil der Kegelspitzencurve oder mit der letzteren geradezu identisch, je nachdem die vier Gleichungen* (1) *zur Darstellung der C_6 noch nicht hinreichend sind oder diese Curve rein darstellen.* Von diesen beiden Fällen ist jedoch nur der letztere möglich, denn die Kegelspitzencurve ist ja durch Vermittlung der C_4 der s_α auf die C_6 der A_γ *wechselweise* eindeutig bezogen*). *Somit ist unsere Curve sechster Ordnung der A_γ die Kegelspitzencurve des Bündels* (3) *von Flächen zweiter Ordnung, und als solche wird sie durch die Relationen* (1) *rein dargestellt.*

Die gegenseitige Beziehung der beiderlei Curven auf einander kann man jetzt leicht durch Auflösung der Gleichungen (4) darstellen. Wir können offenbar die A_γ auf vier verschiedene Arten mit ganzen rationalen Functionen dritten Grades der s_α proportional setzen, wie wir umgekehrt die s_α auf sechsfache Weise mit ganzen rationalen Functionen zweiten Grades der A_γ proportional finden. Aber alle diese Proportionen lassen sich vermöge (1) und (7) aus (1) p. 726 herleiten, bringen uns also nichts Neues.

Die Theorie der Modulsysteme s_α und A_γ der siebenten Stufe schliessen wir hiermit ab; sie wird sich in der vorgelegten Form als völlig ausreichend für die Behandlung des bezüglichen Galois'schen Problems erweisen.

*) Man kann übrigens den nämlichen Schluss auch dadurch ziehen, dass man durch zweckmässige Untersuchung der Gleichungen (6) in der Kegelspitzencurve eine Raumcurve sechster Ordnung erkennt.

Siebentes Kapitel.

Das Galois'sche Problem 168ten Grades und seine Resolventen 8ten und 7ten Grades. — Schlussbemerkungen.

Die ausführliche Begründung der zur Stufe $q = 7$ gehörenden Modulsysteme z_α und A_γ, die wir im vorigen Kapitel gaben, gestattet uns jetzt, verhältnismässig mühelos das Galois'sche Problem 168ten Grades anzusetzen, welches zur Hauptcongruenzgruppe Γ_{168} gehört. Sofern wir nur auf die Primzahlstufen sehen, ist dieses Problem das nächste in der Reihe der Probleme, die sich an das Ikosaederproblem ($q = 5$) anreihen. Wie übrigens dort zur expliciten Kenntnisnahme der Ikosaedergleichung eine Reihe *invariantentheoretischer* Schlüsse diente („Ikos." p. 56), so werden wir auf ganz analogem Wege auch hier bei der Gleichung 168ten Grades verfahren. Die Zerlegung der endlichen G_{168}, wie wir sie früher kennen lernten, giebt uns alsdann weiter den Überblick über die *Resolventen* des in Rede stehenden Galois'schen Problems. Von diesen Resolventen werden wir zur expliciten Untersuchung natürlich nur die niedersten heranziehen. Es ist das erstens eine solche vom Grade acht, diejenige nämlich, welche den acht gleichberechtigten halbmetacyclischen G_{21} entspricht. Sodann haben wir den zwei Systemen von je sieben gleichberechtigten G_{24} entsprechend zwei Resolventen siebenten Grades, und die Existenz dieser Resolventen giebt dem Galois'schen Satze (p. 490) zufolge der Stufe $q = 7$ das besondere Interesse, welches dieselbe vor der allgemeinen Primzahlstufe $q > 11$ voraushat.

§ 1. Die drei Covarianten der ternären biquadratischen Form $f(z_\alpha)$.

Unsere biquadratische ternäre Form

$$f(z_\alpha) = z_1^3 z_4 + z_4^3 z_2 + z_2^3 z_1 \tag{1}$$

geht, wie wir oben (p. 702) fanden, bei Ausübung der 168 ternären z_α-Substitutionen (7) p. 705, welche die Determinante Eins hatten, unverändert in sich selbst über; dabei denken wir fortan, wie gleich betont sein mag, die drei z_α als unabhängig veränderliche Grössen und werden dieselben erst wieder in § 2, indem wir $f = 0$ setzen, mit

unseren Moduln der 7ten Stufe identificieren. Nach den Elementen der Invariantentheorie wird notwendig jede mit $f(z_\alpha)$ covariante Form gleichfalls bei den 168 Substitutionen der z_α unverändert erhalten bleiben. Indem wir also die bezüglichen Hülfsmittel der Invariantentheorie zur Verwendung bringen, werden wir von $f(z_\alpha)$ aus neue Formen kennen lernen, welche die in Rede stehende Eigenschaft mit $f(z_\alpha)$ teilen.

Eine Covariante von $f(z_\alpha)$ ist aber erstlich die *Hesse'sche Determinante* der Form f, für welche wir die Bezeichnung einführen wollen:

$$(2) \qquad 54\,\mathsf{X}(z_1, z_2, z_4) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_4^2} \end{vmatrix}.$$

Der Factor 54 ist linker Hand aufgenommen, damit $\mathsf{X}(z_\alpha)$ in ausgerechneter Form möglichst einfach ausfällt. Man findet nämlich nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(3) \qquad \mathsf{X}(z_1, z_2, z_4) = 5 z_1^2 z_2^2 z_4^2 - z_1 z_4^5 - z_4 z_2^5 - z_2 z_1^5.$$

Um sogleich von der geometrischen Bedeutung der durch $\mathsf{X}(z_\alpha) = 0$ dargestellten C_6 zu handeln, insoweit wir dieselbe nötig haben, so wolle man zunächst durch eine leichte Rechnung zeigen, dass diese C_6 jedenfalls die C_4 der z_α nicht als einen Bestandteil enthält. Demgemäss wird die C_6 auf der C_4 ein System von 24 Punkten ausschneiden, und dieses Punktsystem muss ersichtlich durch alle 168 Collineationen in sich übergeführt werden. Es giebt aber auf unserer C_4 nach der p. 696 durchgeführten Überlegung nur ein einziges derartiges Punktsystem, nämlich das der Punkte c. Also haben wir den Satz: *Die durch Nullsetzen der Form* (3) *gegebene ebene Curve sechster Ordnung schneidet auf der C_4 der z_α die 24 Punkte c aus* (was übrigens auf einen wohlbekannten Satz aus der analytischen Geometrie zurückkommt).

Des ferneren bilden wir uns etwa die Covariante:

$$(4) \qquad 9\,\Phi(z_1, z_2, z_4) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4}, & \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial z_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4}, & \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial z_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_4 \partial z_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_4 \partial z_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial z_4^2}, & \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial z_4} \\ \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial z_1}, & \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial z_2}, & \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial z_4}, & 0 \end{vmatrix},$$

deren ausgerechnete Gestalt*) die nachfolgende ist:

*) Die ausgerechnete Form der Covariante Φ, sowie des sogleich anzugeben-

$$\Phi(z_1,z_2,z_4)=z_1^{14}+z_2^{14}+z_4^{14}-34z_1z_2z_4(z_1^{10}z_4+\cdots)-250z_1z_2z_4(z_1^{8}z_2^{3}+\cdots)$$
$$+375z_1^{2}z_2^{2}z_4^{2}(z_1^{6}z_4^{2}+\cdots)+18(z_1^{7}z_2^{7}+\cdots)+126z_1^{3}z_2^{3}z_4^{3}(z_1^{3}z_2^{2}+\cdots). \tag{5}$$

Hier sieht man wieder direct, dass Φ jedenfalls nicht die Form $f(z_\alpha)$ als Factor enthält, und dass demgemäss die durch $\Phi = 0$ dargestellte Curve vierzehnter Ordnung die C_4 der z_α nicht als Bestandteil enthält. Die C_{14} wird also die C_4 in einem gegenüber der G_{168} invarianten System von 56 Punkten schneiden, und dass dieses nur aus den Punkten b der C_4 bestehen kann, ist von p. 696 her bekannt. Also der Satz: *Die durch $\Phi = 0$ dargestellte C_{14} schneidet auf der C_4 die 56 Punkte b, d. i. die Berührungspunkte der 28 Doppeltangenten aus.*

Um in ähnlicher Weise endlich auch noch die 84 sextactischen Punkte der C_4 zu erledigen, werden wir nach einer Covariante 21sten Grades in den z_α suchen. In der That findet sich eine solche in der Functionaldeterminante von f, X, Φ:

$$14\Psi(z_1,z_2,z_4)=\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1}, & \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}, & \frac{\partial X}{\partial z_1} \\ \frac{\partial f}{\partial z_2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}, & \frac{\partial X}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f}{\partial z_4}, & \frac{\partial \Phi}{\partial z_4}, & \frac{\partial X}{\partial z_4} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

welche in ausgerechneter Form so lautet:

$$\begin{aligned}\Psi(z_1,z_2,z_4)=&z_1^{21}+z_2^{21}+z_4^{21}-7z_1z_2z_4(z_1^{17}z_4+\cdots)+217z_1z_2z_4(z_1^{15}z_2^{3}+\cdots)\\ &-308z_1^{2}z_2^{2}z_4^{2}(z_1^{13}z_4^{2}+\cdots)-57(z_1^{14}z_4^{7}+\cdots)-289(z_1^{14}z_2^{7}+\cdots)\\ &+4018z_1^{3}z_2^{3}z_4^{3}(z_1^{10}z_2^{2}+\cdots)+637z_1^{3}z_2^{3}z_4^{3}(z_1^{9}z_4^{3}+\cdots)\\ &+1638z_1z_2z_4(z_1^{10}z_4^{8}+\cdots)-6279z_1^{2}z_2^{2}z_4^{2}(z_1^{9}z_2^{6}+\cdots)\\ &+7007z_1^{5}z_2^{5}z_4^{5}(z_1^{5}z_2+\cdots)-10010z_1^{4}z_2^{4}z_4^{4}(z_1^{5}z_4^{4}+\cdots)\\ &+3432z_1^{7}z_2^{7}z_4^{7}.\end{aligned} \tag{7}$$

Da auch Ψ offenbar nicht den Factor $f(z_\alpha)$ enthält, so schliessen wir in üblicher Weise: *Die durch $\Psi = 0$ dargestellte ebene C_{21}* (die übrigens nichts anderes als das Aggregat der 21 Perspectivitätsaxen darstellt) *schneidet auf der C_4 der z_α die 84 sextactischen Punkte a aus**).

---

den Ψ ist von Hrn. Gordan veröffentlicht worden; man sehe dessen Arbeit: *Über die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f(z_\alpha)$*, Math. Ann. Bd. 17 p. 372 (1880). In den Formeln (5) u. s. w. des Textes bringen wir übrigens eine schon von p. 711 gewohnte Abkürzung in Anwendung.

*) Es verdient bemerkt zu werden, dass f, Φ, Ψ, X das zur Form f gehörende „volle Formensystem" bilden, sofern wir uns nur auf Punktcoordinaten z_α beschränken; vergl. überall die grundlegende Arbeit von Klein (Math. Ann. Bd. 14, hier speciell p. 448). Führt man auch Liniencoordinaten u_α ein, so wächst der Kreis der Formen nicht unbeträchtlich, cf. Gordan: *Über das volle Formensystem*

§ 2. Die Φ, Ψ, X als Modulformen erster Stufe. Formulierung des Galois'schen Problems 168sten Grades.

Nunmehr legen wir den z_α wieder ihre Bedeutung als Modulformen der siebenten Stufe bei. Alsdann wird $f(z_\alpha)$ mit Null identisch sein, *während* $X(z_\alpha)$, $\Phi(z_\alpha)$, $\Psi(z_\alpha)$ *Modulformen der Dimensionen* (-12), (-28) *und* (-42) *werden, die gegenüber allen homogenen Modulsubstitutionen unverändert bleiben und demgemäss der ersten Stufe angehören.* Es gelingt nun sofort, über das Verschwinden und Unendlichwerden dieser Moduln erster Stufe auf Grund der bezüglichen Sätze über die z_α eine Reihe von Angaben zu machen. Wir gelangen so insbesondere zur Kenntnis der Beziehungen, durch welche die Φ, Ψ, X an die Modulformen g_2, g_3, Δ gekettet sind.

Um mit X zu beginnen, so haben wir da erstlich diejenigen Nullpunkte namhaft zu machen, welche wir in den Schnittpunkten der Curve $X = 0$ mit der C_4 der z_α vor Augen haben. Es sind das 24 einfache Nullpunkte von X, die sich auf die 24 Punkte c der Fläche F_{168} verteilen. Darüber hinaus aber müssen wir beachten, dass die z_α übereinstimmend in den Punkten c der F_{168} je einfach Null sind (cf. p. 694), und dass X in den z homogen in 6ter Dimension ist. Wir bemerken, dass hiernach in jedem Punkte c für X noch je sechs einfache Nullpunkte hinzukommen, und finden so den Satz: Die Modulform erster Stufe X wird im einzelnen Punkte c des Polygons F_{168} je siebenfach zu Null und ist sonst allenthalben endlich und von Null verschieden. Auf dem Polygon erster Stufe d. i. im Ausgangsdreieck betrachtet wird also X in der Ecke $\omega = i\infty$ einfach Null und ist sonst endlich und von Null verschieden. Genau dasselbe haben wir seiner Zeit von Δ kennen gelernt (p. 128 u. f.) und finden jetzt (da beide Grössen von der gleichen Dimension in den ω_1, ω_2 sind) in $X : \Delta$ eine Modul*function* erster Stufe, die im Ausgangsdreieck allenthalben endlich und von Null verschieden ist. Nach bekannten Sätzen ist eine derartige Function mit einer Constanten c_1 identisch, womit wir den Ansatz gewonnen haben: $X = c_1\Delta$.

Eine völlig analoge Überlegung erweist sich auf Φ und Ψ an-

---

der ternären biquadratischen Form $f(z_\alpha)$, Math. Ann. Bd. 17 p. 217 (1880). Als ein wichtiges Resultat letzterer Abhandlung erwähnen wir noch, dass es Hrn. Gordan gelungen ist, den besonderen Charakter der biquadratischen Form $f(z_\alpha)$ vor der allgemeinen biquadratischen ternären Form auf rein invariantentheoretischem Wege zu fixieren. Ist $\varphi = 2(ffu)^4$, $i = \frac{4}{3} f_\varphi^4$, so ist $f_\varphi^2 - \frac{i}{8} u_x^8 \equiv 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung (cf. Math. Ann. Bd. 17, p. 227).

wendbar. Indem wir dieselbe nicht noch besonders durchführen, schreiben wir sogleich zusammenfassend den Ansatz auf:

$$(1) \qquad X = c_1\Delta, \quad \Phi = c_2 g_2 \Delta^2, \quad \Psi = c_3 g_3 \Delta^3.$$

Um hier die Factoren c zu bestimmen, berechnen wir zuvörderst die Annäherungen der letzten Formeln bei $\omega = i\infty$, indem wir uns zu dem Ende für die ε_α von (2) p. 702 die Näherungswerte

$$(2) \qquad \varepsilon_2 = \varkappa \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{7}}, \quad \varepsilon_4 = \varkappa^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{2}{7}}, \quad \varepsilon_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{4}{7}}$$

heranholen. Unter dieser Voraussetzung bestimmt man leicht aus den Formeln des vorigen Paragraphen einige Anfangsglieder der Reihenentwicklungen für Φ, Ψ, X:

$$(3) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{28} \Phi = \varkappa^{14} r^2 + 234 \varkappa^{\frac{35}{3}} r^3 + \cdots \\ \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{42} \Psi = \varkappa^{21} r^3 - 513 \varkappa^{\frac{56}{3}} r^4 + \cdots \\ \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} X = -\varkappa^{\frac{17}{3}} r + \cdots \end{cases}$$

Indem wir stets nur die ersten Glieder benutzen und übrigens für g_2, g_3, Δ die Formeln (3) p. 613 verwerten, erhält man sofort:

$$c_1 = -\varkappa^{\frac{17}{3}}, \quad c_2 = 12\varkappa^{14}, \quad c_3 = 216\varkappa^{21}.$$

Da ist nun noch $\varkappa$ selbst zu bestimmen, zu welchem Ende man die Relation $g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta$ mit Hülfe der soeben gewonnenen Werte von c_1, c_2, c_3 in

$$(4) \qquad \Psi^2 - \Phi^3 = 12^3 \varkappa^{\frac{7}{3}} X^7$$

umrechnen wolle. Als Näherungswert der linken Seite findet sich vermöge (3) sogleich $-12^3 \varkappa^{\frac{119}{3}} r^7$, während die rechte Seite von (4) $-12^3 \varkappa^{\frac{126}{3}} r^7$ ergiebt. Man sieht, dass $\varkappa^{\frac{7}{3}} = 1$ sein muss, und folgert daraus $\varkappa = 1$, da man in der That aus Sätzen des vorigen Kapitels leicht entnimmt, dass die Factoren $\varkappa$, $\varkappa^{\frac{2}{3}}$ in (2) notwendig reell sind. *So haben wir an Stelle von* (2) *endgültig:*

$$(5) \qquad \varepsilon_1 = -\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{4}{7}}, \quad \varepsilon_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{7}}, \quad \varepsilon_4 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{2}{7}}$$

und gewinnen damit zugleich als Relationen zwischen Φ, Ψ, X *einerseits und* g_2, g_3, Δ *andrerseits:*

$$\Phi = 12 g_2 \Delta^2, \quad \Psi = 216 g_3 \Delta^3, \quad X = -\Delta, \tag{6}$$

während wir endlich als eine zwischen den Φ, Ψ *und* X *bestehende Relation aus* (4) *die nachfolgende entnehmen**):

$$\Phi^3 - \Psi^2 + 1728 X^7 = 0. \tag{7}$$

Im Anschluss an die Gleichungen (6) kann man jetzt *das Galoissche Problem* 168sten *Grades in formentheoretischer Gestalt* wie folgt definieren: *Es sind* g_2, g_3, Δ *ihrer Relation gemäss numerisch gegeben; man verlangt aus den Gleichungen* (6), *denen wir auch noch die Gleichung* $f(z_\alpha) = 0$ *hinzuzufügen haben, die zugehörigen Lösungssysteme* z_1, z_2, z_4 *zu berechnen.* Wir können diese Aufgabe kurz als das *Formenproblem der* z_α bezeichnen. Um aber unser Problem in *functionentheoretischer* Gestalt auszusprechen, setzen wir etwa $z_1 = x$, $z_2 = y$, $z_4 = 1$, wobei die Formeln (6) und $f(z_\alpha) = 0$ die folgenden Gleichungen liefern:

$$J : J - 1 : 1 = \Phi^3(x, y, 1) : \Psi^2(x, y, 1) : -1728 X^7(x, y, 1), \tag{8}$$

$$x^3 + xy^3 + y = 0. \tag{9}$$

Unser *Gleichungsproblem* 168sten *Grades* ist nun, *bei gegebenem* J *aus diesen Gleichungen die zugehörigen Lösungssysteme* x, y *zu berechnen.*

Im Gegensatz zu den bei $n = 5$, 4 u. s. w. eintretenden Problemen gehört das Formenproblem der z_α keineswegs dem doppelten, sondern vielmehr demselben Grade an, wie das Gleichungsproblem (der übrigens leicht auch durch directe Betrachtung der soeben angegebenen Formeln zu 168 bestimmt wird). Es ist dieser Umstand natürlich in der *geraden* Dimension der Moduln z_α begründet, oder auch darin, dass die Zahl der homogenen Substitutionen der z_α ebenso gross ($= 168$) ist, wie die Zahl der nicht-homogenen.

§ 3. Das Problem der A_γ. Erwähnung der erweiterten Probleme.

Resultate, wie wir sie in den beiden voraufgehenden Paragraphen für die z_α gewonnen haben, lassen sich bis zu einem gewissen Grade auch beim Modulsystem der A_γ aufstellen. Es tritt da vorerst die Frage ein, ob sich ähnlich wie in der Ebene der z_α bei der C_4 vielleicht im

*) Dieser Formel entspricht eine Identität zwischen den drei Formen f, Φ, Ψ, X der unabhängigen Variabelen z_1, z_2, z_4, welche von Gordan im 17. Bande der Math. Ann. p. 371 explicite berechnet wurde und so lautet:

$$\Psi^2 = \Phi^3 + 1728 X^7 - 88 i f^2 X \Phi^2 + 16 \cdot 63 i f X^4 \Phi + 17 \cdot 64 i^2 f^4 X^3 \Phi - 256 i f^7 \Phi$$
$$- 128 \cdot 469 i^3 f^3 X^5 + 43 \cdot 512 i^3 f^6 X^3 - 2048 i^4 f^9 X;$$

hier ist i die p. 735 (Anm.) definierte Invariante.

Raume der A_γ Flächen angeben lassen, welche auf der C_6 der A_γ die besonderen Systeme der Punkte a, b, c *rein* ausschneiden. Da ist denn sogleich zu sehen: Für die 56 Punkte b ist dies sicher unmöglich, aus dem einfachen Grunde, weil 56 nicht durch 6 teilbar ist. Dagegen werden wir versuchen wollen, die 24 Punkte c durch eine Fläche *vierter* Ordnung $X'(A_\gamma) = 0$, sowie die 84 Punkte a durch eine Fläche *vierzehnter* Ordnung $\Psi'(A_\gamma) = 0$ rein auszuschneiden, und es wird uns das in der That ohne Mühe gelingen.

Wofern diese Flächen wirklich existieren sollten, knüpfen wir an ihre Gleichungen vorab die folgende Entwicklung. Indem wir den A_γ ihre Bedeutung als Moduln siebenter Stufe dritter Dimension wiedergeben, *erkennen wir* (gerade wie vorhin in $\Phi(\varepsilon_\alpha)$ etc.) *nun in* $X'(A_\gamma)$ *und* $\Psi'(A_\gamma)$ *Modulformen erster Stufe und* 12ter *bez.* 42ter *Dimension.* Dabei können wir wieder die Null- und Unstetigkeitspunkte dieser Moduln ohne weiteres angeben, wie wir etwa für $X'(A_\gamma)$ explicite durchführen. Zunächst haben wir von den Schnittpunkten der C_6 mit der Fläche $X' = 0$ her 24 einfache Nullpunkte, die sich auf die 24 Punkte c des Polygons verteilen. Überdies aber werden alle A_γ in den Punkten c jeweils doppelt unendlich (cf. p. 722); und wir ziehen daraus zusammenfassend die Folgerung, dass $X'(A_\gamma)$ in den Punkten c jeweils siebenfach unendlich wird, während diese Grösse sonst im F_{168} allenthalben endlich und nicht-verschwindend ist. Genau dasselbe gilt von Δ^{-1}, wenn wir diesen Modul auf der Fläche F_{168} betrachten. Da zudem $X' \cdot \Delta$ von nullter Dimension ist, so erkennt man in diesem Producte ohne weiteres eine Constante. Eine ähnliche Schlussfolgerung wird man leicht für Ψ' durchführen und gewinnt damit die Ansätze:

$$(1) \qquad X'(A_\gamma) = \frac{c_1}{\Delta}, \quad \Psi'(A_\gamma) = \frac{c_2 g_2}{\Delta^4}.$$

Die fraglichen Flächen vierter und vierzehnter Ordnung werden wir nun thatsächlich ohne Mühe durch Rückgang auf die Modulform A_0 gewinnen können. Wir besassen in $-7A_0^2$ eine unter *acht* gleichberechtigten Modulformen, die insgesamt gegeben waren durch:

$$(2) \quad -7A_0^2, \quad (A_0 + \varepsilon^{-\nu}A_1 + \varepsilon^{-2\nu}A_2 + \varepsilon^{-4\nu}A_4)^2, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots, 6.$$

Gegenüber den $2 \cdot 168$ quaternären A_γ-Substitutionen werden sich diese acht Grössen unter einander permutieren, und es muss demnach jede symmetrische Function der letzteren bei den fraglichen Substitutionen unverändert bleiben. Man bilde in diesem Sinne die beiden nachfolgenden symmetrischen Verbindungen von (2), die wir sogleich mit der oben bereits eingeführten Benennung X', Ψ' belegen:

$$(3)\quad \begin{cases} 28\,X'(A_\gamma) = 49\,A_0^4 + \sum_\nu' (A_0 + \varepsilon^{-\nu}A_1 + \varepsilon^{-2\nu}A_2 + \varepsilon^{-4\nu}A_4)^4, \text{ oder} \\ X'(A_\gamma) = 2A_0^4 + 6A_0A_1A_2A_4 + A_1^3A_4 + A_4^3A_2 + A_2^3A_1, \end{cases}$$

und andrerseits:

$$(4)\quad 7\Psi'(A_\gamma) = -7^7A_0^{14} + \sum_\nu' (A_0 + \varepsilon^{-\nu}A_1 + \varepsilon^{-2\nu}A_2 + \varepsilon^{-4\nu}A_4)^{14},$$

wobei wir die ausgerechnete Gestalt von Ψ' hier nicht angeben, da dieselbe etwas umfänglich ausfällt*). Diese aus den Modulformen siebenter Stufe zusammengesetzten Ausdrücke X' und Ψ' können nun jedenfalls nicht mit Null identisch sein. Indem wir nämlich für die A_γ bei $\omega = i\infty$ nachträglich die Näherungsformeln verificieren:

$$(5)\quad \begin{aligned} A_0 &= \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3, & A_1 &= \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3 r^{-\frac{1}{7}}, \\ A_2 &= -\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3 r^{-\frac{2}{7}}, & A_4 &= -\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3 r^{\frac{3}{7}}, \end{aligned}$$

finden wir nach leichter Zwischenrechnung als Anfangsglieder der bei $\omega = i\infty$ gültigen Reihenentwicklungen von X' und Ψ':

$$(6)\quad X' = -\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} r^{-1}, \quad \Psi' = \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{42} r^{-4}.$$

Auf Grund dieser Überlegung besitzen wir in X' und Ψ' in der That zwei nicht-verschwindende Modulformen der ersten Stufe.

Nun wolle man andrerseits wieder den Raum R_3 der A_γ heranziehen und in diesem die Gleichungen $X'(A_\gamma) = 0$, $\Psi'(A_\gamma) = 0$ als Fläche vierter bez. vierzehnter Ordnung deuten. Die C_6 der A_γ kann nicht vollständig auf diesen Flächen gelegen sein (weil sonst X', Ψ', als Modulformen gedeutet, identisch verschwinden müssten), vielmehr wird sie von ersterer Fläche in 24, von letzterer in 84 Punkten geschnitten, und dass diese Punktsysteme unsere wohlbekannten Punkte c und a sind, folgern wir durch eine oft vollzogene Schlussweise. Die am Anfang des Paragraphen gesuchten Flächen werden also thatsächlich durch Nullsetzen der Ausdrücke (3) und (4) geliefert.

Betrachten wir jetzt wieder ω_1, ω_2 als unabhängige Variabele, so benutze man zur expliciten Berechnung der Formeln (1) die Annäherungen (6) bei $\omega = i\infty$. *Unter Rücksicht auf* (3) *p.* 613 *findet sich als Darstellung von* Ψ *und* X *in* g_3 *und* Δ:

---

*) Man vergl. jedoch das Nähere über die ausführliche Gestalt von (4) in der hier in Betracht kommenden Abhandlung Brioschi's: *Über die Jacobi'sche Modulargleichung vom achten Grade,* Math. Ann. Bd. 15 (1879).

$$X'(A_\gamma) = -\frac{1}{\Delta}, \quad \Psi'(A_\gamma) = \frac{216 g_3}{\Delta^4}; \tag{7}$$

damit ist J als 168-wertige Function auf der C_6 dargestellt durch:

$$J - 1 = -\frac{\Psi'^3}{1728 X'^7} \tag{8}$$

und wird also durch ein Flächenbüschel 28ster *Ordnung rein zum Ausschnitt gebracht.*

Die Grössen A_γ auch ferner noch als Modulformen siebenter Stufe gedacht, knüpfen wir jetzt an (8) den Ausspruch des *Gleichungsproblems der* A_γ: *Es ist uns J seinem Zahlwerte nach gegeben, wir verlangen unter Berücksichtigung der Relationen* (1) *p.* 728 *aus* (8) *die Verhältnisse der* A_γ *zu bestimmen.* Dieses Problem 168ten Grades kommt geometrisch darauf hinaus, bei gegebenem J die zugehörigen Punkte auf der C_6 der A_γ zu bestimmen. Beim *Formenproblem der* A_γ haben wir an die Formeln (7) anzuknüpfen. Die rechten Seiten derselben sind uns beliebig numerisch gegeben: *wir verlangen aus diesen beiden Gleichungen im Verein mit den zwischen den* A_γ *bestehenden Identitäten diese Grössen selbst zu berechnen. Im Gegensatz zum Formenproblem der* z_α *ist dasjenige der* A_γ *vom Grade* $2 \cdot 168$.

Es ist hier endlich der Ort, einer naheliegenden Erweiterung unserer Probleme zu gedenken. Sobald es sich darum handelte, das einzelne unter diesen Problemen zu formulieren, haben wir bislang die Grössen z_α bez. A_γ als Moduln der siebenten Stufe, nicht aber als beliebig veränderliche Grössen betrachtet. Mit anderen Worten: wir haben vorausgesetzt, dass es sich um Punkte z unserer Curve vierter Ordnung oder A unserer Curve sechster Ordnung handeln solle. Nun aber können wir, um vorerst allein von den z_α zu handeln, folgende Erweiterung des Standpunkts eintreten lassen: Wir sehen die z_α als beliebige veränderliche Grössen an, stellen ihre 168 ternären Substitutionen auf und bilden uns die vier gegenüber diesen Substitutionen absolut invarianten Formen f, Φ, Ψ, X, wobei sich übrigens Ψ^2 als ganze Function der drei anderen Formen darstellt (cf. 737, Note). *Jetzt geben wir die Zahlwerte von* f, Φ, Ψ, X *dieser Relation gemäss und übrigens beliebig und verlangen nun, die zugehörigen Wertsysteme der* z_α *zu berechnen.* Indem wir nur auf die Verhältnisse der z_α sehen, kommt dies darauf hinaus, zugehörige Punkte in der Ebene der z_α zu bestimmen, die aber jetzt nur dann auf der C_4 der z_α gelegen sind, falls wir $f = 0$ nehmen, was ja nicht ausgeschlossen, aber doch ein ganz specieller Fall ist. Die hiermit ausgesprochene Aufgabe wollen wir *das erweiterte Problem der* z_α nennen und kommen auf dasselbe

bei Gelegenheit zurück. Einstweilen verweisen wir auf bezügliche Entwicklungen von Klein im 15ten Annalenbande*) und bemerken zugleich noch, dass den p. 734 genannten Arbeiten von Gordan durchweg die hiermit bezeichnete Auffassungsweise der ε_α zu Grunde liegt. — Dass wir in entsprechender Weise auch ein erweitertes Problem der A_γ aufstellen könnten, ist ohne weiteres ersichtlich. Inzwischen müssten wir, um dasselbe explicite zu formulieren, neben den Formen Ψ', X', die wir oben aufstellten, noch eine ganze Reihe invarianter Formen bilden (die alle selbstverständlich für Punkte unserer Curve sechster Ordnung verschwinden); wir gehen daher hier auf die Einzelheiten nicht ein**).

§ 4. Functionentheoretische Aufstellung der Resolvente achten Grades***).

Es soll jetzt die Besprechung der für die siebente Stufe aufgestellten Galois'schen Probleme dadurch ausgestaltet werden, dass wir deren niederste Resolventen aufstellen und untersuchen. Wir beginnen hier mit dem Gleichungsproblem 168ten Grades und verfolgen diejenige Resolvente achten Grades desselben, welche den acht halbmetacyclischen Untergruppen G_{21} der G_{168} zugeordnet ist. Unter den bezüglichen Congruenzgruppen ziehen wir zum speciellen Gebrauch diejenige Γ_8 heran, welche die Operationen:

$$(1) \qquad v(\omega) \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\delta}, \ (\text{mod. } 7)$$

enthält, um solcherweise später den bequemsten Anschluss an die Entwicklungen des vorigen Kapitels zu besitzen.

Um zuvörderst ein Fundamentalpolygon für die gewählte Γ_8 in der ω-Halbebene abzugrenzen, bemerken wir, dass unter den acht Modulsubstitutionen $1, T, TS, TS^2, \cdots, TS^6$ keine zwei bezüglich der Γ_8 relativ äquivalent sind, wie man durch Rechnung bestätigt. Diese acht Operationen werden also ein Repräsentantensystem für die Γ_8 bilden, und die ihnen entsprechenden Doppeldreiecke werden

*) In der Arbeit: *Über Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* (1879).

**) Vergl. die bereits auf p. 739 genannte Arbeit von Brioschi; die sämtlichen von Brioschi berechneten Coefficienten der allgemeinen Jacobi'schen Gleichung achten Grades sind Formen der im Text gesuchten Art. — Übrigens ist das entsprechend bei $q = 5$ eintretende erweiterte Problem der A_γ in „Ikos." Kap. II, 4 ausführlich behandelt; alle wesentlichen Gesichtspunkte der dortigen Entwicklung würden auch hier bei $q = 7$ in Kraft bleiben.

***) Vergl. Math. Ann. Bd. 14, p. 136, 37, 141 – 143.

ein bezügliches Fundamentalpolygon F_8 aufbauen. Zwecks besserer Übersicht wollen wir indessen die drei Doppeldreiecke TS^4, TS^5, TS^6 durch die ihnen relativ äquivalenten TS^{-3}, TS^{-2}, TS^{-1} ersetzen. Die acht Doppeldreiecke ordnen sich alsdann gegen die imaginäre ω-Axe symmetrisch an, und in der That wird ja das Polygon F_8 bezüglich der imaginären Axe mit sich selbst symmetrisch sein müssen, da Γ_8 mit der Spiegelung A vertauschbar ist.

Um jetzt den gewonnenen Dreieckscomplex zum Polygon F_8 auszugestalten, haben wir die Randcurven desselben auf die in Fig. 104 angezeigte Art einander zuzuordnen. Dass aber diese Zuordnung die richtige ist, beweisen wir zunächst durch folgende rein geometrische Überlegungen auf Grund des Verzweigungssatzes. Jedenfalls werden die beiden von $\omega = 0$ ausstrahlenden Randcurven einander zuzuweisen sein, da auf der geschlossenen F_8 der von $\omega = 0$ herrührende Punkt c von nicht mehr als 14 Elementardreiecken umlagert sein kann. Ein zweiter Punkt c der geschlossenen F_8 wird von $\omega = i\infty$ herrühren, und dieser kann dann nur noch von zwei Elementardreiecken umgeben sein. Demzufolge werden die beiden nach rechts und links unseren Dreiecks-complex abgrenzenden Geraden einander zuzuweisen sein.

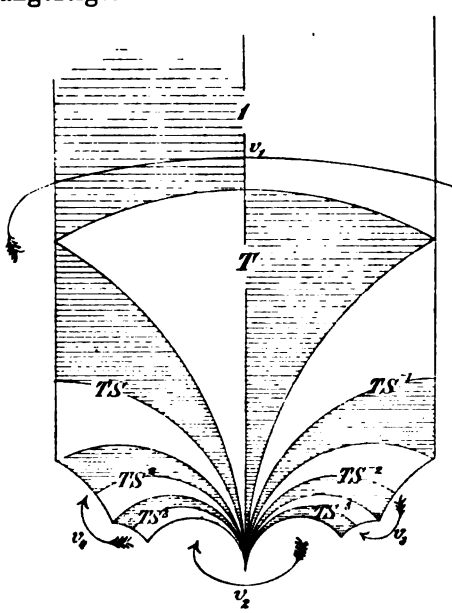


Fig. 104.

Betrachten wir ferner die Punkte b der geschlossenen F_8 oder auch gleich die Stelle $J = 0$ der Riemann'schen Fläche $F_8^{(J)}$. Von den acht Blättern werden dort jedenfalls zwei isoliert verlaufen (zufolge des Verzweigungssatzes), und diese müssen von solchen mit $\omega = \varrho$ äquivalenten Ecken in der Fig. 104 herrühren, die bei der Symmetrie der ganzen Figur selbst bezüglich der imaginären ω-Axe symmetrisch gelegen sind; sehen wir uns also daraufhin die Eckpunkte des Polygons Fig. 104 an. Jedenfalls können die beiden fraglichen Punkte nicht der mit $\omega = \varrho$ äquivalente Punkt von TS^2 und der symmetrische sein. In diesem Falle müssten wir nämlich die offene Kante des schraffierten Dreiecks TS^2 mit derjenigen des freien

Dreiecks TS zusammenordnen; das aber widerstreitet der bereits erkannten Zusammenordnung der beiden geraden Grenzen unseres Polygons. Wie man sieht, bleibt nichts übrig, als dass die beiden Ecken der $\omega = \rho$ äquivalente Punkt von TS^3, sowie der mit $\omega = -\rho^2$ äquivalente Punkt von TS^{-3} sind. Die Zuordnung der Randcurven ist demnach so zu vollenden, wie es in Fig. 104 durch die Pfeile v_3 und v_4 angedeutet ist.

Um jetzt hinterher eine arithmetische Bestätigung dieses Resultates zu geben, berechnen wir uns explicite die vier erzeugenden Substitu-

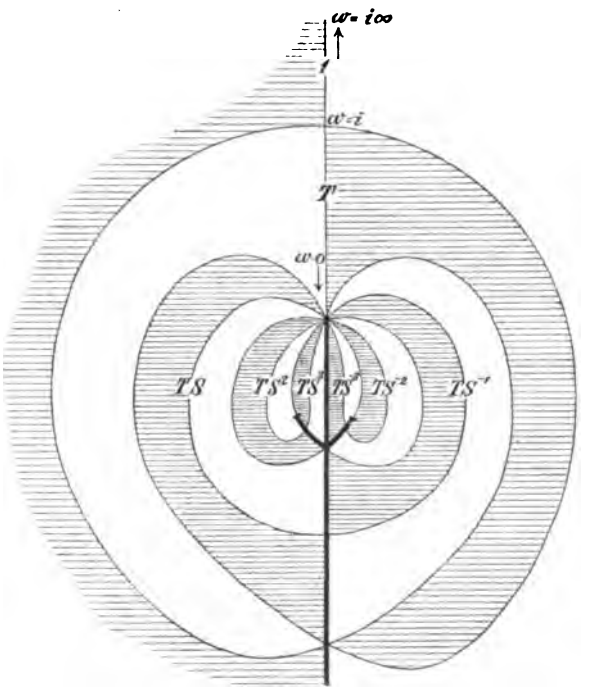


Fig. 105.

tionen v_1, v_2, v_3, v_4, welche die Γ_8 der Fig. 104 zufolge besitzt. Um etwa mit v_3 zu beginnen, so erblickt man in v_3 diejenige Operation, welche das Doppeldreieck TS^{-2} in $TS^{-3}T$ transformiert. Wir haben also ohne weiteres die Identität $v_3 TS^{-2} = TS^{-3}T$ und damit

$$v_3 = TS^{-3}TS^2T.$$

In ähnlicher Weise zeigt sich überhaupt:

$$v_4 = TS^2TS^{-3}T, \quad v_1 = S, \quad v_2 = TS^7T.$$

Ausführlich berechnet findet sich:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -7, & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 7, & -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3, & 1 \\ -7, & -2 \end{pmatrix},$$

Substitutionen, die in der That ohne Ausnahme die Congruenz (1) befriedigen.

Als wichtigstes Resultat der bisherigen Entwicklung entspringt die Thatsache, *dass die acht gleichberechtigten* Γ_8 *dem Geschlechte* $p = 0$ *angehören.* In der That legt sich das Polygon F_8 zu der in Fig. 105 gegebenen einfach bedeckten Ebene F_8 zusammen, deren Einteilung in $2 \cdot 8$ abwechselnd schraffierte und freie Bereiche in wohlbekannter Weise aus den Dreiecken der Fig. 104 entspringt. Als Verzweigung der achtblättrigen Riemann'schen Fläche $F_8^{(J)}$ lesen wir aus Fig. 105 ohne weiteres ab: *Bei* $J = 0$ *verlaufen zwei Blätter isoliert, die anderen sechs hängen zu je dreien in zwei Verzweigungspunkten zusammen; bei* $J = 1$ *hängen die acht Blätter zu je zweien in vier Verzweigungspunkten zusammen; bei* $J = \infty$ *verläuft ein Blatt isoliert, die anderen sieben sind mit einander in einem Verzweigungspunkte cyclisch verbunden.*

Dieses Resultat versieht uns mit allen Mitteln, die zu den Γ_8 gehörende Resolvente

$$J : J - 1 : 1 = \Phi(\tau) : \Psi(\tau) : \mathrm{X}(\tau)$$

durch eine kurze Rechnung endgültig anzugeben*); wir werden sofort sagen: $\Phi(\tau)$ besteht aus einem einzelnen quadratischen Factor und der dritten Potenz eines zweiten quadratischen Factors u. s. w. Dabei wollen wir den Hauptmodul τ durch die Bedingungen

$$\tau(i\infty) = 0, \quad \tau(0) = \infty \tag{2}$$

bis auf einen Factor bestimmen und fixieren diesen letzteren dadurch, dass wir den Ansatz aufschreiben:

$$J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + a\tau + 49)(\tau^2 + b\tau + c)^3 : (\tau^4 + d\tau^3 + e\tau^2 + f\tau + g)^2 : h\tau.$$

Man wolle nämlich bemerken, dass das dritte Glied im ersten Factor von Φ sicher von Null verschieden ist, da $\tau = 0$ nicht Wurzel von $\Phi(\tau) = 0$ sein darf. Indem wir aber das fragliche Glied mit 49 identisch setzen, ist, wie man leicht bemerkt, der in die Definition von τ noch aufzunehmende numerische Factor bis auf das Vorzeichen fest bestimmt; über das letztere werden wir sogleich entscheiden. Dass wir übrigens die Coefficienten der höchsten Glieder in Φ und Ψ sogleich mit 1 identisch annahmen, war zufolge der Identität $\Phi - \mathrm{X} = \Psi$ statthaft.

*) Dass die Resolvente auf Grund der gemachten Angaben sich bereits *eindeutig* bestimmen lässt, kommt natürlich auf die Thatsache zurück, dass es nur eine Fläche F_8 mit den beschriebenen Verzweigungspunkten giebt.

Für die Berechnung der noch unbestimmten Coefficienten $a, b, \cdots$ bilde man sich vor allem die Functionaldeterminante von Φ und X. Da benutzten wir schon öfters den Umstand, dass dieselbe den quadratischen Factor von $\Psi(\tau)$ noch linear enthalten muss. Nun aber ist Ψ selbst ein reines Quadrat, und also muss die fragliche Functionaldeterminante den Factor

$$\Psi^{\frac{1}{2}}(\tau) = (\tau^4 + d\tau^3 + e\tau^2 + f\tau + g)$$

enthalten. Aber sie reduciert sich nach Abstreifung eines jedenfalls unbrauchbaren Factors geradezu auf den Ausdruck vierten Grades:

$$\tau^4 + \tfrac{1}{7}(6a + 4b)\tau^3 + \tfrac{1}{7}(245 + 3ab + c)\tau^2 + 14b\tau - 7c;$$

dieser Ausdruck ist also direct mit $\Psi^{\frac{1}{2}}$ identisch, wodurch sich die Zahlen d, e, f, g in a, b, c ausdrücken. — Auf der anderen Seite muss die Functionaldeterminante von Ψ und X den cubischen Factor von Φ noch quadratisch enthalten und dieser Umstand giebt uns nach kurzer Überlegung die neue Identität

$$\tau^4 + \tfrac{5}{7}d\tau^3 + \tfrac{3}{7}e\tau^2 + \tfrac{1}{7}f\tau - \tfrac{1}{7}g = \tau^4 + 2b\tau^3 + (b^2 + 2c)\tau^2 + 2bc\tau + c^2.$$

Aus den hiermit zur Verfügung stehenden Gleichungen zwischen den Coefficienten berechnet man nun ohne Mühe:

$$b = \tfrac{5}{13}a, \quad c = 1, \quad d = \tfrac{14}{13}a, \quad f = \tfrac{70}{13}a, \quad g = -7,$$

$$e = \tfrac{246}{7} + \tfrac{15}{91}a^2 = \tfrac{14}{3} + \tfrac{175}{507}a^2,$$

und es folgt weiter aus der letzten Gleichung $a = \pm 13$. Das hier noch fragliche Vorzeichen haben wir willkürlich zu wählen und werden erst dadurch den Hauptmodul τ endgültig fixiert haben. Wollten wir in der That lieber $-\tau$ statt τ als Hauptmodul zu Grunde legen, so sieht man, dass dies für unsere Resolvente auf einen einfachen Zeichenwechsel der Coefficienten a, b, d, f, h hinausläuft. Wir setzen also $a = 13$ und finden dann zugleich aus der Identität $\Phi - X = \Psi$, dass $h = 1728$ sein muss. *Als Gestalt der in Aussicht genommenen Resolvente achten Grades gewinnen wir somit*:

$$(3) \qquad \begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ & : (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 : 1728\tau. \end{aligned}$$

Insofern die Wurzeln derselben Modul*functionen* sind, wollen wir sie hinfort als *die functionentheoretische Resolvente achten Grades* bezeichnen.

§ 5. Ausdrücke der Moduln τ in den z_α. Die formentheoretischen Resolventen achten Grades.

Um die Hauptmoduln τ, wie wir sie im vorigen Paragraphen für die gleichberechtigten Γ_8 fixierten, in den z_α darzustellen, greifen wir auf den Umstand zurück, dass das Product $z_1 z_2 z_4$ bei allen Operationen (5) p. 700 unverändert bleibt. Dasselbe wird also auch von $z_1^2 z_2^2 z_4^2 \cdot \Delta^{-1}$ gelten, und da diese Grösse überdies in den ω_1, ω_2 von nullter Dimension ist, so wird $z_1^2 z_2^2 z_4^2 \cdot \Delta^{-1}$ eine rationale Function des zum Polygon Fig. 104 gehörenden Hauptmoduls τ sein. Aber wir erinnern uns, dass diese rationale Function $z_1^2 z_2^2 z_4^2 \cdot \Delta^{-1}$ jedenfalls nur in den Spitzen des Polygons F_8 Null oder unendlich werden kann, und derartige Spitzen hat F_8 nur zwei, die bei $\omega = i\infty$ und $\omega = 0$ liegen; untersuchen wir also die fragliche Grösse an diesen beiden Stellen. Bei $\omega = i\infty$ verschwindet, wie wir schon öfters abzählten, $z_1 z_2 z_4$ im Polygon F_{168} siebenfach, und sonach wird dortselbst $z_1^2 z_2^2 z_4^2 \cdot \Delta^{-1}$ im Polygon F_{168} siebenfach, und also im Polygon F_8 gemessen einfach verschwinden. Ebenso leicht bemerkt man, dass in der anderen bei $\omega = 0$ gelegenen Spitze von F_8 die fragliche Grösse einfach unendlich wird (was man auch a priori aus dem gerade erhaltenen Resultate schliessen kann, da doch die Zahl der Unendlichkeitsstellen im Polygon ebenso gross sein muss, wie die Zahl der Nullstellen). Demzufolge muss $z_1^2 z_2^2 z_4^2 \cdot \Delta^{-1}$ bis auf einen numerischen Factor mit τ identisch sein:

$$\tau(\omega) = c \cdot \frac{z_1^2 z_2^2 z_4^2}{\Delta}. \tag{1}$$

Um c zu bestimmen, berechnen wir den Näherungswert für die rechte und linke Seite der letzten Gleichung bei $\omega = i\infty$. Daselbst wird τ verschwinden, und also ziehen wir aus Formel (3) p. 745

$$J = \frac{1}{1728 \cdot \tau} = \frac{49}{1728 \cdot \tau}, \quad \tau = 49\tau.$$

Den Näherungswert für die rechte Seite von (1) berechne man aus (5) p. 736 und (3) p. 613 und findet durch Vergleich $c = 49$. *Als Darstellung des Hauptmoduls τ in den z_α findet sich so:*

$$\tau(\omega) = \frac{(7 z_1 z_2 z_4)^2}{\Delta}, \tag{2}$$

und man berechnet von hieraus unter Gebrauch der Formeln (3) p. 718 *entsprechende Darstellungen für die mit τ gleichberechtigten Moduln im vollen Modulsystem z_α**).

*) Indem wir (2) unter Gebrauch von (6) p. 737 in

$$49 z_1^2 z_2^2 z_4^2 + \tau X(z_\alpha) = 0$$

Aus Formel (2) ziehen wir unter Benutzung von (3) p. 718 die fernere Gleichung

$$(3) \qquad \sqrt{\frac{\tau}{\Delta}} = \frac{7 z_1 z_2 z_4}{\Delta} = \delta_\infty .$$

Es ist also auch noch die hier links stehende Quadratwurzel eine Modulform siebenter Stufe, die insbesondere zur Γ_8 *gehört.* Freilich wolle man bemerken, dass $\sqrt{\tau}$ für sich genommen eine Modulfunction 14ter Stufe ist; aber sie ist eben eine solche, die durch Division mit $\sqrt{\Delta}$ zur siebenten Stufe zurückgebracht wird.

Haben sich soeben die acht Wurzeln von (3) p. 745 aufs nächste mit den acht Moduln δ_∞, δ_0, δ_1, $\cdots$ verwandt erwiesen, so werden wir jetzt umgekehrt die Gleichung (3) p. 745 benutzen können, um von ihr aus *eine Gleichung achten Grades mit den acht Wurzeln* δ_∞, δ_0, δ_1, $\cdots$ herzustellen. Damit werden wir dann eine anders gestaltete Resolvente für die acht gleichberechtigten Γ_8 gewinnen. Zu solchem Ende ziehen wir zunächst aus der Proportion (3) p. 745 die Gleichung

$$\frac{g_3^2}{\Delta} = \frac{(\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2}{216^2 \tau} .$$

Hier substituieren wir auf Grund von (3) für τ das Product $\delta^2\Delta$, können alsdann auf der rechten und linken Seite der letzten Gleichung die Wurzel ziehen und erhalten

$$\delta^8\Delta^4 + 14\delta^6\Delta^3 + 63\delta^4\Delta^2 + 70\delta^2\Delta - 7 = \pm 216\delta g_3 ,$$

wo wir nun vor weiteren Umformungen das Vorzeichen der rechten Seite bestimmen müssen. Zu dem Ende verstehen wir unter δ im speciellen die Wurzel δ_∞ und berechnen die Näherungswerte für die rechte und linke Seite unserer Gleichung bei $\omega = i\infty$. Dabei zeigt sich, dass das obere Zeichen das richtige ist, und wir haben nach leichter Umsetzung:

$$(4) \qquad \delta^8 + \frac{14}{\Delta}\delta^6 + \frac{63}{\Delta^2}\delta^4 + \frac{70}{\Delta^3}\delta^2 - \frac{216 g_3}{\Delta^4}\delta - \frac{7}{\Delta^4} = 0,$$

eine Gleichung, die wir hinfort als *formentheoretische Resolvente achten Grades des Problems 168ten Grades* benennen*).

Um derartige formentheoretische Resolventen aufzustellen, giebt es übrigens noch eine ganz andere Methode, von der wir hier nebenher

---

umsetzen, können wir sagen: Die 21-wertige Function τ wird auf der C_4 der z_α durch ein Büschel von Curven sechster Ordnung ausgeschnitten. Von den 24 Schnittpunkten sind also nur 21 beweglich, die drei übrigen fest. Man sieht leicht, dass diese letzteren in den Ecken des Coordinatendreiecks der z_α liegen.

*) Vergl. die analogen Entwicklungen bei $q = 5$ Seite 639 u. f.

handeln (cf. Math. Ann. Bd. 14, p. 452). Sehen wir etwa $y = 7 z_1 z_2 z_4 = \Delta \delta_\infty$ als Unbekannte einer Gleichung achten Grades an, so sind deren Coefficienten, als symmetrische Verbindungen der acht gleichberechtigten y, ganze rationale Functionen der z_α von leicht angebbarem Grade. Aber diese letzteren Functionen ändern sich bei den 168 Substitutionen nicht, müssen also Moduln der ersten Stufe darstellen und sind als solche in g_2, g_3 oder auch vermöge (6) p. 737 in Φ, Ψ, X rational. Da kann man nun aus dem Umstande, dass die fraglichen Verbindungen der y *ganze* Functionen der z_α sind, den Schluss ziehen, dass ihre rationalen Ausdrücke in Φ, Ψ, X auch *ganz* sind. Auf Grund dieses Satzes gehe man die Coefficienten der Gleichung achten Grades einzeln durch. Der Coefficient von y^7 ist in den z_α von dritter Dimension, und nun giebt es keine ganze rationale Function der Φ, Ψ, X, welche diese Dimension in den z_α aufwiese; also ist der fragliche Coefficient 0. Des ferneren: die einzige ganze Function der Φ, Ψ, X, welche in den z_α von sechster Dimension ist, haben wir in X selbst vor uns; sonach besitzen wir in aX (a als numerische Constante gedacht) den Coefficienten von y^6. So weiter schliessend finden wir, dass die fragliche Gleichung achten Grades notwendig die Gestalt zeigen muss:

$$y^8 + aXy^6 + bX^2y^4 + cX^3y^2 + d\Psi y + eX^4 = 0,$$

wobei die a, b, c, $\cdots$ numerische Coefficienten sind.

Zur Bestimmung der a, b, c, $\cdots$ kann man jetzt verschiedene Wege gehen. Entweder man berechnet für die symmetrischen Functionen der y aus (5) p. 736 das Anfangsglied der Entwicklung nach r in der Nähe von $\omega = i\infty$, führt dieselbe Rechnung für X, Ψ durch und findet durch Vergleich die a, b, $\cdots$; oder man setzt für y etwa den Ausdruck $7 z_1 z_2 z_4$, für X und Ψ aber gleichfalls ihre Ausdrücke in den z_α ein und verlangt, dass sich solcherart die letzte Gleichung unter Zuhülfenahme von $f(z_\alpha) = 0$ als eine identische erweise, was eine hinreichende Anzahl von Bedingungen für die Zahlen a, b, $\cdots$ ergiebt*). Für uns wird natürlich die explicite Gestalt der letzten Gleichung aus (4) durch die einfache Substitution

$$\delta = y\Delta^{-1}, \quad X = -\Delta, \quad \Psi = 216 g_3 \Delta^3$$

entspringen, wobei wir dann erhalten:

$$(5) \qquad y^8 - 14Xy^6 + 63X^2y^4 - 70X^3y^2 - \Psi y - 7X^4 = 0.$$

*) Man bemerkt leicht, dass sich unter Einhaltung dieser letzteren Methode, sowie unter leichter Modification des voraufgehenden Gedankenganges auch für das erweiterte Problem der z_α eine Resolvente achten Grades ergiebt. Eine solche ist in der That von Klein berechnet worden; vergl. Math. Ann. Bd. XV p. 266 Formel (13), sowie die Correctur bei Gordan, Math. Ann. Bd. XVII, p. 375, Note.

Wir wollen jetzt in (4) auf Grund von (1) p. 723 die Substitution $\delta = -7A^2$ ausführen und solcherweise *die Gleichung 16ten Grades* herstellen:

$$(6) \quad A^{16} + \frac{2}{7\Delta} A^{12} + \frac{9}{7^3\Delta^2} A^8 + \frac{10}{7^5\Delta^3} A^4 + \frac{216 g_3}{7^7\Delta^4} A^2 - \frac{1}{7^7\Delta^4} = 0.$$

Hier haben wir offenbar eine Resolvente des Formenproblems der A_γ *gewonnen.* Unter den 16 Wurzeln von (6) unterscheiden sich acht von den übrigen acht nur durch das Zeichen; jene acht stellen sich in den vier Grössen A_0, A_1, A_2, A_4 durch das Jacobi'sche Schema (1) p. 723 dar und ergeben durch Umkehrung dieses Schemas unmittelbar Darstellungen der vier Moduln A_γ in den Wurzeln von (6)*). Indem wir bei dieser Sachlage die Gleichung (6) wieder als *eine Jacobi'sche Gleichung sechzehnten Grades* bezeichnen, gelten im übrigen für unsere Gleichungen ganz analoge Bemerkungen, wie wir sie bezüglich des Affectes u. s. w. an die bei der fünften Stufe auftretenden Resolventen sechsten und zwölften Grades zu knüpfen hatten. Nur die ungerade Dimension der jetzigen A_γ bedingt (gegenüber der geraden Dimension der Modulformen A_γ der fünften Stufe) immer eine entsprechende Modification. So gehört Gleichung (6) zu derartigen homogenen Γ_{16}, welche die Operation T^2 nicht enthalten, und denen eben deshalb in der nicht-homogenen Modulgruppe Γ nur die Γ_8 des vorigen Paragraphen zugewiesen sind. Dagegen hatten wir an analoger Stelle bei der fünften Stufe homogene Γ_{12}, denen auch innerhalb Γ nicht-homogene Untergruppen des gleichen Index *zwölf* zugeordnet waren.

§ 6. Die beiden Resolventen siebenten Grades in functionentheoretischer Gestalt**).

Wir schliessen unsere Betrachtungen über die siebente Stufe dadurch ab, dass wir endlich die beiden zufolge des Galois'schen Theorems für $q = 7$ existierenden Resolventen siebenten Grades aufstellen und untersuchen. Die Aufstellung in functionentheoretischer Gestalt gelingt wieder vermöge der wiederholt und zuletzt im vorletzten Paragraphen zur Verwendung gebrachten functionentheoretisch-geometrischen Schlussweise, die wir aber hier zweckmässig einmal in genau umgekehrter Anordnung benutzen.

---

*) Man vergl. die Formeln (2) p. 723, in denen an Stelle der Wurzeln von Gleichung (6) des Textes immer die Grössen $\sqrt{\delta}$ stehen.

**) Die durchzuführende Entwicklung ist von Klein zuerst in der Abhandlung: *Über Erniedrigung der Modulargleichungen*, Math. Ann. Bd. 14 (1878) gegeben worden.

Eine einzelne von den $2 \cdot 7$ hier in Betracht kommenden Untergruppen Γ_7, die wir nach Willkür herausgreifen, reduciert sich bekanntlich, modulo 7 genommen, auf eine Oktaedergruppe G_{24}. Man denke sich für die letztere auf der geschlossenen F_{168} ein Fundamentalpolygon F_7 festgelegt und ziehe betreffs der Gestalt des letzteren folgende vorläufige Schlüsse. Die G_{24} enthält im ganzen 9 G_2, und jede derselben besitzt vier Punkte a zu Fixpunkten, so dass insgesamt für 36 Punkte a die beiden an den einzelnen unter ihnen heranragenden Doppeldreiecke bezüglich der G_{24} äquivalent sind. Von den $2 \cdot 36$ so in Betracht kommenden Doppeldreiecken müssen nun offenbar je 24 bezüglich der G_{24} äquivalent sein, und es entfallen eben deswegen *drei* auf das Polygon F_7. Daher sogleich für die Riemann'sche Fläche $F_7^{(J)}$ das Resultat: *Von den sieben Blättern der $F_7^{(J)}$ verlaufen drei bei $J = 1$ isoliert, die anderen vier sind zu Paaren verbunden.* Des ferneren hat G_{24} vier Untergruppen G_3, und da die einzelne je zwei Fixpunkte b hat, so werden im ganzen bei acht Punkten b jeweils die drei umgebenden Doppeldreiecke relativ äquivalent werden. Da aber die $3 \cdot 8$ so in Betracht kommenden Dreiecke zu je 24 relativ äquivalent sein müssen, so folgt ohne weiteres: *Bei $J = 0$ verläuft ein Blatt der $F_7^{(J)}$ isoliert, während die übrigen sechs zu dreien in zwei Verzweigungspunkten vereint sind.* Da endlich die G_{24} keine einzige G_7 enthält, so zieht man den Schluss: *Bei $J = \infty$ sind alle sieben Blätter von $F_7^{(J)}$ cyclisch mit einander verzweigt.*

Nunmehr beweise man durch Formel (2) p. 494, *dass eine so verzweigte F_7 jedenfalls das Geschlecht $p = 0$ besitzt*, wie auch im übrigen der Zusammenhang der Blätter beschaffen sein mag. Unsere Γ_7 besitzt also einen Hauptmodul τ, und unter Gebrauch desselben wird die zur Γ_7 gehörende Resolvente die Gestalt annehmen:

$$(1) \qquad J : J - 1 : 1 = \Phi(\tau) : \Psi(\tau) : \chi(\tau).$$

Man sehe nunmehr zu, inwieweit durch die bislang geschehenen Angaben diese Gleichung specificiert werden kann. Um vor allem den Hauptmodul τ, den wir zu Grunde legen wollen, zu fixieren, soll $\tau = \infty$ in der $F_7^{(J)}$ mit dem einen bei $J = \infty$ gelegenen Punkte zusammenfallen, während $\tau = 0$ bei $J = 0$ in dem einen dort isoliert verlaufenden Blatte stattfinden mag. Dadurch ist unser Hauptmodul bis auf einen Factor bestimmt, welchen letzteren wir sogleich in ähnlicher Weise wie im vorletzten Paragraphen bestimmen werden. Der Erfolg dieser Auswahl des τ ist jedenfalls, dass χ mit einer einfachen Constanten identisch wird, während Φ den Factor τ erhält. Im übrigen bringe man nun die über die Verzweigung der $F_7^{(J)}$ gemachten An-

gaben in Anwendung und findet an Stelle von (1) den ausführlicheren Ansatz:

$$(2)\quad J:J-1:1=\tau(\tau^2+a\tau+7b)^3:(\tau^3+c\tau^2+d\tau+e)(\tau^2+f\tau+g)^2:h.$$

Die Coefficienten der höchsten Glieder τ^7 in Φ und Ψ, die sicher von Null verschieden sind, haben wir auf Grund der Identität $\Phi-X=\Psi$ wieder mit 1 identificieren dürfen, während übrigens zur Kürzung der weiterhin eintretenden Rechnung in das dritte Glied des cubischen Factors von Φ der Bestandteil 7 aufgenommen wurde.

Bei der besonderen Gestalt von $X(\tau)$ wird die Functionaldeterminante von Φ und X einfach die Ableitung von Φ, diejenige von Ψ und X aber die Ableitung von Ψ. Indem wir auf diese Ableitungen unsere oft geübte Schlussweise anwenden, gewinnen wir für die Berechnung der unbestimmten Coefficienten in (2) die beiden identisch bestehenden Gleichungen:

$$(3)\quad \tau^2+\tfrac{4a}{7}\tau+b=\tau^2+f\tau+g,$$

$$(4)\quad \begin{aligned}&7\tau^4+(6c+5f)\tau^3+(5d+4cf+3g)\tau^2+(4e+3df+2cg)\tau+(dg+2ef)\\&\qquad=7\tau^4+14a\tau^3+7(a^2+14b)\tau^2+98ab\tau+343b^2.\end{aligned}$$

Hier behaupten wir nun zuvörderst, dass $a\gtrless 0$ ist. Wäre nämlich $a=0$, so wäre zufolge (3) auch $f=0$ und nach (4) alsdann auch noch $c=0$ und $e=0$. In diesem Falle hätten also Φ und Ψ den Linearfactor τ gemein, was jedenfalls unmöglich ist. Bei dieser Sachlage dürfen wir den Hauptmodul τ dadurch endgültig fixieren, dass wir a etwa mit 7 identificieren. Gleichung (3) liefert alsdann insgesamt:

$$(5)\qquad a=7,\quad f=4,\quad b=g.$$

Unter Benutzung von (5) liefern weiter die Glieder τ^3, τ^2, τ von (4)

$$(6)\qquad c=13,\quad d=27+19b,\quad e=-81+108b,$$

während andrerseits der Vergleich der Absolutglieder in (4), sowie die Identität $\Phi(0)-h=\Psi(0)$ unter Benutzung von (6) und (5) für b und h die Bedingungen liefert:

$$(7)\qquad 4b^2-11b+8=0,\quad h=81b^2-108b^3.$$

Für die noch nicht bestimmten Coefficienten finden sich sonach die beiden Wertsysteme:

$$(8)\qquad \begin{aligned}b=g&=\frac{11\pm i\sqrt{7}}{8},\qquad d=\frac{425\pm 19i\sqrt{7}}{8},\\ e&=\frac{135\pm 27i\sqrt{7}}{2},\quad h=-\frac{351\pm 189i\sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

Diesem Resultate zufolge giebt es überhaupt *nur zwei* Gleichungen (1) vom siebenten Grade, welche die am Eingang des Paragraphen beschriebene Verzweigung besitzen. *Das müssen nun gerade unsere beiden functionentheoretischen Resolventen siebenten Grades sein, und also findet sich als Gestalt derselben:*

$$(9)\quad J:J-1:1=\tau\left(\tau^2+7\tau+\frac{77\pm 7i\sqrt{7}}{8}\right)^3$$
$$:\left(\tau^3+13\tau+\frac{425\pm 19i\sqrt{7}}{8}\tau+\frac{135\pm 27i\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\left(\tau^2+4\tau+\frac{11\pm i\sqrt{7}}{8}\right)^2$$
$$:-\frac{351\pm 189i\sqrt{7}}{4}.$$

Wie wir sehen, giebt es überhaupt nur zwei Riemann'sche Flächen $F_7^{(J)}$, welche die oben beschriebene Verzweigung über der J-Ebene aufweisen. Gelingt es uns also, eine einfach bedeckte Ebene in $2\cdot 7$

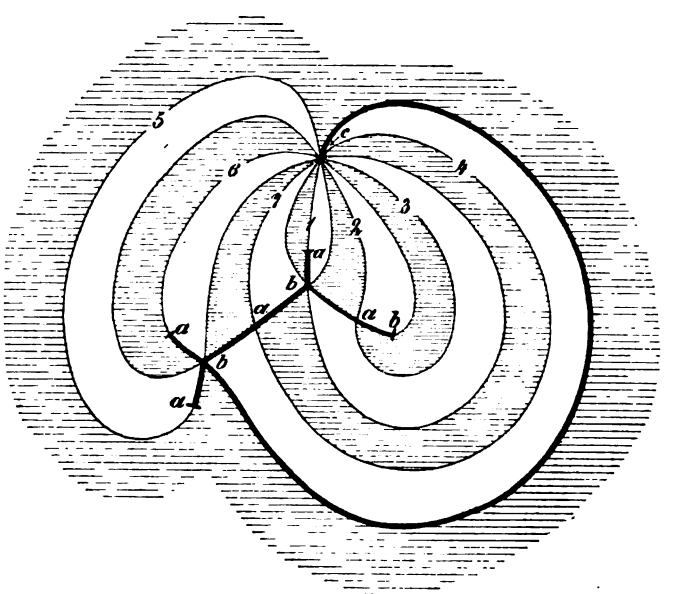


Fig. 106.

abwechselnd schraffierte und freie dreieckige Bereiche zu teilen, die sich um ihre Ecken a, b, c in der hier in Rede stehenden Art gruppieren, so wird diese Einteilung von sich aus eine unserer beiden Resolventen (9) definieren. Nun wolle man sich überzeugen, dass eine solche Einteilung in Fig. 106 thatsächlich vorliegt; sie wird also der einen Gleichung (9) angehören. Insbesondere bemerke man die Unsymmetrie der Einteilung in Fig. 106. Klappt man die dieser Einteilung zu

Grunde liegende Ebene um eine in ihr verlaufende Gerade um und wechselt zugleich die Schraffierung, so werden wir offenbar die zur anderen Resolvente (9) gehörende Einteilung gewinnen*).

Diese Sätze können wir wieder durch eine directe Betrachtung stützen, indem wir nun zum Schluss die Ebenenteilung Fig. 106 in ein Fundamentalpolygon F_7 der ω-Halbebene zurückbiegen. Wir denken diese Ebene dabei längs des stärker markierten Linienzuges durchschnitten und identificieren sodann das Doppeldreieck 1 der Fig. 106 mit dem Doppeldreieck 1 der Modulteilung. So gewinnen wir das in Fig. 107 dargestellte Fundamentalpolygon, das von sich aus eine bestimmte Γ_7 definiert. Die Erzeugenden dieser Γ_7 benennen wir im Anschluss an Fig. 107 durch $v_1, v_2, \cdots, v_6$ und haben durch leichte Betrachtung als deren Bedeutung:

$$v_1 = S^7, \quad v_2 = T, \quad v_3 = S^{-2}TS^2, \quad v_4 = S^{-3}TS^3,$$
$$v_5 = STS^{-2}, \quad v_6 = S^{-1}TS^{-3},$$

was ausgerechnet die folgenden Substitutionen liefert:

$$(10)\quad \begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1, & 7 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, & v_2 &= \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, & v_3 &= \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ -1, & -2 \end{pmatrix}, \\ v_4 &= \begin{pmatrix} 3, & 10 \\ -1, & -3 \end{pmatrix}, & v_5 &= \begin{pmatrix} 1, & -3 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}, & v_6 &= \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man reduciere jetzt die Operationen (10) modulo 7, um zu sehen, auf

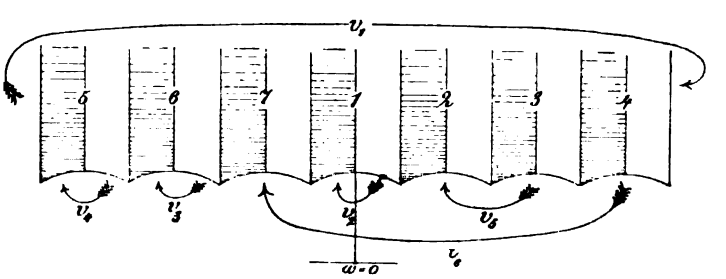


Fig. 107.

welche Untergruppe der G_{168} sich die Γ_7 dabei reduciert. Es treten aber folgende modulo 7 gültigen Congruenzen in Kraft:

$$v_1 \equiv 1, \quad v_3 \equiv v_2 v_6^{-1} v_2 v_6 v_2, \quad v_4 \equiv v_2 v_6^2 v_2, \quad v_5 \equiv v_2 v_6,$$

so dass die fragliche Untergruppe der G_{168} bereits durch v_2 und v_6

*) Dieses ist in Übereinstimmung mit dem früher (p. 478) erkannten Satze, dass die $2 \cdot 7$ Untergruppen Γ_7 in der erweiterten Modulgruppe $\overline{\Gamma}$ sämtlich mit einander gleichberechtigt sind.

erzeugt werden kann. Diese Operationen genügen nun den Bedingungen:

$$v_6^4 \equiv 1, \quad v_2^2 \equiv 1, \quad (v_6 v_2)^3 \equiv 1, \quad (\text{mod. } 7)$$

und erzeugen demzufolge eine Untergruppe G_{24} vom Oktaedertypus (cf. p. 456). Damit sind wir zum Ausgangspunkt der Entwicklung wieder zurückgelangt.

§ 7. Darstellung der zu den Γ_7 gehörenden Moduln τ durch die z_α.

Um die Hauptmoduln τ der beiden Resolventen siebenten Grades im vollen Modulsystem der z_α rational darzustellen, kommen wir auf die $2 \cdot 7$ den G_{24} zugewiesenen Kegelschnitte durch je acht Punkte b zurück (cf. p. 715). Die linken Seiten ihrer Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} x_\nu(z_\alpha) = \varepsilon^\nu z_1^2 + \varepsilon^{2\nu} z_2^2 + \varepsilon^{4\nu} z_4^2 - \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}(\varepsilon^{-\nu} z_1 z_4 + \varepsilon^{-2\nu} z_2 z_1 + \varepsilon^{-4\nu} z_4 z_2), \\ y_\nu(z_\alpha) = \varepsilon^\nu z_1^2 + \varepsilon^{2\nu} z_2^2 + \varepsilon^{4\nu} z_4^2 - \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}(\varepsilon^{-\nu} z_1 z_4 + \varepsilon^{-2\nu} z_2 z_1 + \varepsilon^{-4\nu} z_4 z_2) \end{cases}$$

betrachten wir jetzt als Moduln siebenter Stufe auf dem Polygon F_{168}. Der einzelne dieser Moduln war der einzelnen G_{24} in dem Sinne zugeordnet, dass er sich bei den Substitutionen dieser Gruppe (vielleicht vom Vorzeichen abgesehen) reproducierte. Wir werden jetzt sogleich sehen, dass er bei den gedachten 24 Operationen überhaupt unverändert bleibt; und zwar bemerken wir dies, indem wir die Beziehung der Moduln (1) zu den ihnen durch die G_{24} eindeutig zugewiesenen Moduln τ des vorigen Paragraphen aufsuchen.

Zur speciellen Grösse x_ν gehöre im Sinne der soeben ausgesprochenen Sätze der Hauptmodul τ; alsdann möge man die Null- und Unstetigkeitspunkte dieser beiden Grössen auf dem Polygon F_{168} in Vergleich ziehen. Für x_ν haben wir wie immer zwei Arten von Nullpunkten zu unterscheiden, je nachdem dieselben von Schnittpunkten des Kegelschnitts $x_\nu = 0$ mit der C_4 oder aber von ein für allemal festliegenden gemeinsamen Nullpunkten der drei z_α herrühren. Die letztere Art liefert uns jeweils einen zweifachen Nullpunkt in den 24 Punkten c, die erstere Art acht einfache Nullpunkte in gewissen acht Punkten b. Diese letzteren acht Punkte werden notwendig durch die zugehörige G_{24} unter sich permutiert, und man folgert aus diesem Umstande mühelos, dass wir es hier mit denjenigen acht Punkten b zu thun haben müssen, in deren einzelnem der bezügliche Hauptmodul τ dreifach verschwindet. Da x_ν im übrigen auf der Fläche F_{168} weder verschwindet noch unendlich wird, so bemerkt man leicht, dass der

Quotient $\frac{x_\nu^3}{\Delta}$ auf der Fläche F_{168} genau in derselben Weise 0 und ∞ wird, wie das fragliche τ. Da überdies der eben gebildete Quotient in den ω_1, ω_2 von nullter Dimension ist und also eine Modul*function* siebenter Stufe darstellt, so wird derselbe bis auf einen constanten Factor mit τ übereinstimmen, und wir haben damit den Ansatz gewonnen:

$$\frac{x_\nu^3(z_\alpha)}{\Delta} = \varkappa \cdot \tau(\omega), \tag{2}$$

wo $\varkappa$ eine reine Zahl ist.

Den Wert von $\varkappa$ werden wir wieder durch Näherungsrechnungen bei $\omega = i\infty$ bestimmen; indessen gestalten sich dieselben hier deshalb etwas umständlicher, weil wir dabei zugleich entscheiden müssen, ob der hier in Betracht kommende Modul τ Wurzel der ersten oder zweiten Resolvente (9) p. 752 ist. Aus dem gemeinsamen Ausdruck dieser beiden Resolventen verschaffen wir uns zuvörderst die beiden Anfangsglieder der Reihenentwicklungen der 14 Moduln τ bei $\omega = i\infty$. Wir werden dieselben in der Gestalt

$$\tau = ar^{-\frac{1}{7}} + b + \cdots$$

anzusetzen haben (cf. p. 587) und ziehen andrerseits nach kurzer Zwischenrechnung aus (9) p. 752:

$$\left(\frac{1 \mp i\sqrt{7}}{4}\right)^7 \cdot 1728J = \tau^7 + 21\tau^6 + \cdots.$$

Indem wir hier links und rechts nur auf die beiden Glieder mit r^{-1} und $r^{-\frac{6}{7}}$ Rücksicht nehmen, haben wir identisch:

$$\left(\frac{1 \mp i\sqrt{7}}{4}\right)^7 r^{-1} = a^7 r^{-1} + 7a^6(b+3)r^{-\frac{6}{7}}.$$

Als Anfangsglieder der 14 Reihenentwicklungen für die τ kommt so:

$$\tau = \varepsilon^\mu \frac{1 \mp i\sqrt{7}}{4} r^{-\frac{1}{7}} - 3 + \cdots, \tag{3}$$

wo μ ein Restsystem modulo 7 zu durchlaufen hat.

Auf der anderen Seite findet man für x_ν näherungsweise (cf. (5) p. 736):

$$x_\nu = \varepsilon^{2\nu} z_2^{\,2} - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^{3\nu} z_2 z_4 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left(\varepsilon^{2\nu} r^{\frac{2}{7}} - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^{3\nu} r^{\frac{3}{7}} + \cdots\right)^*), \tag{4}$$

*) Man muss hierbei den Umstand benutzen, dass $z_\alpha \cdot r^{-\frac{4\alpha}{7}}$, als eine gegenüber S invariante Function, in eine Reihe nach *ganzen* Potenzen von r entwickelbar ist.

so dass wir aus Formel (2) die Identität ableiten:

$$\varepsilon^{6\nu} r^{\frac{6}{7}} - \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \cdot 3r + \cdots = \frac{1\mp i\sqrt{7}}{4} \cdot \varkappa \cdot \varepsilon^{\mu} r^{\frac{6}{7}} - 3\varkappa r + \cdots.$$

Die Vergleichung der zweiten Glieder liefert hier $\varkappa = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, diejenige der ersten Glieder alsdann weiter $\mu = -\nu$ und die Gültigkeit des oberen Zeichens. *Den Moduln x_ν gehören demgemäss die oberen Zeichen in der Resolvente* (9) *p.* 752 *an, den y_ν dagegen die unteren. Andrerseits finden wir als Darstellung der Moduln τ der ersten Resolvente in den z_α explicite:*

$$\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \cdot \tau(\omega) = \frac{x_\nu^3(z_\alpha)}{\Delta}, \tag{5}$$

während man für die Darstellung der anderen sieben Hauptmoduln τ nur x_ν mit y_ν zu vertauschen hat und dann gleichzeitig linker Hand das Zeichen von i wechseln muss. Gleichung (5) kann man übrigens wieder dahin interpretieren, dass τ als 24-wertige Function auf der C_4 der z_α durch das Büschel von Curven sechster Ordnung:

$$x_\nu^3(z_\alpha) + \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \tau \cdot \mathsf{X}(z_\alpha) = 0$$

dargestellt wird.

§ 8. Aufstellung und Untersuchung der formentheoretischen Resolventen siebenten Grades.

Aus Formel (5) des vorigen Paragraphen ist ersichtlich, dass x_ν bei den Operationen der zugehörigen G_{24} völlig unverändert bleibt; würde dabei nämlich noch ein Zeichenwechsel eintreten, so müsste dasselbe ja vom Hauptmodul τ gelten, entgegen der Natur desselben. Indem also x_ν eine *siebenwertige* Modulform siebenter Stufe ist, können wir diese Grösse zur Wurzel *einer formentheoretischen Resolvente siebenten Grades* setzen, der dann insgesamt die sieben gleichberechtigten Moduln x_ν genügen.

Die eben gemeinte Resolvente wollen wir einmal auf formentheoretischem Wege ansetzen und bemerken zu dem Ende, dass die symmetrischen Functionen der x_ν wieder ganze rationale Functionen der in § 1 (p. 733) gegebenen Formen $\Phi(z_\alpha)$, $\Psi(z_\alpha)$, $\mathsf{X}(z_\alpha)$ sind. Aber der Coefficient von x^6 in der gesuchten Gleichung wird in den z_α die Dimension zwei zeigen und muss eben deswegen verschwinden, weil es keine ganze Function der Φ, Ψ, X giebt, welche die z_α im zweiten Grade enthielte. Durch Fortsetzung dieser Betrachtung ergiebt sich als Gestalt der fraglichen Gleichung siebenten Grades:

$$(1) \qquad x^7 + aX \cdot x^4 + bX^2 \cdot x + c\Phi = 0,$$

wo die a, b, c drei noch nicht bestimmte numerische Coefficienten sind.

Zur Bestimmung von a, b, c verstehen wir unter x insbesondere die Wurzel x_0, entwickeln die linke Seite von (1) nach ansteigenden Potenzen von $r^{\frac{1}{7}}$, gültig bei $\omega = i\infty$, und müssen dann verlangen, dass die entspringende Reihe gliedweise mit Null identisch ist, insofern ja die Gleichung (1) unabhängig von ω erfüllt sein soll. Da es sich übrigens um die Berechnung von drei Grössen handelt, so müssen wir die drei ersten Glieder der Reihenentwicklung haben und vervollständigen die für x_ν in (4) p. 755 gegebene Entwicklung erst noch durch das dritte Glied, das übrigens von $\varepsilon^{4\nu}\varepsilon_4^{\,2}$ in (1) p. 754 herrührt. Wir finden speciell für x_0 oder x:

$$x = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left\{ r^{\frac{2}{7}} - \frac{1+i\sqrt{7}}{2} r^{\frac{3}{7}} + r^{\frac{4}{7}} + \cdots \right\},$$

während wir für X und Φ die betreffenden Entwicklungen aus (3) p. 736 heranholen. So ergiebt sich nach kurzer Zwischenrechnung als Reihenentwicklung für die linke Seite von (1):

$$r^2(1+c) - r^{\frac{15}{7}}\left(a + \frac{7+7i\sqrt{7}}{2}\right)$$
$$+ r^{\frac{16}{7}}\left(b + 2a(1+i\sqrt{7}) + \frac{-49+21i\sqrt{7}}{2}\right) + \cdots.$$

Indem wir die drei Coefficienten einzeln mit Null identisch setzen, folgt sofort:

$$(2) \qquad c = -1, \quad a = -\frac{7+7i\sqrt{7}}{2}, \quad b = -\frac{35-7i\sqrt{7}}{2}.$$

Als Gestalt der formentheoretischen Resolvente der x_ν findet sich so:

$$(3) \qquad x^7 - \frac{7+7i\sqrt{7}}{2} X \cdot x^4 - \frac{35-7i\sqrt{7}}{2} X^2 \cdot x - \Phi = 0,$$

womit wir dann ohne weiteres als Resolvente der y_ν hinschreiben:

$$(4) \qquad y^7 - \frac{7-7i\sqrt{7}}{2} X \cdot y^4 - \frac{35+7i\sqrt{7}}{2} X^2 \cdot y - \Phi = 0^*).$$

Andrerseits wird man zu diesen Resolventen von (9) p. 752 aus dadurch geführt werden, dass man an Stelle von τ die x bez. y substituiert. Wir schreiben z. B. die erste functionentheoretische Resolvente (welche auf die x_ν führt) in der Gestalt:

---

*) Entsprechende Resolventen für das erweiterte Problem der ε_α sind von Hrn. Klein in Bd. 15 der Math. Ann. p. 266 angegeben worden.

$$\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^7 \cdot 1728\,J = \tau\left(\tau^2+7\tau+\frac{77+7i\sqrt{7}}{8}\right)^3,$$

multiplicieren mit $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^7$ und führen statt τ die x ein. Indem wir dann noch mit Δ^7 multiplicieren, kommt:

$$12^3 g_2^3 \Delta^6 = x^3\left(x^6+\frac{7+7i\sqrt{7}}{2}\Delta x^3-\frac{35-7i\sqrt{7}}{2}\Delta^2\right)^3.$$

Beim Ausziehen der dritten Wurzel braucht man, wie leicht gezeigt wird, eine complexe dritte Einheitswurzel nicht einzuführen und erhält demzufolge als Resolvente der x_ν:

$$(5)\qquad x^7+\frac{7+7i\sqrt{7}}{2}\Delta\cdot x^4-\frac{35-7i\sqrt{7}}{2}\Delta^2\cdot x-12g_2\Delta^2=0.$$

Von hieraus wird man vermöge der Relationen (6) p. 737 sofort zur obigen Gestalt (3) unserer Resolvente zurückgeführt*).

Wir bemerken jetzt, *dass sich die quadratischen Verbindungen der z_α in den x_ν bez. y_ν rational und zwar linear darstellen lassen.* In der That folgt aus den Formeln (1) des vorigen Paragraphen ohne weiteres:

$$(6)\qquad \begin{cases} 7z_1^2=\sum\varepsilon^{-\nu}x_\nu, & 7z_2^2=\sum\varepsilon^{-2\nu}x_\nu, & 7z_4^2=\sum\varepsilon^{-4\nu}x_\nu, \\ 7z_1^2=\sum\varepsilon^{-\nu}y_\nu, & 7z_2^2=\sum\varepsilon^{-2\nu}y_\nu, & 7z_4^2=\sum\varepsilon^{-4\nu}y_\nu, \\ -z_1z_4=\frac{1-i\sqrt{7}}{28}\sum\varepsilon^{\nu}x_\nu=\frac{1+i\sqrt{7}}{28}\sum\varepsilon^{\nu}y_\nu, \\ -z_2z_1=\frac{1-i\sqrt{7}}{28}\sum\varepsilon^{2\nu}x_\nu=\frac{1+i\sqrt{7}}{28}\sum\varepsilon^{2\nu}y_\nu, \\ -z_4z_2=\frac{1-i\sqrt{7}}{28}\sum\varepsilon^{4\nu}x_\nu=\frac{1+i\sqrt{7}}{28}\sum\varepsilon^{4\nu}y_\nu. \end{cases}$$

Hieraus entspringt unter Rücksicht auf (1) p. 754 die interessante Thatsache, *dass sich die einzelne Wurzel x der Resolvente* (3) *linear und homogen in den Wurzeln von* (4) *darstellen lässt, während sich umgekehrt*

---

*) Die hiermit behandelte Resolvente 7ten Grades, deren Existenz ja bereits Galois erkannte, ist schon vor längerer Zeit Gegenstand der Untersuchung von Hermite gewesen; vergl. insbesondere dessen Aufsatz: *Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré,* Tortolini's Annali di Matematica, II, p. 59 (1860), wo sich in der That eine der Gleichung (5) des Textes enge verwandte Gestalt der Resolvente berechnet vorfindet. Im übrigen verweisen wir auf die ausführlichen litterarischen Nachweise in der Arbeit von Klein: *Über Erniedrigung der Modulargleichungen,* Math. Ann. Bd. 14 (man sehe namentlich die Einleitung und die Schlussbemerkung dieser Abhandlung), sowie andrerseits auf die hier in Betracht kommende Arbeit von Gordan: *Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen,* Math. Ann. Bd. 20, p. 515 (1882).

die einzelne Wurzel y_ν in gleicher Gestalt durch die x darstellt. So finden wir z. B. für die y:

$$(7) \qquad (1+i\sqrt{7})\,y_\nu = -2(x_{\nu+3}+x_{\nu+5}+x_{\nu+6});$$

doch sind diese Relationen nur insoweit bestimmt, dass ihre rechten Seiten noch um die mit einem beliebigen Factor versehene Summe $(x_0+x_1+\cdots+x_6)$ vermehrt werden darf. In der That ist ja diese Summe mit Null identisch (während eine weitere lineare Identität zwischen den x leicht erweislich nicht existieren kann). Als Darstellung der x in den y findet sich entweder direct oder durch Inversion der Formeln (7) (unter Benutzung des gerade hervorgehobenen Umstandes):

$$(8) \qquad (1-i\sqrt{7})\,x_\nu = -2(y_{\nu+1}+y_{\nu+2}+y_{\nu+4}). -$$

Wir gedenken noch der hierher gehörigen Entwicklungen Gordan's (in der soeben namhaft gemachten Arbeit in Bd. 20 der Math. Ann.), Entwicklungen, die sich übrigens gleichförmig auf die Resolventen 7ten Grades des erweiterten Problems beziehen. Als Hauptergebnis derselben dürfen wir hinstellen, dass vermöge der Relationen (7) und (8) die symmetrischen Functionen der Wurzeln der einen Gleichung *das volle System der Affectfunctionen* für die andere Gleichung liefern, die letzte Ausdrucksweise in dem Sinne gebraucht, dass sich in ihnen jede andere in den Wurzeln der Gleichung ganze Affectfunction der fraglichen Gleichung rational und ganz darstellen lässt. Setzen wir wieder $f(z_\alpha)=0$, so überträgt sich der ausgesprochene Satz ohne weiteres auf unsere Gleichungen (3) und (4).

§ 9. Vergleich der Stufen $q=5$ und $q=7$. Plan der ferneren Entwicklung.

Im Laufe unserer nun abgeschlossenen Entwicklungen über die siebente Stufe hatten wir bereits mannigfach Gelegenheit, auf die Beziehungspunkte derselben zu den bei $q=5$ vorliegenden Verhältnissen hinzudeuten. Wir kommen hier zum Schluss auf dieselben um so lieber nochmals zurück, als wir damit zugleich einen Vorausblick auf die später zu gebende Verallgemeinerung der durchgeführten Untersuchungen verbinden können.

Um sogleich an die beiderseits eingeführten Modulsysteme anzuknüpfen, so werden wir offenbar die beiden Moduln ζ_1, ζ_2 der fünften Stufe den drei z_α der Stufe $q=7$ gegenüberzustellen haben. Das Entsprechen dieser beiden Systeme gründet sich in erster Linie auf ihr analoges Verhalten gegenüber der Ausübung von Modulsubstitutionen, wobei wir auf die ähnliche Structur der beiderlei Gruppen G_{60} und G_{168} zurückgreifen müssen. Die ζ_α blieben bis auf eine

multiplicativ zutretende fünfte Einheitswurzel unverändert, wenn wir die Operation S ausübten, sie permutierten sich dagegen bei den mit S vertauschbaren V_2 (vom Zeichen abgesehen). Diesen V_2 entsprechen in der G_{168} die mit S vertauschbaren V_3, und wir wissen, dass sich die z_α gegenüber diesen V_3 cyclisch permutieren, während sie bei Ausübung von S eine 7te Einheitswurzel als Factor annehmen. Überhaupt aber wolle man bemerken, dass die gesamten ζ_α-Substitutionen mit Hülfe der fünften Einheitswurzeln im wesentlichen gerade so aufgebaut sind, wie die z_α-Substitutionen aus siebenten Einheitswurzeln (cf. Formel (7) p. 620 und Formeln (5), (7) p. 705). Nur ist hier immer der eine Unterschied zu constatieren, dass die ζ_α von ungerader, die z_α aber von gerader Dimension sind, was denn zur Folge hat, dass die ζ_α in bekannter Weise eine $G_{2 \cdot 60}$, die z_α aber nur eine G_{168} erleiden.

Das Entsprechen in den Structuren der G_{60} und G_{168} fanden wir seiner Zeit darin begründet, dass beide Gruppen Specialfälle der zur Primzahlstufe q gehörenden $G_{\frac{q(q^2-1)}{2}}$ waren. In letzterer Gruppe ergab S eine cyclische G_q, und den cyclischen G_2 und G_3 der G_{60} bez. G_{168} entsprachen allgemein die cyclischen $G_{\frac{q-1}{2}}$. Da werden wir nun später ganz allgemein ein System von $\frac{q-1}{2}$ Moduln q^{ter} Stufe kennen lernen, die sich zu den soeben gekennzeichneten Untergruppen gerade so stellen, wie die ζ_α bei $q = 5$ und die z_α bei $q = 7$ zu den bezüglichen Gruppen, die des ferneren gegenüber den Modulsubstitutionen ein System linearer Substitutionen erleiden, die aus q^{ten} Einheitswurzeln genau so aufgebaut sind, wie die z_α-Substitutionen aus 7ten, die ζ_α-Substitutionen aus 5ten Einheitswurzeln. Diese Modulformen werden in den ω_1, ω_2 eine Dimension zeigen, welche mod. 2 mit $\frac{q+1}{2}$ congruent ist, und $\frac{q+1}{2}$ ist in der That für $q = 5$ ungerade, für $q = 7$ gerade.

Hierüber hinaus wird man sofort die drei Moduln A_γ bei $q = 5$ mit den vier A_γ der siebenten Stufe in Parallele stellen und in diesem Betracht die in der That ganz analogen Formeln, welche die Systeme der A_γ mit den ζ_α bez. den z_α verbinden, sowie andrerseits die beiderlei Substitutionssysteme der A_γ vergleichen. Und in der That werden wir späterhin die beiden genannten Modulsysteme als Specialfälle eines bei der q^{ten} Stufe existierenden Systems von $\frac{q+1}{2}$ Grössen A_γ kennen lernen, an denen wir alle wichtigen, oben für die A_γ der Stufen $q = 5, 7$ aufgestellten Formeln verallgemeinert finden werden. Diese Moduln q^{ter} Stufe A_γ werden übrigens in den ω_1, ω_2 eine Dimension zeigen,

die modulo 2 mit $\frac{q-1}{2}$ congruent ist, was wieder für $q = 5$ und 7 auf die wohlbekannten Verhältnisse zurückkommt.

Indem wir unter Gebrauch der eingeführten Modulsysteme beiderseits für $q = 5, 7$ die bezüglichen Galois'schen Probleme ausführlich formulieren konnten, entsprachen einander wiederum ins einzelne die von uns betrachteten Resolventen der beiderlei Probleme. Der Resolvente sechsten Grades bei $q = 5$ stellte sich bei $q = 7$ die Resolvente achten Grades an die Seite, und wir überblicken sofort, dass wir ihnen entsprechend bei der allgemeinen Primzahlstufe eine Resolvente $(q+1)^{\text{ten}}$ Grades besitzen, nämlich diejenige, die den $(q+1)$ halbmetacyclischen $G_{\frac{q(q-1)}{2}}$ zugehört.

Minder durchschlagend ist es, wenn wir der Resolvente fünften Grades bei $q = 5$ die beiden Resolventen siebenten Grades bei $q = 7$ gegenüberstellen. Hier weiss man ja auch, dass das Herabsinken des Grades auf die Stufenzahl q selbst eine particuläre Eigenschaft ist, welche die Stufen $q = 5, 7$ nur noch mit $q = 11$ teilen. Immer aber werden wir es als eine unserer Hauptaufgaben für später ansehen müssen, dass wir die beiden Resolventen 11ten Grades bei $q = 11$ in einfachster Weise wirklich bilden.

Um die hiermit gekennzeichneten Verallgemeinerungen unserer bisherigen Entwicklungen zu ermöglichen, werden wir uns indes zweckmässig mit neuen Hülfsmitteln versehen müssen. Es würde freilich möglich sein, z. B. auch noch die 11te Stufe unter Anwendung der directen Riemann'schen Schlussweise völlig zu erledigen*); indessen hält es für die einzuführenden Moduln bei wachsender Stufenzahl immer schwerer, sich mit den Anfangsgliedern der Reihenentwicklungen zu versehen, und letzterer bedarf man zu ausführlichen Rechnungen, wie wir wiederholt erfahren haben, allenthalben. Es erscheint demnach geboten, für die höheren Stufenzahlen von analytischen Darstellungen der zu gebrauchenden Moduln geradezu unseren Ausgangspunkt zu nehmen; und da ist es nun wichtig, dass uns derartige Darstellungen bei passendem Ansatz durch die *Transformation und Teilung der doppeltperiodischen Functionen* geliefert werden. Das Eingehen auf diesen Gegenstand, das bei der bezeichneten Sachlage unsere nächste Aufgabe sein muss, hat aber auf der anderen Seite auch noch den Zweck, dass wir die voraufgehend in Geltung gewesenen Methoden und Gesichtspunkte geradezu in ihrer Anwendbarkeit auf die Theorie der Trans-

*) Man sehe in diesem Betracht die Abhandlung von Klein: *Über Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen*, Math. Ann. Bd. 15, p. 533 (1879).

formation und Teilung der doppeltperiodischen Functionen prüfen wollen. Wir werden dabei nicht nur diese ganze Theorie in das übersichtliche Schema der voraufgehenden Entwicklungen eingeordnet finden, sondern wir werden eben in unseren früheren Entwicklungen die Mittel haben, in mehrfachem Betracht über die Transformationstheorie Aufschlüsse zu geben, welche die überlieferte Gestalt dieser Theorie nur erst unvollkommen zu ermitteln vermochte. Überhaupt aber gewinnen wir von da aus vollständige *analytische Darstellungen für diejenigen Moduln, die wir im Laufe der letzten vier Kapitel kennen gelernt haben, in ihrer Abhängigkeit von* ω_1, ω_2. Derartige Darstellungen zu liefern ist ja eine der Aufgaben, deren Ableistung wir uns vorgenommen hatten (cf. p. 589). — Indem wir so einiger Hauptaufgaben gedenken, welche in unseren ferneren Entwicklungen zu behandeln sein werden, wollen wir noch ausdrücklich zufügen, dass wir daselbst auch den *zahlentheoretischen Anwendungen* der Transformationstheorie und der Modulfunctionen überhaupt gerecht zu werden hoffen. Im übrigen darf es als selbstverständlich angesehen werden, dass wir bei diesem kurzen Überblick nur die Hauptzweige unserer künftigen Entwicklungen kennzeichnen konnten.

§ 10. Von der Bedeutung der Modulfunctionen für die Theorie der allgemeinen linear-automorphen Functionen.

Letzten Endes können wir nicht unterlassen, einen Blick auf eine weitere sehr wichtige Verwendung der vorausgehenden Untersuchungen zu werfen, die freilich über den engeren Gegenstand der Modulfunctionen hinausweist. Man darf nämlich die Theorie der Modulfunctionen, und zwar gerade die hier vorgeführte Behandlung derselben, als eine Vorstufe zu den allgemeinen Entwicklungen betrachten, welche Poincaré und Klein über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich gegeben haben. Dahin gehören denn z. B. auch diejenigen Functionen, welche wir früher dadurch erhielten, dass wir die algebraischen Functionen einer Fläche F_μ in Abhängigkeit von der bezüglichen s-Function auffassten, oder endlich noch allgemeiner, dass wir die algebraischen Functionen einer beliebigen F_π auf die zugehörige η-Function (vergl. die Note p. 581) bezogen*).

*) Hr. Poincaré hat über die gedachten Functionen ausser einer grossen Reihe kleinerer mit dem Jahre 1881 beginnender Noten in der Comptes Rendus zunächst 1881 einen Aufsatz in den Mathematischen Annalen (Bd. 19: *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*), dann ferner in den Jahren 1882—84 fünf grössere Abhandlungen in den ersten Bänden der Acta mathematica veröffentlicht; dieselben sind: 1) *Théorie des groupes fuchsiens* (Bd. 1, p. 1), 2) *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Bd. 1, p. 193), 3) *Mémoire sur les groupes kleinéens* (Bd. 3, p. 49), 4) *Sur les groupes des équations linéaires*

Für die Theorie der hiermit gemeinten Functionen erweisen sich nun in der That alle Hauptgesichtspunkte der allgemeinen Erörterungen unserer obigen Abschnitte II und III als fundamental. Um das zu belegen, erinnern wir hier zuvörderst nur an die in II, 1 entworfene Theorie der linearen Substitutionen und der zu den Gruppen linearer Substitutionen gehörenden Fundamentalbereiche. Diese Theorie weist keinerlei besondere Bezugnahme auf die Modulgruppe auf, passt vielmehr gleichmässig auf alle Gruppen linearer Substitutionen. Wir lernten dabei den Unterschied zwischen Gruppen mit endlichem Fundamentalbereich und Gruppen ohne einen solchen kennen (cf. p. 191 und 209) und bemerkten, dass nur Gruppen der ersteren Art in der Theorie der eindeutigen Functionen in Betracht kommen können. Insofern für eine derartige Gruppe durch die Kantenzuordnung des Fundamentalbereichs ein System von erzeugenden Substitutionen gegeben war, konnte die Gruppe durch das Fundamentalpolygon geradezu als definiert angesehen werden, ein Satz, von welchem wir für die aus Modulsubstitutionen bestehenden Gruppen einen weitgehenden Gebrauch machten.

Bei der Bildung „der zu einer Gruppe gehörenden Functionen“*) sind Poincaré und Klein verschiedene Wege gegangen. Während nämlich der erstere durch direct angesetzte convergente Reihen von charakteristischer Bauart**) zugehörige Functionen herstellte, war für Klein der Anschluss an die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen und die zugehörigen Existenztheoreme der gewiesene Weg. In der That dürfte hier für uns sofort verständlich sein, wie sich ganz im Sinne unseres dritten Abschnittes das einzelne Polygon einer Gruppe auch im allgemeineren Falle durch Zusammenfaltung seiner auf einander bezogener Ränder in eine im Raum gelegene Riemann'sche Fläche umsetzen lässt, und wie wir nun weiter von den auf dieser Fläche existierenden eindeutigen Functionen ohne wesentlich singuläre Punkte die für unsere Gruppe gesuchten Functionen hernehmen. Auf die

(Bd. 4, p. 201), 5) *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes* (Bd. 5, p. 209). Die bezüglichen Arbeiten von Hrn. Klein sind ausser den früher immer wieder namhaft gemachten Abhandlungen über Modulfunctionen (cf. die Nachweise p. 142 und 308): *Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich* (Math. Ann. Bd. 19 und 20, 1882), *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie* (Math. Ann. Bd. 21, 1882). Hr. Klein bezeichnet die hier in Betracht kommenden Functionen neuerdings als *linear-automorphe Functionen* oder wohl auch kurzweg als *automorphe Functionen*.

*) Die Ausdrucksweise ist genau so zu verstehen, wie wir sie oben bei den aus Modulsubstitutionen bestehenden Gruppen gebrauchten.

**) Dieselbe beruht auf einer wichtigen Verallgemeinerung der Eisenstein'schen Reihen für die doppeltperiodischen Functionen.

letzteren überträgt sich also ohne weiteres der ganze Apparat der Riemann'schen Theorie genau in der Weise, wie wir das oben im speciellen für die Modulfunctionen kennen lernten.

Es ist übrigens für uns von besonderem Interesse, dass Poincaré vermöge seiner Reihen direct nur diejenigen Functionen bildet, welche er als *„fonctions théta"* bezeichnet, und aus denen erst durch Quotientenbildung die bei den Substitutionen der Gruppe unveränderlichen Functionen hervorgehen. Es muss uns diese Sachlage sofort verständlich sein; denn jene gemeinten Functionen entsprechen direct unseren Modul*formen*, und die Analogie wäre eine noch augenfälligere geworden, falls sich Hr. Poincaré der *homogenen Schreibweise* bedient hätte. Letztere dürfen wir aber für die vorliegenden Zwecke um so mehr als sachgemäss anerkennen, als die Formen gegenüber den homogenen Substitutionen direct invariant sind, während sich Poincaré's „fonctions théta" bei Ausübung einer zugehörigen Substitution immer noch um einen von der letzteren abhängigen Factor ändern.

Wenn nun in der That für die so umgrenzte Theorie der automorphen Functionen die elliptischen Modulfunctionen die ersten bis ins einzelne betrachteten Beispiele liefern, so mag man nach den Gründen forschen, warum die geschichtliche Entwicklung gerade diese Beispiele als erste an die Hand gab. Man wird da erstlich die enge Verwandtschaft der Modulfunctionen mit den doppeltperiodischen Functionen, sodann aber den besonders zugänglichen arithmetischen Charakter der Modulgruppe anführen. Man muss wohl in letzterem Umstande den Hauptgesichtspunkt sehen; denn auch der erstere führt auf ihn zurück, wie leicht weiter ausgeführt werden könnte.

Hier finden wir also allgemein eine Sachlage, wie wir sie oben (p. 387) bei der Besprechung des gruppentheoretischen Problems der Modulfunctionen insbesondere kennen lernten. *Nur diejenigen automorphen Functionen vermögen wir in erschöpfender Weise zu behandeln, deren zugehörige Gruppen wir von arithmetischer Seite beherrschen*, und das sind einstweilen allein die Congruenzgruppen innerhalb der Modulgruppe und einige wenige Gruppen verwandter Art. Zwischen der Zahlentheorie und der Mannigfaltigkeit der geometrischen Figuren, deren Bildungsgesetz wir überblicken, besteht eben zur Zeit noch ein Missverhältnis. Wir können in diesem Betracht nur wiederholen, was wir schon einmal (p. 418) betonten, dass nämlich die Zahlentheorie von der Fülle der sich hier geometrisch aufdrängenden Probleme eine wesentliche Weiterentwicklung erfahren dürfte, und müssen nun hinzusetzen, dass eben hiervon eine exacte Durchbildung der Theorie der automorphen Functionen abzuhängen scheint.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

urned to
last date

FEB 14 59 H

3814962

Math 4508.90
Vorlesungen uber die Theorie der e
Cabot Science
003323277
3 2044 091 900 100